

# [45°/-45°/-45°/90°/45°/45°/-45°]<sub>r</sub> 복합재료 적층판으로 구성된 사각단면 절판구조물의 구조해석

김덕현\* · 이정호\*\* · 홍창우\*\*\* · 이남주\*\*\*\*

## Analysis of Folded Plate Structures Composed of [45°/-45°/-45°/90°/45°/45°/-45°]<sub>r</sub> Type Laminated Composites Plates

Kim, Duk-Hyun, Lee, Jung-Ho, Hong, Chang-Woo and Lee, Nam-Ju

**Key Words:** Finite difference equation, Folded plate structure, Compatibility and equilibrium equation, Beam theory, Numerical analysis

### Abstract

The theory of non-prismatic folded plate structures was reported by the senior author in 1965 and 1966. Fiber reinforced composite materials are strong in tension. The structural element for such tension force is very thin and weak against bending because of small bending stiffnesses. Naturally, the box type section is considered as the optimum structural configuration because of its high bending stiffnesses. Such structures can be effectively analyzed by the folded plate theory with relative ease. The "hollow" bending member with uniform cross-section can be treated as prismatic folded plates which is a special case of the non-prismatic folded plates. In this paper, the result of analysis of a folded plates with one box type uniform cross-section is presented. Each plate is made of composite laminates with fiber orientation of [ABBCAAB]<sub>r</sub>, with A=-B=45°, and C=90°. The influence of the span to depth ratio is also studied. When this ratio is 5, the difference between the results of folded plate theory and beam theory is 1.66%.

### 기호설명

[A] : 적층판 인장강성 매트릭스  
 $A_{ij}$  : 인장 강성 ( $N-\epsilon_0$ )  
 [B] : 적층판 휨-인장 연계강성 매트릭스  
 $B_{ij}$  : 휨 인장 연계 강성 ( $N-\epsilon_0, N-x$ )  
 $a, b$  : 판 요소의 폭  
 $c$  : 판의 형상비 ( $a/b$ )  
 [D] : 적층판의 휨강성 매트릭스  
 $D_{ij}$  : 휨 강성 ( $M-x$ )  
 $G_{ij}$  : 전단 탄성 계수  
 $ST_b$  : 박스단면의 휨강성

### 1. 서론

최근 산업의 발전으로 구조물이 대형화되어 감에 따라 자중의 증가로 인해 내진 설계의 중요성과 최적설계 및 최적시공이 요구되고 있다. 이에 따라 전세계적으로 첨단 복합재료를 건설분야에 응용하고자 하는 연구가 활발히 진행되고 있다. 첨단 복합재료로 구성된 건설재료는 인장에 매우 강한 장점을 가지고 있다. 그러므로 복합재료 적층판이 건설부재로 사용될 때 동일 하중 상태에서 두께를 감소시킬 수 있다. 그러나 이러한 구조부재는 비틀림이나 좌굴에 매우 약하게 되므로 이러한 강성을 유지시키기 위해 절판구조 형식으로 만들어진 구조부재를 사용한다.

본 논문에서는 횡방향 전단 변형이 무시되었을 때 복합적층판으로 구성된 절판구조물의 구조해석을 위한 수치해석 방법을 제시하였다. 여기에서 3차원의 변위  $u, v, w$ 를 포함한 평형방정식을

\* Korea Composites 대표  
 \*\* 영동전문대학교 토목과 겸임교수  
 \*\*\* 강원대학교 산업기술연구소 연구원  
 \*\*\*\* 강원대학교 토목공학과 석사과정

유한 차분법으로 해석하였으며, 절선에서 경사 적합 조건과 힘의 평형조건을 만족시키는 경계조건을 사용하였다. 제안된 모델을 사용하여  $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/90^\circ/45^\circ/45^\circ/-45^\circ]_r$  형태의 복합재료판으로 구성된 사각단면의 절판구조물을 형상비 증가에 따라 해석하였다. 이 모델의 정밀도를 증명하기 위해 형상비가 증가되었을 때 보 이론의 결과 값과 비교·고찰하였다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 적층복합판 이론

횡방향 전단변형률이 무시될 수 있을 때, 특별직교 이방성 판의 경우에  $B_{ij} = 0$ 이고 또한  $( )_{16}, ( )_{26}$ 항이 없으므로 존재하는 강성은  $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}, D_{11}, D_{22}, D_{12}$  그리고  $D_{66}$ 뿐이다.

따라서 복합적층판의 평형방정식은 다음과 같이 3개의 식으로 나타낼 수 있다.

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -X \quad (1)$$

$$A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -Y \quad (2)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (3)$$

여기서  $X, Y$ 는 체적힘(body force)이다.

세 개의 연립 편미분 방정식은 특별직교 이방성 적층판의 형태로서 휨-인장 연계강성인  $B_{ij}$ 가 0이 되어 변위  $u, v$ 에 관한 두 개의 평형방정식과  $w$ 를 포함하는 휨에 관한 평형방정식으로 나누어 고려할 수 있다. 즉, 변위  $u, v$ 를 포함하는 두 개의 평형방정식과 변위  $w$ 에 관한 평형방정식에 대해 유한차분식을 구성하고 각각의 유한차분 매트릭스를 선형결합으로 구성하여 3차원의 전체 평형방정식을 구성한다.

#### 2.2.1 변위 $u, v$ 에 관한 평형방정식

특별직교 이방성 적층복합판의 응력-변형률 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 변형률은

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (5)$$

이다. 그러므로 면내응력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_x = A_{11} \epsilon_x + A_{12} \epsilon_y = A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6)$$

$$\sigma_y = A_{12} \epsilon_x + A_{22} \epsilon_y = A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (7)$$

$$\tau_{xy} = A_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (8)$$

### 2.2 휨( $w$ )에 관한 평형방정식

휨에 관한 평형방정식인 식(3)을 유한차분형태로 표현할 경우 4차 미분방정식이므로 중앙차분을 고려한다 하더라도 한 방향으로 고려해야할 점의 수가 5개가 되어 가상점 소거에 번잡함을 야기한다. 그러나 형상비가 증가함에 따라 증가하는 방향의 모멘트의 영향을 평형방정식에서 무시할 수 있으므로 수렴 속도를 촉진시키기 위해 식(9), (10)과 같이 2개의 2차 편미분 방정식으로 변환하여 휨에 관한 평형방정식을 고려할 수 있다(Kim, 1967).

$$-4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (9)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (10)$$

또한 모멘트  $M_x$ 와  $M_{xy}$ 는 다음 식(11), (12)로 표현된다.

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (11)$$

$$M_{xy} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

### 2.3 절판이론 및 유한차분법

이 논문에서는 사각형 단면을 가진 절판구조물을 해석하기 위해 3차원의 변위  $u, v, w$ 를 모두 고려한 평형방정식과 절선에서의 문제를 해결하기 위해 비균등단면 절판 구조물을 위한 김의 방법을 사용하였다(Kim, 1965). 이 논문에서 판들은 똑같은 단면을 갖는다고 가정하였다. 절판이론 및 유한차분법에 관한 내용은 기 발표된 논문에서 설명되어 있으므로 여기서는 설명하지 않는다(Kim, 1997, 1999).

## 3. 수치해석

### 3.1 대상구조물의 물성 및 형상

대상구조물은 복합재료 적층판으로 구성된 박스(box)거더를 고려하였다. Figure 1은 대상구조물의 형상을 나타낸 것이다. 이때 적층판은  $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/90^\circ/45^\circ/45^\circ/-45^\circ]_1$  형태이며 하나의 라미나(lamina)의 두께가 0.005m를 갖

는 구조로 구성되었다고 가정하였다.

이러한 적층형태는 적층수가 1일 경우부터 강성매트릭스에서  $B_{ij} \approx 0$ ,  $(\ )_{16} = (\ )_{26} \approx 0$ 가 되어 특별지고 이방성 복합재료 적층판 이론의 사용이 가능하다(Kim, 1992).

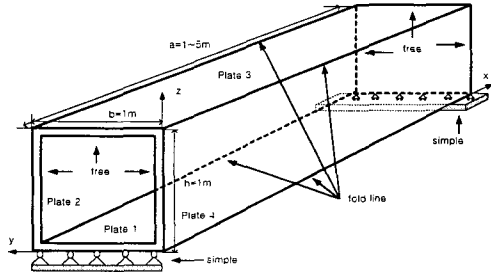


Figure 1. Composite laminated folded plate structure

사각단면 절판구조물에 사용된 복합재료 적층판의 기본 물성 값은 다음과 같이 고려하였다.

$$\begin{aligned} E_1 &= 46.04 \text{ Gpa}, & E_2 &= 5.552 \text{ Gpa} \\ \nu_{21} &= 0.03594, & \nu_{12} &= 0.298 \\ G_{12} &= 2.06 \text{ Gpa}, & t_0 &= 0.005 \text{ m} \end{aligned}$$

주어진 물성값과 적층형태 및 섬유 배향각을 고려하여 강성매트릭스  $A_{ij}$ ,  $D_{ij}$ 를 계산하고 그 결과 값을 Table 1에 나타내었다.

Table 1. Stiffnesses of laminated plate

Extensional stiffness (N/m)		Flexural stiffness (N·m)	
$A_{11}$	506091648.869786	$D_{11}$	56824.503261
$A_{22}$	710721888.588570	$D_{22}$	57250.822503
$A_{12}$	362768463.406576	$D_{12}$	42103.137633
$A_{66}$	376345429.802832	$D_{66}$	43489.119558

### 3.2 단순보 이론에 의한 해석

박스형 거더를 설계할 때 간편한 방법으로 지간길이가 긴 구조에 대해 단순보 개념을 도입하여 구조계산을 하는 경우가 있다. 일반적으로 구조물의 형상비가 증가하면 단순 보로 해석한 결과 값에 수렴해 간다. 그러나 그 수렴정도는 구조물의 형식 및 재료적 특성에 따라 판이한 형상을 보이므로 실 구조물에 대한 정확한 해석결과와의 비교·검토가 수행되어야 한다.

본 논문에서는 복합재료로 구성된 박스형 거더를 보다 효과적으로 고려하기 위해 박스 전단면을 일체로 고려하여 단순 보 개념으로 해석하고자 하였다(Kim, 1995).

### 사각단면의 강성계산

복합재료로 구성된 사각단면을 갖는 절판구조의 경우 상·하판과 측판의 강성 및 단면의 기하학적 형상을 고려하여 박스단면의 휨강성을 계산할 수 있다.

Figure 2와 같은 박스형태의 중공형 단면을 갖는 보를 고려하자. 이때 단면의 두께는 균일한 두께  $t$ 를 갖는다고 가정한다. 1차원 보의 경우 강성은 보 역학을 고려하여 얻을 수 있다. Figure 2와 같은 단면의 경우 높이  $h$ 에 비해 박스의 상, 하판의 두께가 상대적으로 얇기 때문에 상, 하판의 휨강성 ( $D_{11}$ )의 영향을 무시할 수 있다. 이러한 경우에 박스단면의 휨강성은 다음과 같은 식으로 주어진다(Kim, 1995).

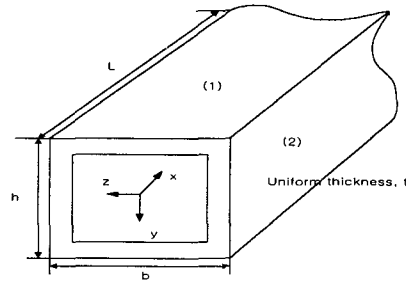


Figure 2. Beam with hollow cross-section

$$ST_b = 2(A_{11})_1 b \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{(A_{11})_2 h^3}{6} \quad (13)$$

여기서  $b$  : 박스단면의 폭

$h$  : 박스단면의 높이

$(A_{11})_1, (A_{11})_2$  : 상·하, 측판의 인장강성

$ST_b$  : 박스단면의 휨강성

수치해석에서 고려한 박스형 복합재료 절판구조물의 경우 두께가 균일하고 동일한 복합재료 적층판으로 구성되었다고 가정하였으므로 Table 1의 결과 값으로부터  $A_{11}$ 값을 이용할 수 있다. 따라서 구조물의 단면 형상과 인장강성을 고려하여 박스단면의 휨강성을 계산하면, 식(13)으로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} ST_b &= 2 \times (506091648.869786 \text{ N/m}) \times 1\text{m} \times \left(\frac{1\text{m}}{2}\right)^2 \\ &+ \frac{(506091648.869786 \text{ N/m}) \times (1\text{m})^3}{6} \\ &= 337394432.6 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

### 형상비 증가에 따른 보 해석과 절판이론에 의한 해석결과 비교

단순 보에 등분포 하중 q가 작용할 경우 중앙 점 최대 처짐은 다음과 같다.

$$y_c = \frac{5 q L^4}{384 EI} \quad (14)$$

여기서  $y_c$  : 지간길이 L/2에서의 최대 처짐  
 L : 지간길이  
 EI : 휨강성  
 q : 등분포 하중(N/m)

식(14)에서 휨강성 EI는 박스단면의 휨강성  $ST_b$ 로 대치될 수 있다.

본 논문에서 구성한 전산프로그램을 이용하여 형상비 증가에 따른 수치해석을 수행한 결과 값과 식(14)로부터 계산된 지간길이에 따른 하부 절선의 중앙지점에서의 처짐 값을 Table 2에 나타내었다. 이때 재하하중은 상판에 등분포수직하중  $q=1000 \text{ kN/m}^2$ 를 고려하였다.

Table 2. Deflection at the center of lower fold line( $x=L/2$ ) by beam theory and folded plate theory (unit : m)

	Aspect Ratio 1	Aspect Ratio 2	Aspect Ratio 3	Aspect Ratio 4	Aspect Ratio 5
Folded plate theory	2.31E-5	4.79E-4	2.84E-3	9.50E-3	2.37E-2
Beam Theory	3.86E-5	6.18E-4	3.13E-3	9.88E-3	2.41E-2
Ratio	0.599	0.78	0.907	0.961	0.983

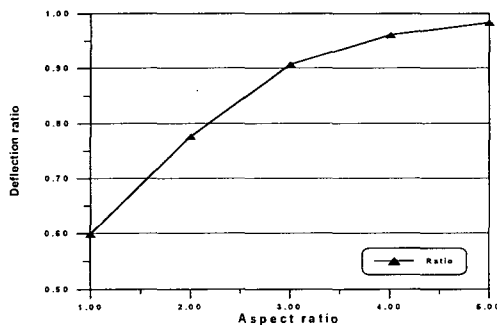


Figure 3. Deflection ratio at the center of the lower fold line

형상비 증가에 따른 두 방법의 수렴정도를 Figure 3에 그래프로 나타내었다. 그래프에서 형상비가 증가할수록 보 해석과 본 논문에서 구성한 전산프로그램의 처짐에 대한 결과 값이 수렴해 가는 것을 볼 수 있다. 각각의 결과 값은 형상비 증가에 따른 하부 절선의 중앙 점에서의 최대 처짐 값을 나타낸다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 절판구조물의 절선에서의 문제를 해결하기 위해 3차원의 평형방정식과 비균일 단면 절판구조물을 위한 Kim의 방법을 이용하였다. 이때 수치해석 기법으로 유한차분법을 사용하여 수치해석을 수행하였다. 해석결과는 보 이론에 의한 결과 값과 비교되었으며, 그 결과 형상비가 3일 때부터 보 이론에 의한 결과 값과 유한차분 기법을 이용한 절판이론에 의한 해석결과가 90%이상의 수렴성을 보이고 있다. 주어진 결과 값은 본 논문에서 고려한 대상구조물의 예와 같은 구조물을 설계할 때 간편한 보 해석의 가이드 라인으로 쓰일 수 있다.

#### 참고문헌

- [1] 김덕현, 김경진, 박제선(1992), "[ABBCAAB] 형태를 갖는 복합적층판의 각도변화에 따른 고유진동수", 대한토목학회 학술발표회 논문집, 경북대학교, 10. 24, pp275~278.
- [2] 김덕현, 박제선, 이정호(1997), "유한차분법을 이용한 특별직교 이방성판의 구조해석", 대한토목학회 학술발표회 논문집, 경기대학교, pp.107-110.
- [3] Kim, D. H.(1965), "Theory of Nonprismatic Folded Plate Structures", *Analysis of Triangularly Folded Plate Roofs of Umbrella Type*, Thesis Submitted as a Partial Fulfillment for the Degree of Doctor of Philosophy, Purdue University.
- [4] Goldberg, J. E. and Kim, D. H.(1966) "Analysis of triangularly folded plate roofs of umbrella type", Proc. of 16th General Congress of Applied Mechanics, Tokyo, Japan, Oct., p. 280
- [5] Kim, D. H.(1967), "Tridiagonal Scheme to Solve Super Large Size Matrixes by the Use of Computer", Journal of Korean Society of Civil Engineers (K.S.C.E.), Vol 15-1.
- [6] Kim, D. H.(1967), "The Effect of Neglecting the Radial Moment Terms in Analyzing a Finite Sectorial Plate by Means of Finite Differences," International Symposium on Space Technology and Sciences, Tokyo, Japan, May.
- [7] Kim, D. H.(1995), *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, E & FN SPON, Chapman & Hall, London.
- [8] Kim Duk-Hyun, Lee Jung-Ho, Lee Nam-Ju, Won Chi-Moon(1999), "Analysis of Three Dimensional Structures by Folded Plate Theory-Analysis of Rectangular Plates with In-plane  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  Forces-", 한국복합재료공학회 춘계학술발표회 논문집, 경상대학교.