

직교이방성 I 형 단면 압축재의 국부좌굴 주도요소판별

김학균* · 채수하** · 정상균** · 윤순종***

Identification of Dominant Plate Component for Local Buckling of Orthotropic I-Shape Compression Member

Kim, H. G., Chae, S. H., Jeong, S. K., and Yoon, S. J.

Key Words: orthotropic, equilibrium approach, local buckling, dominant plate component

Abstract

This paper presents the analytical results of local buckling of orthotropic I-shape compression members. Employing the equilibrium approach, the characteristic equation for local buckling of I-shape compression member is derived. Using the derived equation, the minimum buckling coefficients with respect to the ratio of width to thickness for the I-shape column are suggested as a graphical form. In addition, the dominant plate component initiating the local buckling of I-shape column is also identified by using the approximate solution and the results are plotted with dotted line on the minimum buckling coefficient curve.

기호설명

- C_i : 판의 좌굴계수를 나타내는 상수($i=1,2,3$)
 E_{11}, E_{22} : 재료의 성질방향 1과 2에 대한 탄성계수
 G_{12} : 전단탄성계수
 k : 판의 좌굴계수
 N_x : 등분포일축압축력
 w : 판의 면외치짐
 δ : 플랜지와 복부의 폭비 ($= b_2/b_1$)
 ϕ : 판의 길이와 폭의 비 ($= a/b$)
 ω : 복부와 플랜지의 두께비 ($= t_1/t_2$)

1. 서론

군수 및 항공, 선박분야에서 사용되어온 복합재료는 기존 건설용 구조재에 비해 여러 가지 장

점(내부식성, 경량, 비자성 등)을 가지고 있다. 또한 펄트루전 공정 등의 개발을 통해 복합재로 구성된 구조재의 대량생산이 가능해짐에 따라 최근에는 건설분야에서도 그 사용이 증가되고 있는 추세이다. 그러나 아직은 복합재로 구성된 구조재에 대한 설계기준이 미흡한 상태이기 때문에 이론적, 실험적 연구가 필요하다⁽¹⁾.

일반적으로 구조용 부재는 여러 개의 판요소들로 구성되어 있으며, 각 판요소는 접합부에서 다른 판요소에 의해 탄성적으로 구속되어 있다. 또한 구조재에 국부좌굴이 발생하면 판요소들간의 두께비와 폭비에 따라 어느 한 판요소가 먼저 좌굴을 일으키고 동시에 다른 판요소도 종속적으로 좌굴을 일으키게 된다. 그러므로 좌굴을 일으키는 판요소를 판별해 내는 것은 구조재 설계에서 부재단면의 치수를 결정하거나, 이미 설계된 구조재의 보수보강에 있어서 보강해야할 판요소의 결정에 중요한 판단기준이 될 수 있다.

따라서, 본 연구에서는 직교이방성 I형 단면 압축재의 국부좌굴해석식을 정밀해법을 사용하여 유도하고, 유도된 좌굴해석식을 사용하여 각 판요소의 폭비 및 두께비에 따른 최소좌굴계수(k_{min})

* 홍익대학교 대학원 토목공학과 석사과정

** 홍익대학교 대학원 토목공학과 박사과정

*** 홍익대학교 토목공학과 교수

를 구하여 그래프로 제시하였다. 또한 정밀해법에 비해 쉬우면서도 비교적 높은 정확도를 갖는 근사식을 사용하여 I형 단면 압축재의 국부좌굴 거동을 주도하는 판요소를 판별하는 방법을 제시하였다.

2. 직교이방성판의 좌굴

직교이방성 구조재는 일반적으로 판요소로 구성되므로 압축재의 국부좌굴 거동을 해석하기 위해서는 먼저 다양한 경계조건을 갖는 판에 대한 좌굴해석이 선행되어야 한다. 등분포일축압축력을 받는 경우 다양한 경계조건을 갖는 직교이방성판의 좌굴해석은 이미 발표된 바 있다⁽¹⁾. 따라서 본 절에서는 기존문헌의 결과를 참고하여 정밀해법 및 에너지법에 의한 판의 좌굴해석 과정 및 근사식의 유도과정을 간단히 소개한다.

2.1 정밀해법에 의한 직교이방성판의 좌굴

그림 1은 등분포일축압축력을 받고 있는 직교이방성판을 나타낸 것으로 하중이 재하되는 두 변은 단순지지되어 있으며, 다른 두 변은 임의의 경계조건을 갖는다. 또한 계산을 편리하게 하기 위하여 무차원 변수인 $\xi(=x/a)$ 와 $\eta(=y/b)$ 를 도입하였다.

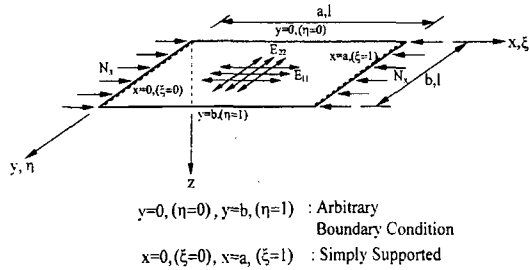


그림 1. 등분포일축압축력을 받는 직교이방성판

고전적 직교이방성 판이론에 따르면 그림 1과 같은 판의 처짐식은 다음과 같이 정의된다^(2, 3).

$$w = (A_1 \cosh \alpha \eta + A_2 \sinh \alpha \eta + A_3 \cos \beta \eta + A_4 \sin \beta \eta) \sin m \pi \xi \quad (1)$$

식 (1)에서 α 와 β 는 식 (2)와 같이 정의되며⁽⁴⁾, $A_i, i=1,2,3,4$ 는 판의 경계조건에 따라 결정되는 상수

이다.

$$\alpha, \beta = \left(\frac{m\pi Q_2}{\lambda} \right) \sqrt{\pm 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{Q_1}{Q_2} \right)^4 \left\{ 1 - k \left(\frac{\lambda}{mQ_1} \right)^2 \right\}}} \quad (2)$$

또한, 그림 1과 같은 판의 좌굴응력은 다음과 같이 정의된다^(2, 3).

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 \sqrt{E_{11} E_{22}}}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \left(\frac{b}{t} \right)^2} \quad (3)$$

식 (3)의 오른쪽 항에서 좌굴계수 k 를 제외한 나머지 항은 판의 치수와 재료의 역학적 성질이 주어지면 알 수 있는 상수이므로 판의 경계조건에 따른 좌굴계수만 구하면 좌굴응력은 쉽게 구할 수 있다.

하중이 재하되지 않은 변의 경계조건에 따른 조건식은 표 1과 같으며, 위에서 정의된 처짐식을 표 1의 경계조건에 대입하여 구한 다양한 경계조건을 갖는 판의 좌굴해석식은 표 2와 같다.

표 1. 직교이방성판의 경계조건식

경계조건	조건식
단순지지	$w=0, M_y = -\frac{D_{22}}{b^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\nu_{12}}{\lambda^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) = 0$
자유단	$V_y = -\frac{1}{b^3} \left(D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right) = 0$ $M_y = -\frac{D_{22}}{b^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\nu_{12}}{\lambda^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) = 0$
고정지지	$w=0, \theta_y = \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$
대칭면	$\theta_y = \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$ $V_{y(s,m)} = -\frac{1}{b^3} \left(D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right) = 0$

표 2. 직교이방성판의 특성방정식

경계조건	특성방정식
S-S	$SS = (\alpha^2 + \beta^2) \sinh \alpha \sin \beta$
F-F	$FF = -[2\alpha\beta(1 - \cosh \alpha \cos \beta) + (\alpha^2 - \beta^2) \sinh \alpha \sin \beta]$
S-Fr	$SFr = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha \psi^2 \cosh \alpha \sin \beta - \beta \chi^2 \sinh \alpha \cos \beta)$
F-Fr	$FFr = 2\alpha\beta\chi\psi + \alpha\beta(\chi^2 + \psi^2) \cosh \alpha \cos \beta + (\beta^2 \chi^2 - \alpha^2 \psi^2) \sinh \alpha \sin \beta$
S-Sy	$SSy = -\left[\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) \cosh \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right]$
F-Sy	$FSy = \alpha\beta \left(\alpha \sinh \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \beta \cosh \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right)$
χ, ψ	$\chi = \alpha^2 - \nu_{12} \left(\frac{m\pi}{\lambda} \right)^2, \quad \psi = \beta^2 + \nu_{12} \left(\frac{m\pi}{\lambda} \right)^2$

따라서, 표 2의 좌굴해석식을 0 이라고 놓고 수치해석적인 방법으로 풀면 다양한 경계조건을 갖는 판의 좌굴응력을 구하기 위한 좌굴계수 k 를 얻을 수 있다.

2.2 에너지법에 의한 직교이방성판의 좌굴

그림 1과 같은 직교이방성판의 내부에 축적된 변형에너지 (U)와 외력이 한 일 (T)은 다음과 같이 정의된다^(3, 5).

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{11}\nu_{21} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (4)$$

$$T = \frac{N_x}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (5)$$

따라서, 식 (4)와 (5)에 에너지보존법칙 ($U=T$)을 적용하여 식 (3)과 같이 좌굴응력에 대해 정리하면 좌굴계수 k 는 다음과 같이 구해진다.

$$k = \frac{C_1}{\phi^2} + C_2 \phi^2 + C_3 \quad (6)$$

식 (6)에서 $C_i, i=1,2,3$ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$C_1 = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} m^2 B_1 \quad (7a)$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} \frac{b^4}{m^2 \pi^4} B_3 \quad (7b)$$

$$C_3 = \frac{b^2}{\pi^4} \left\{ \frac{4(1-\nu_{12}\nu_{21})G_{12}}{\sqrt{E_{11}E_{22}}} B_4 - 2\nu_{21} \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} B_2 \right\} \quad (7c)$$

식 (7)에서 B_i 는 다음과 같이 정의되며 $f(y)$ 는 판의 y 축 방향의 처짐모양을 나타내는 처짐곡선식이다.

$$B_1 = \frac{\int_0^b \{f(y)\}^2 dy}{\int_0^b \{f(y)\}^2 dy} \quad (8a)$$

$$B_2 = \frac{\int_0^b \left\{ f(y) \left(\frac{d^2 f(y)}{dy^2} \right) \right\} dy}{\int_0^b \{f(y)\}^2 dy} \quad (8b)$$

$$B_3 = \frac{\int_0^b \left\{ \frac{d^2 f(y)}{dy^2} \right\}^2 dy}{\int_0^b \{f(y)\}^2 dy} \quad (8c)$$

$$B_4 = \frac{\int_0^b \left\{ \frac{df(y)}{dy} \right\}^2 dy}{\int_0^b \{f(y)\}^2 dy} \quad (8d)$$

따라서 판의 경계조건을 만족하는 처짐식을 가정한 후 y 축 방향에 대한 처짐곡선식으로부터 B_i 를 구하고, 이 값을 사용하여 C_i 를 구하면 임의의 경계조건을 갖는 판의 좌굴계수 k 를 식 (6)을 사용하여 구할 수 있다.

2.3 근사식의 유도

에너지법에 의해 구해진 판의 최소좌굴계수는 가정한 판의 y 축 방향의 처짐곡선식이 정확하지 않으면 정밀해법에 의해 구한 결과와 상당한 차이를 나타낼 수 있다⁽⁶⁾. 따라서, 이러한 오차가 발생하는 문제를 해결하고 판의 최소좌굴계수를 간단하면서도 정확하게 구할 수 있는 근사식의 유도과정을 설명하면 다음과 같다.

앞에서 설명한 바와 같이 판의 좌굴계수는 식 (6)과 같이 나타낼 수 있으며, k 의 최소값을 찾기위해 식 (9)를 ϕ 에 대해 미분하여 정리하면 식 (10), (11)과 같이 ϕ 및 k_{min} 을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial k}{\partial \phi} = 0 \quad (9)$$

$$\phi = \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (10)$$

$$k_{min} = 2\sqrt{C_1 C_2} + C_3 \quad (11)$$

따라서, 역으로 k 가 최소가 될 때의 ϕ 값 및 k_{min} 을 알면 C_1, C_2 및 C_3 를 구할 수 있다.

k 가 최소가 될 때의 ϕ 값 및 k_{min} 은 정밀해법에 의한 좌굴해석식을 통해 구할 수 있으므로 이 값

을 사용하여 $y=0$, b 인 변이 다양한 경계조건을 갖는 등방성 및 직교이방성판의 좌굴계수 k 에 대한 $C_i, i=1,2,3$ 및 k_{min} 을 근사적으로 구하면 표 3과 같다. 여기서 나타낸 판의 근사식은 이미 발표된 것으로⁽⁷⁾ 본 연구에서는 그 결과만을 사용하였다.

표 3. 근사식에 의한 C_i 값

경계조건	등방성판 ($E=29,000$ ksi, $\nu=0.3$)			
	C_1	C_2	C_3	k_{min}
S-S	1.000	1.000	2.000	4.000
S-Fr	1.000	0.000	0.456	0.456
F-F	1.000	5.238	2.394	6.971
F-Fr	1.000	0.141	0.578	1.329
경계조건	직교이방성판 ($E_{11}=2,500$ ksi, $E_{22}=1,000$ ksi, $G_{12}=425$ ksi, $\nu=0.3$)			
	C_1	C_2	C_3	k_{min}
S-S	1.581	0.633	1.445	3.446
S-Fr	1.581	0.000	0.313	0.313
F-F	1.581	3.284	1.748	6.305
F-Fr	1.581	0.085	0.405	1.138

3. I형 단면 압축재의 국부좌굴

그림 2는 등분포일축압축력을 받는 I형 단면 압축재로서 복부를 1번판, 양 쪽 플랜지를 각각 2번판, 3번판 이라고 정의한다.

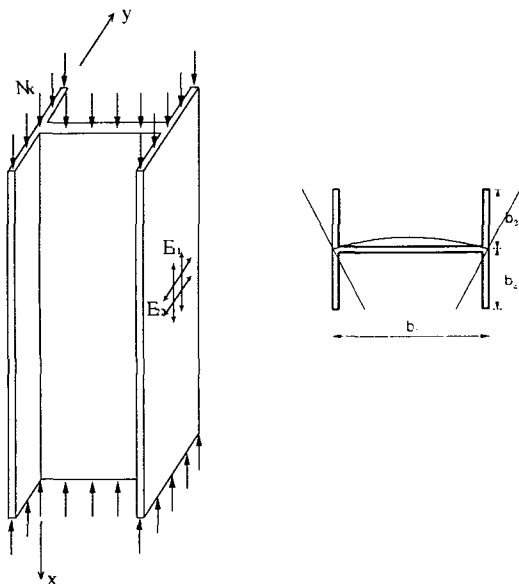


그림 2. 등분포일축압축력을 받는 I형 단면 압축재

그림 2와 같이 여러 개의 판요소로 이루어진 압축재의 국부좌굴 거동을 해석하기 위해서는 고전적 판이론에 따른 기본가정 외에 접합부에서의 가정사항이 다음과 같이 도입되어야 한다⁽⁸⁾.

- (1) 접합부에서 판요소들의 면외처짐은 발생하지 않는다.
- (2) 판요소들은 서로 강접합되어 있으므로 접합부에서 판요소들의 처짐각은 서로 같다.
- (3) 접합부에서 각 판요소에 작용하고 있는 모멘트의 총합은 0이다.

이와 같은 접합부에서의 가정사항을 고려하여 그림 2와 같은 압축재의 각 판요소의 경계조건을 간단히 나타내면 다음과 같다.

표 4. I형 단면 압축재를 이루는 각 판요소의 $y=0$, b 인 변의 경계조건

	경계조건
plate1 (대칭면)	$\theta_y=0, V_y=0$
plate2 (자유단)	$V_y=0, M_y=0$
plate3 (자유단)	$V_y=0, M_y=0$
접합부	$w_{y1}=0, w_{y2}=0, w_{y3}=0$ $\theta_{y1}=\theta_{y2}, \theta_{y2}=\theta_{y3}, \sum M_{y(1,2,3)}=0$

따라서, 각 판요소의 처짐식을 식 (1)을 사용하여 정의하고 표 4의 경계조건에 대입하면 $A_i, i=1,2,3,4$ 에 대한 제차선형연립방정식이 얻어진다. 이 식을 행렬 형태로 정리한 후 0이 아닌 계수를 얻기 위해 계수행렬의 행렬값이 0이 되어야 한다는 조건을 적용하면 직교이방성 I형 단면 압축재에 대한 국부좌굴해석식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\left(\frac{SS_y}{FS_y}\right)_1 + \frac{1}{\delta_2 \omega_2^3} \left(\frac{SFr}{FFr}\right)_2 + \frac{1}{\delta_3 \omega_3^3} \left(\frac{SFr}{FFr}\right)_3 = 0 \quad (12)$$

식 (12)에서 양쪽 플랜지가 대칭일 경우 식 (13)과 같이 간략화 할 수 있다.

$$\left(\frac{SS_y}{FS_y}\right)_1 + \frac{2}{\delta_2 \omega_2^3} \left(\frac{SFr}{FFr}\right)_2 = 0 \quad (13)$$

4. 국부좌굴 주도요소 판별

본 절에서는 구조재에 압축력이 작용하여 국부 좌굴이 발생할 경우 좌굴을 주도하는 판요소를 판별하는 방법을 제시한다.

압축재를 이루는 판요소의 좌굴응력을 식 (3)과 같이 정의한 후 국부좌굴이 발생할 경우 각 판요소의 좌굴응력이 같다는 조건을 적용하면 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$\frac{k_2}{k_1} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \quad (14)$$

또한 1번판과 2번판의 좌굴계수식은 앞에서 유도한 근사식을 사용하여 각각 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$k_1 = \frac{C_{11}}{\phi_1^2} + C_{12}\phi_1^2 + C_{13} \quad (15 a)$$

$$k_2 = \frac{C_{21}}{\phi_2^2} + C_{22}\phi_2^2 + C_{23} \quad (15 b)$$

여기서 ϕ_i 는 각 판의 길이와 폭의 비로서 다음과 같다.

$$\phi_1 = \frac{a}{b_1}, \quad \phi_2 = \frac{a}{b_2} \quad (16 a, b)$$

판요소간의 두께비와 폭비를 식 (17)과 같이 정의하면 2번판의 형상비를 식 (18)과 같이 쓸 수 있다.

$$s_t = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2, \quad s_b = \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \quad (17 a, b)$$

$$\phi_2^2 = \frac{\phi_1^2}{s_b} \quad (18)$$

따라서, 식 (15)~(18)을 식 (14)에 대입하면 다음 식이 구해진다.

$$\left(\frac{C_{11}}{\phi_1^2} + C_{12}\phi_1^2 + C_{13}\right)s_t s_b = \frac{s_b C_{21}}{\phi_1^2} + \frac{C_{22}\phi_1^2}{s_b} + C_{23} \quad (19)$$

식 (19)에서 ϕ_1^2 를 X 라 정의하고 각 항에 X 를 곱하여 X 에 대한 내림차순으로 정리하면 다음과 같은 X 에 대한 2차방정식이 유도된다.

$$AX^2 + BX + C = 0 \quad (20)$$

여기서, A, B, C 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= s_t s_b C_{12} - \frac{C_{22}}{s_b} \\ B &= s_t s_b C_{13} - C_{23} \\ C &= s_t s_b C_{11} - r_b C_{21} \end{aligned} \quad (21 a, b, c)$$

식 (20)의 근은 플랜지와 복부가 동시에 좌굴을 일으킬 경우 복부의 형상비를 의미한다. 따라서 ϕ_1^2 를 식 (15 a)에 대입하면 플랜지와 복부가 동시에 좌굴을 일으킬 경우 복부의 최소좌굴계수를 구할 수 있다.

그림 3은 I형 단면 압축재에 대해서 식 (13)을 사용하여 플랜지와 복부의 두께비와 폭비에 따른 복부의 최소좌굴계수를 구하고, 식 (17)~(20)을 반복하여 플랜지와 복부가 동시에 좌굴을 일으킬 경우 복부의 최소좌굴계수를 구하여 그래프로 나타낸 것이다.

그림 3의 (b)는 등방성 재료의 역학적 성질을 유도된 좌굴해석식에 대입하여 해석한 것으로서 이 결과는 기존문헌⁽⁷⁾의 결과와 잘 일치하였다.

그림 3에서 점선으로 나타낸 곡선은 플랜지와 복부가 동시에 좌굴을 일으킬 경우를 나타낸 것으로서 최소좌굴계수 및 구조재의 두께비와 폭비의 관계로 표현된다. 따라서, 플랜지와 복부의 두께비 및 폭비를 알면 플랜지와 복부중 어느 판요소가 먼저 좌굴을 일으킬 것인지를 판별할 수 있다.

5. 결론

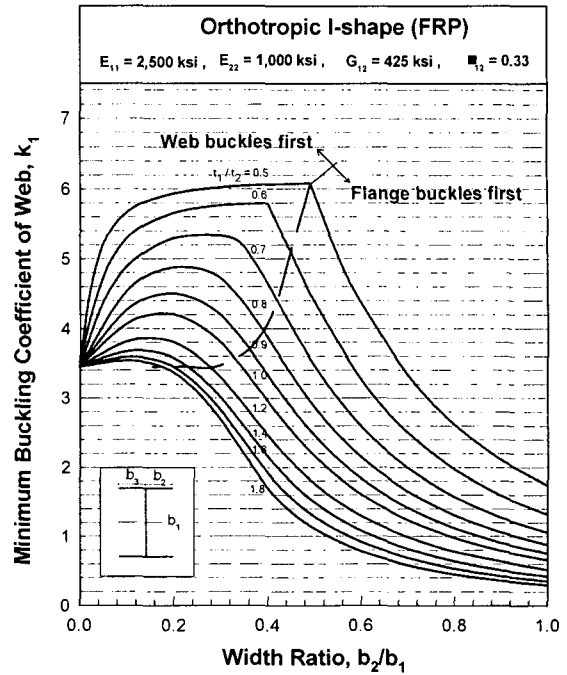
본 연구에서는 직교이방성 I형 단면 압축재의 국부좌굴 해석을 수행하기 위해 다양한 경계조건을 갖는 직교이방성판의 좌굴해석식을 정밀해법과 에너지법으로 유도하였다. 또한 높은 정확도를 가지면서도 쉽게 좌굴응력을 구할 수 있도록 에너지법에 의한 좌굴해석식과 유사한 형태의 근

사식을 유도하였다.

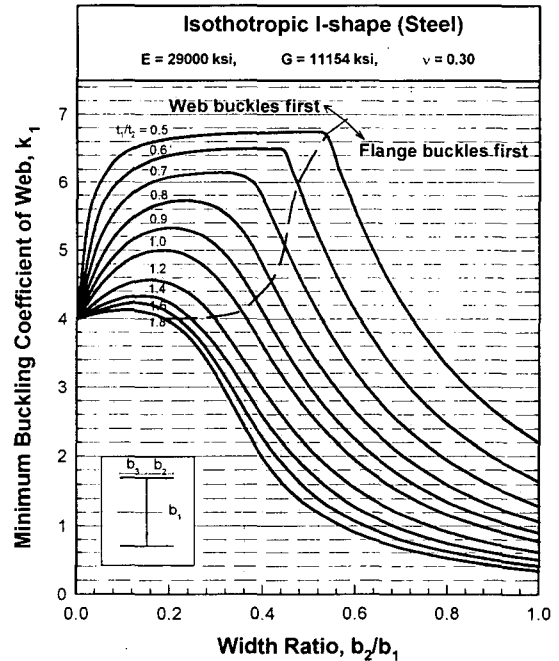
정밀해법을 사용하여 직교이방성 I형 단면 압축재의 국부좌굴해석식을 유도하였으며, 이 식을 사용하여 플랜지와 복부의 임의의 두께비에 대해 폭비를 변화시켜가며 복부의 최소국부좌굴계수를 구하여 그래프로 나타내었다. 또한 판요소 하나에 대해 유도된 근사식을 적용하여 플랜지와 복부가 동시에 좌굴을 일으킬 경우 복부의 최소국부좌굴계수를 구하여 그림 3의 그래프 위에 이 값을 점선으로 나타내었다. 등방성 재료의 경우도 동일한 방법으로 해석한 결과 기존문헌⁽⁷⁾의 결과와 일치함을 확인하였다.

참고문헌

- (1) 윤순중, 채수하, "직교이방성 판 요소로 구성된 개방단면 압축단주의 좌굴 강도", 대한토목학회 논문집, 11월, pp. 693-703, 1996.
- (2) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1963.
- (3) Lekhnitskii, S.G., *Anisotropic Plates*, S.W. Tsai and T. Cheron (Trans.), Gordon and Breach, 2nd printing, New York, 1984.
- (4) Yoon, S.J., *Local Buckling of Pultruded I-Shape Column*, Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Ga., 1993.
- (5) Whitney, J. M., *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, Technomic Publishing Co. Inc., Pennsylvania, 1987.
- (6) 윤순중, 채수하, "직교이방성 압축재의 국부좌굴에 대한 판요소들의 탄성구속효과", 대한토목학회 논문집, 3월, pp. 203-214, 1999.
- (7) 윤순중, 문환두, 이원복, "직교이방성 박판부재의 국부좌굴 관련 설계기준에 관한 연구", 대한토목학회 논문집, 5월, pp. 533-544, 1995.
- (8) Bulson, P. S., *The Stability of Flat Plates*, American Elsevier Publishing Company Inc., New York, 1969.



(a) 직교이방성 압축재



(b) 등방성 압축재

그림 3. I형 단면 압축재의 복부의 최소좌굴계수와 폭과 길이의 비의 관계