

# 면내 선형분포하중을 받는 고정지지된 직교이방성판의 좌굴

정재호\* · 채수하\* · 남정훈\*\* · 윤순중\*\*\*

## Buckling of Fixedly Supported Orthotropic Plate under In-plane Linearly Distributed Forces

Jung, J. H., Chae, S. H., Nam, J. H., and Yoon, S. J.

**Key Words:** elastic buckling, orthotropic, Rayleigh-Ritz method, buckling coefficient

### Abstract

This paper presents the results of an elastic buckling analysis of orthotropic plate under in-plane linearly distributed forces. The analytical solution for the orthotropic plate whose boundaries were assumed to be simply supported was derived in the previous work. In this study the loaded edges of plate are assumed to be simply supported and other two edges are assumed to be fixed. For the buckling analysis Rayleigh-Ritz method is employed. Graphical form of results for finding the elastic buckling strength of orthotropic plate under in-plane linearly distributed forces is presented.

### 기호설명

|                      |                        |
|----------------------|------------------------|
| $E_{11}, E_{22}$     | 재료의 성질방향 1과 2에 대한 탄성계수 |
| $G_{12}$             | 전단탄성계수                 |
| $k_b$                | 판의 좌굴계수                |
| $U$                  | 판의 내부에 축적된 변형에너지       |
| $T$                  | 외력이 판에 대해 한 일          |
| $t$                  | 판의 두께                  |
| $x, y$               | 직교좌표계                  |
| $\nu_{12}, \nu_{21}$ | 재료의 성질방향 1과 2에 대한 프아송비 |
| $\phi(=a/b)$         | 판의 길이와 폭의 비            |
| $\Pi$                | 총포텐셜에너지                |

### 1. 서론

펄트루전공정(pultrusion process)에 의해 생산된 섬유보강플라스틱 구조재는 생산공정의 특성상

직교이방성으로 간주되어지며 재료 자체의 여러 가지 장점(경량, 비전도 및 비자성, 고강도 등)으로 인해 최근 건설분야에서 사용되기 시작하고 있다. 그러나, 보편화된 설계기술이 확립되지 않은 것이 문제점으로 지적되고 있으므로 재료의 특성뿐만 아니라 단기 및 장기하중 하에서의 부재 또는 구조물의 거동에 대한 광범위한 연구가 필요하다<sup>(1)</sup>.

구조용 부재는 대부분 여러 개의 판요소로 구성되어 있으며, 이러한 구조재의 설계에 있어서 각 판요소의 단면치수(폭과 두께의 비)는 국부좌굴에 의해 결정된다<sup>(2)</sup>. 그러므로, 직교이방성 판요소로 구성된 부재의 설계규준의 확립을 위해서는 구조재의 좌굴에 관한 연구가 필수적이라 할 수 있다.

본 연구에서는 면내 선형분포하중을 받는 직교이방성판의 좌굴해석식을 Rayleigh-Ritz법을 사용하여 유도하였으며, 하중의 분포를 변화시켜가며 판의 길이와 폭의 비에 따른 좌굴계수를 구해 그래프로 제시하였다.

본 연구에서 판의 하중이 재하되는 두 변은 단 순지지된 것으로 가정하였으며, 다른 두 변은 고정지지된 것으로 가정하였다.

\* 홍익대학교 대학원 토목공학과 박사과정  
\*\* 홍익대학교 대학원 토목공학과 석사과정  
\*\*\* 홍익대학교 토목공학과 교수

## 2. 에너지법에 의한 기본방정식

그림 1은 면내 선형분포하중을 받는 직교이방성판성판을 나타낸 것으로 서론에서 언급한 것과 같이 하중이 재하되는 두 변은 단순지지되어 있으며, 다른 두 변은 고정지지되어 있다.

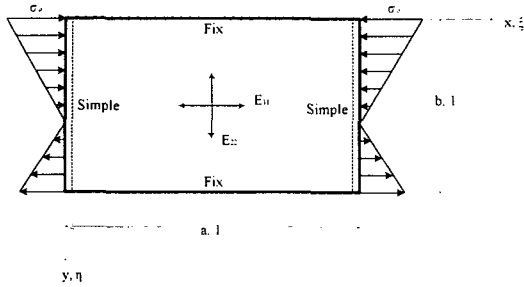


그림 1. 면내 선형분포하중을 받는 직교이방성판

그림 1에서 판에 작용하는 면내 선형분포하중은 다음 식 (1)과 같이 나타낼 수 있으며 임의의 상수  $c$ 값에 따른 하중분포는 그림 2와 같다.

$$\sigma = \left(1 - \frac{c}{b} y\right) \sigma_0 \quad (1)$$

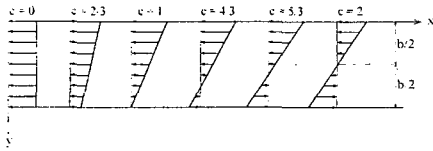


그림 2.  $c$ 값의 변화에 따른 면내 하중의 분포형태

직교이방성 판이론에 따르면 그림 1과 같은 직교이방성판에 좌굴이 발생할 경우 판의 내부에 축적된 변형에너지( $U$ )와 식 (1)과 같은 외력이 판에 대해 한 일은 다음과 같다<sup>(3)</sup>.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu_{21} D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{2} \sigma_0 t \int_0^b \int_0^a \left(1 - \frac{c}{b} y\right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (3)$$

식 (2)에서  $D_{11}$ 과  $D_{22}$  및  $D_{66}$ 는 각각 재료의 성질방향 1과 2에서의 휨강성과 비틀림강성으로써 다음과 같이 정의된다.

$$D_{11} = \frac{E_{11} t^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (4a)$$

$$D_{22} = \frac{E_{22} t^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (4b)$$

$$D_{66} = \frac{G_{12} t^3}{12} \quad (4c)$$

총포텐셜에너지(total potential energy,  $\Pi$ )는 다음과 같이 정의된다.

$$\Pi = U + T \quad (5)$$

따라서, 식 (2)와 (3)을 식 (5)에 대입하면 그림 1과 같은 판의 총포텐셜에너지를 구할 수 있다.

## 3. 고정지지된 판의 좌굴

본 연구에서는 그림 1과 같은 직교이방성판의 좌굴해석식을 Rayleigh-Ritz법을 사용하여 유도하였다.

Rayleigh-Ritz법을 사용하여 좌굴해석을 수행하기 위해서는 먼저 판의 경계조건을 만족하는 처짐식을 가정하여야 한다. 본 연구에서는 그림 1과 같은 판의 처짐식을 다음과 같이 가정하였다<sup>(4)</sup>.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \left\{ \sin \frac{n\pi y}{b} + C_n y^3 + D_n y^2 + E_n y \right\} \quad (6)$$

여기서,  $A_{mn}$ 은 처짐량을 나타내는 상수이며, 계수  $C_n$ ,  $D_n$ , 및  $E_n$ 은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$C_n = -\frac{\pi n}{b^3} \{1 + (-1)^n\} \quad (7a)$$

$$D_n = \frac{2\pi n}{b^2} \{2 + (-1)^n\} \quad (7b)$$

$$E_n = -\frac{\pi n}{b} \quad (7c)$$

그림 1과 같은 판의 좌굴응력은 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_{cr} = k_b \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}{b^2 t} \quad (8)$$

식 (8)에서 좌굴계수  $k_b$ 를 제외한 나머지 항은 판의 치수와 재료의 성질만 주어지면 알 수 있는 상수이므로 판의 좌굴응력은 좌굴계수만 알면 쉽게 구할 수 있다.

따라서, 가정한 판의 처짐식과 좌굴응력식을 식 (5)에 대입하면, 그림 1과 같은 직교이방성판의 총포텐셜에너지는 판의 좌굴계수  $k_b$ 와 길이와 폭의 비  $\phi$ 의 함수로 구해진다.

최소포텐셜에너지원리(the principle of stationary potential energy)에 따르면  $A_{mn}$ 은 총포텐셜에너지가 최소가 되도록 결정되어야 한다<sup>(5)</sup>.

Rayleigh-Ritz법을 적용하여 총포텐셜에너지를  $A_{mn}$ 에 대해 최소화한 후 간단히 나타내면 다음과 같다.

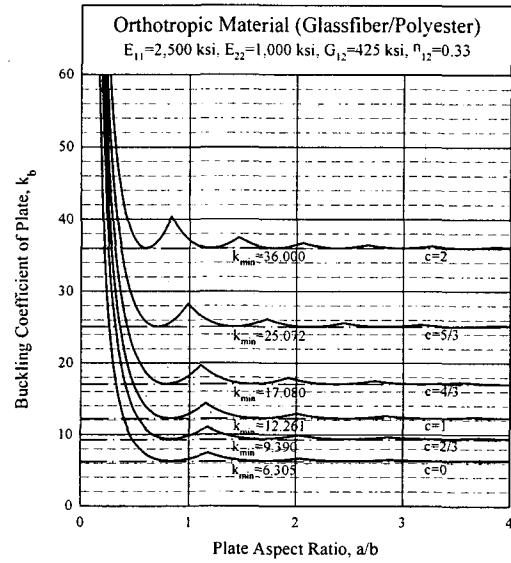
$$\begin{aligned} & A_{mn} \left\{ Q_{mn} - k_b \phi^2 m^2 \alpha'_{mn} \right\} + c k_b \phi^2 m^2 \left( \frac{1}{4} + \rho_{nn} \right) \\ & + \sum_{p=\text{even}} A_{mp} \left\{ (Q_{mpp} - k_b \phi^2 m^2 \alpha_{np}) + c k_b \phi^2 m^2 \rho_{np} \right\} \quad (9) \\ & + \sum_{p=\text{odd}} A_{mp} c k_b \phi^2 m^2 (\rho_{np} + \epsilon_{np}) = 0 \end{aligned}$$

식 (9)는  $m$ 과  $n$ 의 조합에 의해  $A_{mn}$ 에 대한 제차선형연립방정식으로 전개되며  $A_{mn}$ 이 0이 아닌 해를 갖기 위해서는 계수행렬의 행렬값이 0이 되어야 한다. 이 조건을 적용하여 행렬을 조합한 후 수치해석적인 방법을 도입하면 두 변이 고정 지지된 직교이방성판의 좌굴계수를 구할 수 있다. 식 (9)에 사용된 계수들은 부록에 수록하였다.

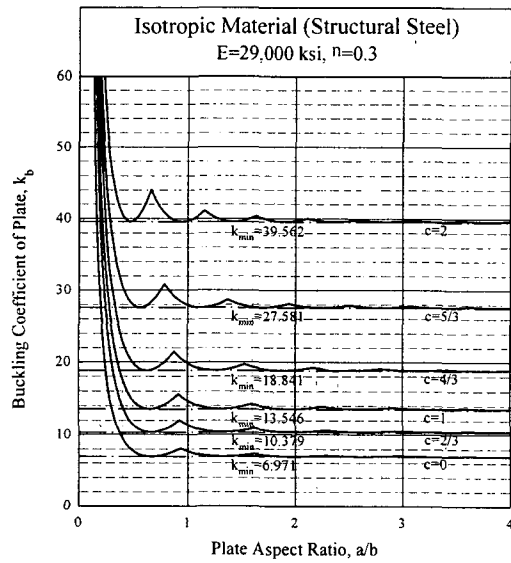
본 연구에서는 임의의  $m$ 에 대해 10개의  $n$ 항을 고려하여 좌굴해석을 수행하였으며, 판의 형상비 ( $a/b$ )에 따른 좌굴계수를 구한 결과는 그림 3과 같다.

그림 3의 (a)는 유도된 좌굴해석식에 현재 미국에서 생산하여 사용중에 있는 직교이방성 재료<sup>(6)</sup>의 역학적 성질을 대입하여 해석한 결과이며, (b)는 유도된 좌굴해석식의 이론적 타당성을 검증하기 위하여 등방성 재료인 구조용 강재의 역학적 성질을 대입하여 해석한 결과이다. 등방성판에 대한 해석결과는 기존 문헌의 결과<sup>(7)</sup>와 잘 일치하였다. 따라서, 유도된 좌굴해석식은 이론적으로

타당함을 알 수 있다.



(a) 직교이방성판



(b) 등방성판

그림 3. 두 변이 고정지지된 판의 좌굴계수

#### 4. 결론

본 연구에서는 하중이 재하되지 않은 두 변이 고정지지되어 있고 면내 선형분포하중을 받는 직교이방성판의 좌굴해석식을 Rayleigh-Ritz법을 사

용하여 유도하였으며, 유도된 좌굴해석식을 사용하여 하중분포의 변화에 따른 판의 좌굴계수를 구해 그래프로 제시하였다.

판요소로 구성된 구조재의 각 판요소는 변의 구속조건에 따라 보강판요소(stiffened element)와 비보강판요소(unstiffened element)로 구분된다<sup>(2)</sup>. 보강판요소의 경우 인접판요소에 의해 탄성구속되어 있으므로 접합부의 경계조건의 한계상태는 회전에 대해 단순지지와 고정지지된 것으로 간주할 수 있다<sup>(8)</sup>.

따라서, 기존 구조용 강재의 경우 보강판요소의 단면치수에 대한 설계규준은 인접판요소와의 접합부의 경계조건이 단순지지인 경우와 고정지지인 경우의 좌굴해석결과를 사용하여 규정하고 이를 실제 설계에 적용하고 있는 실정이다<sup>(2)</sup>.

직교이방성판에 대해서도 이미 수행된 하중이 재하되지 않는 두 변이 단순지지인 경우에 대한 좌굴해석결과와 본 연구에서 수행된 하중이 재하되지 않는 두 변이 고정지지인 경우의 좌굴해석결과를 사용한다면 구조재의 보강판요소에 대한 설계규준을 확립하는데 도움이 될 수 있을 것으로 판단된다.

### 참고문헌

- (1) Yoon, S.J., Local Buckling of Pultruded I-Shape Columns, *Ph.D. Thesis*, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Ga., 1993.
- (2) Salmon, C.G. and Johnson, J.E., *Steel Structures, Design and Behavior*, 3rd ed. Harper and Row, Publishers, Inc., New York, 1990.
- (3) Lekhnitskii, S.G., *Anisotropic Plates*, S.W. Tsai and T. Cheron (Trans.), Gordon and Breach, 2nd printing, New York, 1984.
- (4) Rockey, K. C. and Leggett, D. M. A., "The buckling of a plate girder web under pure bending when reinforced by a single longitudinal stiffener," *Proceedings of Institution of Civil Engineers*, Vol. 21, pp.161-188, 1962.
- (5) Chajes, A., *Principles of structural stability theory*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1974.
- (6) Bulson, P. S., *The stability of flat plates*, American Elsevier Publishing Company Inc., New York, 1969.

(7) Strongwell, *Extren Design Manual*, Strongwell, Bristol, Virginia, 1997.

(8) 채수하, "직교이방성 단주의 해석에 관한 연구," *홍익대학교 석사학위논문*, 1994.

### 부록

Parameters:

$$\alpha_{ij} = ij\pi^2 \left\{ \frac{1}{105} - \frac{(-1)^i}{140} - \frac{(-1)^j}{140} + \frac{(-1)^{i+j}}{105} \right\} - \frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{i}{j^3} + \frac{j}{i^3} \right\} \{2 + (-1)^i + (-1)^j + 2(-1)^{i+j}\}$$

$$\beta_{ij} = \left\{ \frac{2}{15} - \frac{(-1)^i}{30} - \frac{(-1)^j}{30} + \frac{2(-1)^{i+j}}{35} \right\} - \frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{j^2} + \frac{1}{i^2} \right\} \{2 + (-1)^i + (-1)^j + 2(-1)^{i+j}\}$$

$$\chi_{ij} = -\frac{2}{ij\pi^2} \{2 + (-1)^i + (-1)^j + 2(-1)^{i+j}\}$$

$$\alpha'_{ii} = \frac{1}{2} + \alpha_{ii}, \quad \beta'_{ii} = \frac{1}{2} + \beta_{ii}, \quad \chi'_{ii} = \frac{1}{2} + \chi_{ii}$$

$$\epsilon_{ij} = -\frac{4}{\pi^2} \frac{ij}{(i^2 - j^2)^2}$$

$$\rho_{ij} = ij\pi^2 \left\{ \frac{1}{280} - \frac{(-1)^i}{280} - \frac{(-1)^j}{280} + \frac{(-1)^{i+j}}{168} \right\} + \frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{i}{j^3} + \frac{j}{i^3} \right\} \{1 - 3(-1)^{i+j}\} - \frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{i(-1)^j}{j^3} + \frac{j(-1)^i}{i^3} \right\} - \frac{24}{\pi^2} \left[ \frac{i}{j^5} \{1 + (-1)^i - (-1)^j - (-1)^{i+j}\} + \frac{j}{i^5} \{1 - (-1)^i + (-1)^j - (-1)^{i+j}\} \right]$$

$$Q_{mn} = \alpha'_{nn} m^4 \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + 2\nu_{21} \phi^2 \beta'_{nn} m^2 n^2 \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + \phi^4 \chi'_{nn} n^4 \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} + 4\phi^2 \beta'_{nn} m^2 n^2 \frac{G_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_{11}E_{22}}}$$

$$Q_{mnp} = \alpha_{np} m^4 \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + 2\nu_{21} \phi^2 \beta_{np} m^2 n p \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + \phi^4 \chi_{np} n^2 p^2 \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} + 4\phi^2 \beta_{np} m^2 n p \frac{G_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_{11}E_{22}}}$$