

마찰열을 고려한 미끄럼 접촉시 내부 복수 수평균열 전파해석

이진영 · 김석삼*

경북대학교 기계공학과 대학원, *경북대학교 기계공학부

Thermoelastic Finite Element Analysis of Multiple horizontal Subsurface Cracks Due to Sliding Surface Traction

Jin-Young Lee, Seock-Sam Kim*

Graduate School, Department of Mechanical Engineering,
Kyungpook National University, Taegu, Korea

*Department of Mechanical engineering, Kyungpook National Univ. Taegu, Korea

Abstract- A linear elastic fracture mechanics analysis of multifurcated subsurface cracks propagation in a half-space subjected to moving thermomechanical surface traction was performed using the finite element method. The effect of frictional heat at the sliding surface on the crack growth behavior is analyzed in terms of the thermal load and Peclet number. The crack propagation direction is predicted in light of the magnitudes of the maximum shear and tensile stress intensity factor ranges. When moving thermomechanical surface traction exists, subsurface horizontal cracks are propagation in-plane crack growth rate at the beginning but they are propagation out-of-plane crack growth rate by the frictional heat which is occurrence by the repeated sliding contact.

Key words : Linear elastic fracture mechanics, Subsurface cracks, Frictional heat
Finite element method, Crack propagation, Stress intensity factor,

1. 서론

두 물체가 서로 접촉하여 상대운동이 일어날 경우에 두 물체 상호간의 마찰에 의해 많은 마찰열이 발생한다. 마찰열은 유용하게 이용되는 경우도 있으나 대부분의 경우 기계 요소의 약화, 변형, 파괴등을 일으킨다. 접촉부에서 발생하는 마찰열은 실제로 진실접촉부에서 발생한 것이며 국부적으로 상당히 높은 온도(flash temperature)까지 도달하게 된다. 그래서

진실접촉부와 그 주변에는 온도구배가 크게 되어 높은 열응력이 발생한다.

표면손상과 균열진전에 대한 파괴역학적 연구는 실험의 어려움으로 인하여 여러 연구자들의 이론적인 연구결과가 많이 발표되었다.

S_{ih} 는 열응력과 기계적응력은 $r=0$, 즉 균열선단에서 특이성이 존재하며 그 응력의 크기는 thermomechanical surface

traction의 위치에 의존한다고 하였다. 또, 응력의 주기적인 변화가 균열성장의 구동력이라고 하였다[1].

Suh등은 재료의 마멸이 진행되는 중에 표면근처에서는 전위가 발생되고, 계속되는 미끄럼 접촉하에서의 전위의 축적에 의해 보이드가 생겨 서로 연결되어 표면에 수평한 방향으로 균열이 생성된다고 하였다 [2-3]. 이 이론이 제기된 이후 표면 내부의 균열의 파괴기구를 밝히기 위한 많은 연구가 있었다.

Kulkarni등은 롤링과 미끄럼 접촉하에 있는 탄소성 반무한체의 thermomechanical 응력해석을 수행하여 표면하의 인장잔류응력이 균열발생을 촉진시킨다고 하였다[4].

Sekine는 반무한체에 부분적으로 열이 가해질 때 K_I 과 K_{II} 는 열이 가해지는 표면부의 폭과 균열길이의 비에 의존한다고 하였다[5].

Goshima와 Keer등은 heated rigid cylinder가 표면균열을 가진 반무한체 위를 구름접촉을 할 때, 인장모드에 의한 균열성장은 균열이 실린더의 앞쪽에 있을 때 발생하며, 전단모드에 의한 균열성장은 contact edge가 균열선단 바로 위에 있을 때 주로 일어난다고 보고하였다[6].

Cho는 유한요소를 이용하여 표면내 수평 균열의 K_I 과 K_{II} 변화를 마찰계수, Peclet number, 균열길이와 깊이의 비를 변화시켜 가며 마찰열을 고려한 선형탄성파괴역학적 해석을 수행했으며, K_I 과 K_{II} 의 변동폭으로 균열성장의 방향을 제시하였다[7].

그러나 이상과 같은 연구들은 단일균열에 대해서만 해석을 수행하였다. 하지만 실제로 재료내부에는 수많은 균열이 존재하고 있으므로 균열상호간에 영향에 관한 연구가 필요하다. 이에 본 연구는 과학기

술 전반에 통용되고 있는 수치해석 방법인 유한요소법을 이용하여 내부 복수 수평균열이 존재하는 반무한체 표면 위를 돌기가 미끄럼 접촉을 하는 모델을 설정하여 Peclet number를 고정시키고 열하중 (Thermal load)을 변화시켜 가며 선형탄성 파괴역학적 해석을 수행하였다. 그리고 최대 응력확대계수의 변동폭으로 균열전파의 방향을 예측하고자 한다.

2. 문제 해석

2.1 해석 모델 및 좌표계

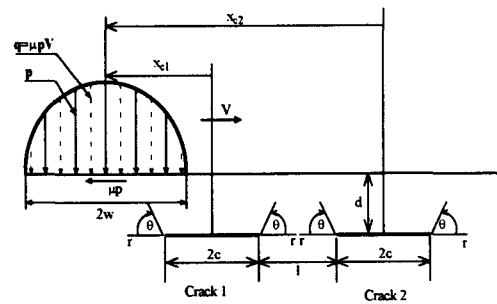


Fig. 1 Coordinate and pertinent nomenclature of asperity contact and subsurface horizontal cracks

두 물체간의 접촉현상은 미시적인 관점에서 볼 때 미소 돌기간의 접촉과 그 상호작용의 결과라고 할 수 있다. 일반적으로 실제 사용되는 재료의 내부에는 수많은 균열이 존재하고 있으며 이들은 서로 상호간에 영향을 주게 된다. Fig. 1은 본 연구의 해석모델로서 좌표계와 사용된 기호를 나타내었다. 즉, 강체로 가정한 돌기가 반무한체 위로 미끄럼접촉(sliding contact)을 하고, 미끄럼 접촉을 할 때의 접촉압력을 헤르쯔 분포로 가정하였다. 그리고 그 압력에 의해 발생된 마찰열 역시 같은 형태

로 접촉부에 가해지는 것으로 하였다.

돌기가 미끄럼 접촉을 할시 균열 주위에는 소성영역이 발생되지만 고강도 강이나 세라믹 같은 취성재료에서는 균열주위의 소성 영역이 무시할수 있을 만큼 작기 때문에 반무한체를 완전탄성체라고 가정하고 해석을 수행하였고, 이것은 실제로 취성재료의 해석에 응용되고 있다[7]. 균열의 길이 $2c$ 는 $8\mu\text{m}$ 이고, d 는 균열이 위치한 깊이로서 표면에서부터 $4\mu\text{m}$ 로 고정하였으며 균열간의 거리 l 은 $4\mu\text{m}$ 로 하였다. 반무한체와 돌기사이의 마찰계수 μ 는 0.25, 0.5, 1로 하였고 균열면상의 마찰계수는 0.5로 고정하였다. 또한 돌기의 반지름은 $25\mu\text{m}$ 로 하였고, $0.3\mu\text{m}$ 의 압입깊이로 미끄럼 접촉을 하게 하였다.

마찰열의 severe effect를 고려하기 위해서 접촉하지 않는 표면부의 대류(convection)에 의한 열손실은 무시하였다. 그리고 균열면상으로는 열전달이 없는 것으로 가정하였다.[7]

반무한체는 균질하며(homogeneous) 물성치로 탄성계수 310GPa, 프와송비 0.29, 열팽창계수는 $5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 로 하였다. 또 열전도계수 $37.7\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}$, 밀도 $3200\text{kg}/\text{m}^3$ 비열값을 $1000\text{J}/\text{kg}^\circ\text{C}$ 로 하여 세라믹(Si_3N_4)재료와 같은 취성재료의 특성을 나타내게 하였다.

2.2 유한 요소 모델

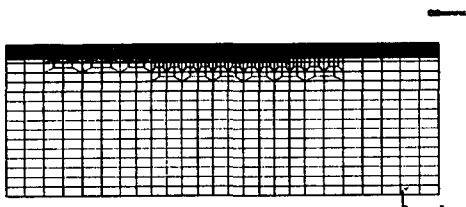


Fig. 2 Finite element mesh of half-space

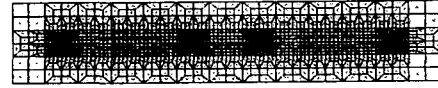


Fig. 3 Finite element mesh of the subsurface horizontal cracks

Fig. 2는 내부복수 수평균열을 가진 반무한체를 모델링한 것이다.

반무한체의 크기는 가로 $226\mu\text{m}$ 이고, 세로 $160\mu\text{m}$ 로 하였으며 총 4029개의 8절점 평면 변형률 요소를 사용하였다.

Fig. 3은 균열 주위의 요소를 확대하여 나타내었다. 균열선단의 응력의 특이점을 나타내기 위해 균열선단의 중간절점을 균열선단으로부터 1/4지점으로 이동하였다[8]. 그리고 선형탄성파괴역학 해석이므로 균열선단의 절점들의 변위를 같게하여 균열 끝이 블런팅(blunting)되는 것을 방지하였다[9].

유한요소 해석프로그램으로는 기계적하중과 열하중을 동시에 고려할 수 있는 MENTAT/MARC K6.2를 사용하였으며 IBM RS/6000 43P 기종에서 계산을 수행하였으며 각각의 조건에 따라 38~44시간 정도가 소요되었다.

2.3 온도장에 대한 지배방정식

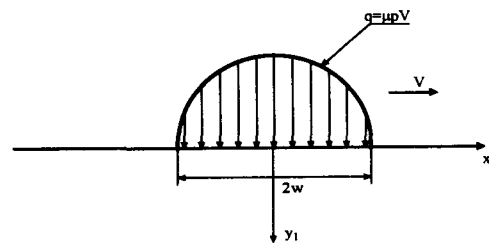


Fig. 4 An analytic model and coordinate system for temperature field

Fig. 4에서 온도장을 구하기 위한 지배방정식은 (2-1)식으로 주어진다.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} = \frac{1}{x} \frac{DT}{Dt} \quad (2-1)$$

여기서

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t}$$

본 연구에서 돌기는 균열로부터 아주 먼 거리($X_{c1}/c=15$, $X_{c2}/c=18.5$)에서 미끄럼 접촉을 시작하므로 준평형상태라고 가정할 수 있다.

그러면 식 (2-1)은 (2-2)와 같이 변형된다.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} = \frac{V}{x} \frac{\partial T}{\partial x_1} \quad (2-2)$$

식 (2-2)를 무차원화 하기 위하여 아래와 같은 무차원변수를 정의한다.

$$(x, y) = \left(\frac{x_1}{w}, \frac{y_1}{w} \right), \phi = \frac{TK}{2wq}, Pe = \frac{2wV}{x}$$

여기서 K: 열전도 계수, ϕ : 무차원 온도장,

Pe: Peclet number, x : 열확산계수,

T: 온도, V: 미끄럼 속도

위의 무차원변수를 이용하여 무차원화 하면 식(2-2)는 식(2-3)으로 주어진다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{Pe}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2-3)$$

본 연구에서 Pe=0.16, 0.32, 0.64로 하였다. 또한 열하중(Thermal load)과 관련된 무차원 변수 Th를 아래와 같이 정의한다[11].

$$Th = \frac{2\mu P_0 V(1+\nu)w\alpha}{(1-\nu)K} \quad (2-4)$$

여기서 P_0 : 최대접촉압력

ν : 프와송 비, α : 열팽창계수

본 연구에서 Th는 0.0036, 0.0072, 0.0144로 하였다.

3. 결과 및 고찰

3.1 응력확대계수의 계산

균열선단의 응력확대계수는 다음과 같은 식으로 구하였다

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy} \quad (r, \theta = 0)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{xy} \quad (r, \theta = 0)$$

r 과 θ 는 Fig. 1에 나타난 좌표계를 따른다. 균열선단에는 응력집중현상이 나타나므로 균열선단의 응력확대계수는 균열선단 주위의 여러 절점의 값으로부터 $r=0$ (균열선단) 지점까지 외삽(extrapolation)한 값으로 구하였다[10].

계산된 응력확대계수는 ($P_0 w^{1/2}$)로 정규화하였으며 응력확대계수 K_I 은 양의 값일 때만 의미가 있으므로 $K_I < 0$ 인 값들은 0으로 나타내었다.

3.2 열하중의 영향

열하중(Thermal load), Th는 식(2-4)에서 정의되어 있듯이 발생한 마찰열, $q(\mu P_0 V)$ 의 크기와 재료의 열적물성치(α , K) 등으로 구성된 무차원수이다. 즉 재료의 열적 물성치를 고려한 외부에서 가한 열부하의 크기라 할 수 있다.

Fig. 5~Fig. 6은 열하중의 영향을 고찰하기 위해 페클릿 수가 0.32일 때 열하중을 0.0036, 0.0072, 0.0144로 변화시켜가며 돌기의 위치에 따른 K_{II} 의 변화를 나타낸 것이다. K_{II} 는 주기적인 변화를 보이고 있으며 열하중이 증가할수록 균열선단의 K_{II} 의 최대값과 최소값이 증가하였다. 균열 1과 균열 2의 양쪽선단 모두 돌기가 지나가기 바로 전과 후에 각각 최대값과 최소값

을 나타내는 것을 알 수 있다. Fig. 7-Fig. 8은 페클릿 수가 0.32일 때 열하중을 0.0036, 0.0072, 0.0144로 변화시켜가며 돌기의 위치에 따른 K_I 의 변화를 나타낸 것이다. K_I 역시 열하중이 증가할수록 최대값이 크게 나타났다. 이것은 열하중이 높을수록 열응력에 의한 균열전파 가능성이 커지게 됨을 의미한다. 그러나 K_I 의 값은 K_{II} 의 값에 비하여 매우 작은 값을 알 수 있다. 이 결과로 볼 때 페클릿 수가 일정할 때 미끄럼 접촉을 하는 반무한체 내의 수평균열은 K_{II} 의 영향을 지배적으로 받는다고 할 수 있다.

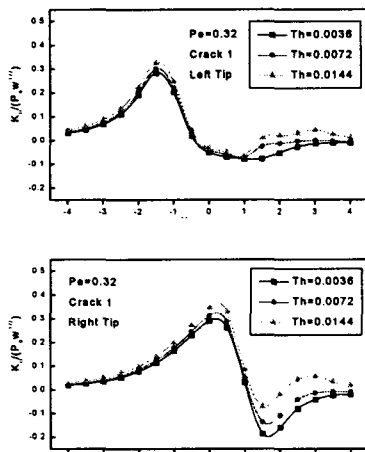


Fig. 5 Variation of dimensionless K_{II} with asperity position and $Pe=0.32$

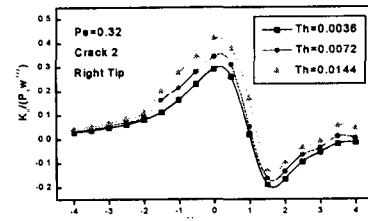
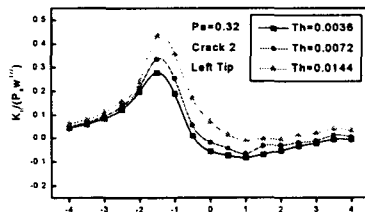


Fig. 6 Variation of dimensionless K_{II} with asperity position and $Pe=0.32$

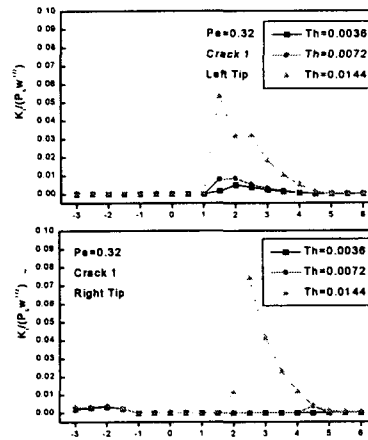


Fig. 7 Variation of dimensionless K_I with asperity position and $Pe=0.32$

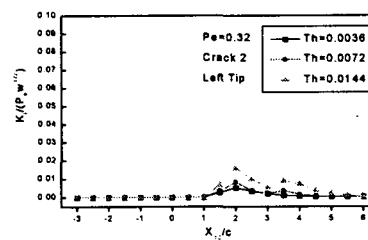


Fig. 8 Variation of dimensionless K_I with asperity position and $Pe=0.32$

3.3 균열전파 각도계산

3.3.1 균열 전파 각도의 계산

두 물체가 접촉하여 상대운동을 하는 것은 미시적인 관점에서 보면 돌기간의 접촉이라 할 수 있다. 실제, 돌기간의 접촉길이는 $10\mu\text{m}$ 정도이고 돌기간의 거리는 약 $1000\mu\text{m}$ 정도이기 때문에 재료에는 많은 반복하중이 가해지게 된다. 이러한 반복하중이 균열을 발생, 성장시킨다[11].

따라서 본 연구에서는 균열의 성장을 피로의 관점에서 보고, 응력확대계수의 최대 변동폭으로 피로 균열의 성장각도를 평가하였다[7]. 2차원 탄성체에서 균열선단 주위의 응력장은 아래의 식으로 나타낼 수 있다.[7,11]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \left(\frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] \end{aligned}$$

균열선단을 원점으로 하여 $r-\theta$ 좌표에 따른 전단과 인장모드 균열의 진전을 해석하기 위해 인장 및 전단 응력확대계수를 아래와 같이 나타내었다.

$$\begin{aligned} K_{\sigma}(\theta, x_p/c) &= \sigma_{\theta} \sqrt{2\pi r} \\ K_{\tau}(\theta, x_p/c) &= \tau_{r\theta} \sqrt{2\pi r} \end{aligned}$$

인장 및 전단 응력확대계수 변동폭은 각각 ΔK_{σ} , ΔK_{τ} 로 표시하여 아래 식으로 구하였다.

$$\begin{aligned} \Delta K_{\sigma} &= \Delta K_{\sigma}(\theta) = \Delta K_{\sigma, \max} \Big|_{\theta=\theta^*} - \Delta K_{\sigma, \min} \Big|_{\theta=\theta^*} \\ \Delta K_{\tau} &= \Delta K_{\tau}(\theta) = \Delta K_{\tau, \max} \Big|_{\theta=\theta^*} - \Delta K_{\tau, \min} \Big|_{\theta=\theta^*} \end{aligned}$$

$K_{\sigma, \max}$ 와 $K_{\tau, \max}$ 는 각도 θ^* ($-180 \leq \theta^* \leq 180$) 일 때의 최대 K_{σ} 와 K_{τ} 를 나타내며 인장 및 전단응력확대계수 변동폭의 최대값은 $(K_{\sigma})_{\max}$ 과 $(K_{\tau})_{\max}$ 으로 표시하였다.[7]

3.3.2 균열전파각도

Fig. 9~Fig. 10은 균열 1과 균열 2의 ΔK_{σ} 의 변화를 나타낸 것이다. 균열 1과 균열 2 모두 열하중에 관계없이 왼쪽 균열선단에서는 $\theta=72^\circ$, 오른쪽 균열선단에서는 $\theta=-72^\circ$ 부근에서 최대값을 나타내었다. 모든 조건에서 균열 2의 ΔK_{σ} 의 최대값이 균열 1의 값보다 크게 나타났으며 그 차이는 열하중이 클수록 더욱 크게 나타났다.

Fig. 11~Fig. 12은 균열 1과 균열 2의 ΔK_{τ} 의 변화를 나타내었다. 균열1과 균열 2 모두 열하중에 관계없이 왼쪽, 오른쪽 균열선단 모두 $\theta=0$ 부근에서 최대값을 나타내었다.

이 결과들로 볼 때, 균열이 인장모드로 진전 할 때는 왼쪽 균열선단에서는 표면을 향하여 72° 방향으로 성장하며, 오른쪽 균열선단에서는 재료 내부로 72° 방향으로 성장하게 된다. 그러나 전단모드가 지배적 일 경우에는 균열은 양쪽 선단 모두 균열면을 따라 표면과 평행하게 성장한다고 할 수 있다.

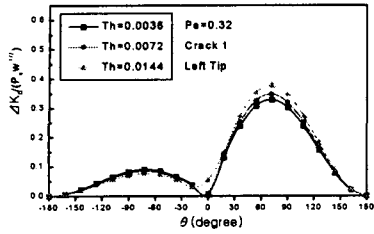


Fig. 9 Variation of dimensionless ΔK_{σ} with direction and $pe=0.32$

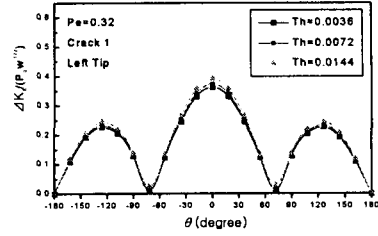
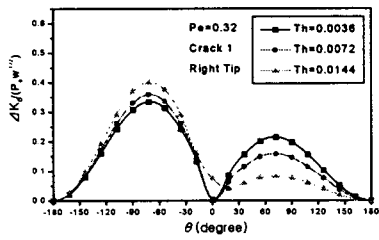


Fig. 11 Variation of dimensionless ΔK_{τ} with direction and $pe=0.32$

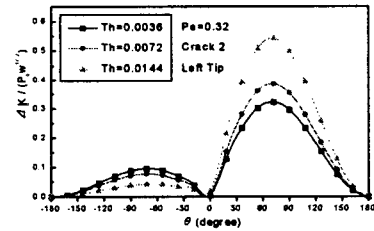


Fig. 10 Variation of dimensionless ΔK_{σ} with direction and $pe=0.32$

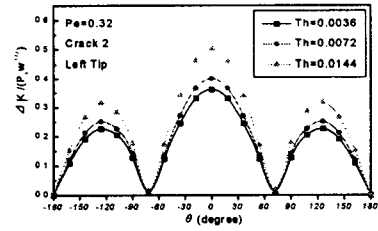
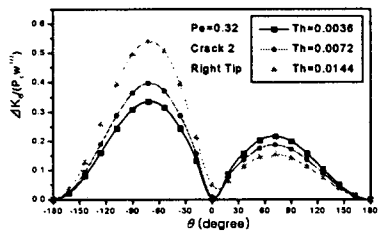


Fig. 12 Variation of dimensionless ΔK_{τ} with direction $pe=0.32$

3.3.3 균열전파 기구

Fig. 13~Fig. 14은 페클릿 수가 일정한 경우 열하중에 따른 $(\Delta K_{\sigma})_{max}$ 와 $(\Delta K_{\tau})_{max}$ 의 변화를 보인 것이다. Fig. 13은 균열 1에 대한 $(\Delta K_{\sigma})_{max}$ 와 $(\Delta K_{\tau})_{max}$ 를 나타낸 것이다. $(\Delta K_{\sigma})_{max}$ 와 $(\Delta K_{\tau})_{max}$ 모두 오른쪽 균열선단의 값이 크다는 것을 알 수 있으며 양쪽 선단 모두 $(\Delta K_{\tau})_{max}$ 의 값이 $(\Delta K_{\sigma})_{max}$ 의 값보다 크다는 것을 알 수 있다. Fig. 14는 균열 2에 대한 $(\Delta K_{\sigma})_{max}$ 와 $(\Delta K_{\tau})_{max}$ 를 보인 것이다. 균열 1과 유사하게 오른쪽 균열 선단의 $(\Delta K_{\sigma})_{max}$ 와 $(\Delta K_{\tau})_{max}$ 값이 크다는 것을 알 수 있으며, 오른쪽 균열선단의 경우 $(\Delta K_{\tau})_{max}$ 값이 $(\Delta K_{\sigma})_{max}$ 값보다 항상 크다는 것을 알 수 있다. 위의 결과들로 볼 때 오른쪽 균열선단이 왼쪽 균열선단보다 균열이 진전할 가능성이 크다고 말할 수 있다. 또한 오른쪽 균열 선단에서는 항상 $(\Delta K_{\tau})_{max}$ 값이 $(\Delta K_{\sigma})_{max}$ 값보다 크므로 열하중에 관계없이 균열이 균열면과 평행하게 진전하게 된다.

그러나 균열2의 왼쪽 선단은 열하중(Th)가 커짐에 따라 $(\Delta K_{\sigma})_{max}$ 의 값이 $(\Delta K_{\tau})_{max}$ 값보다 커지게 된다. 열하중은 식(2-4)로 정의 된다.

따라서 재료의 기계적, 열적 물성치가 일정할 때 열하중이 크다는 것은 마찰열이 많이 발생한다는 것을 의미한다. 즉, 마찰열이 많이 발생할수록 전단모드에서 인장모드로 균열이 진전하기 쉽다는 것을 뜻한다. 다시 말해서 균열 면과 평행한 방향으로 성장(전단모드에 의한 성장)하던 균열이 마찰열이 커짐에 따라 표면을 향하여 72° 방향으로 성장하게 된다.

이런 결과들로 볼 때, 재료내부의 수평

균열은 미끄럼 접촉 초기에 양쪽 균열선단에서 모두 표면과 평행한 수평방향으로 성장한다. 그 후, 계속되는 미끄럼 접촉에 의한 많은 마찰열로 인하여 균열 2의 왼쪽 균열선단에서는 균열성장 방향이 표면을 향하게 되고 표면까지 균열이 성장한 후에는 판상의 형태로 탈락하게 된다.

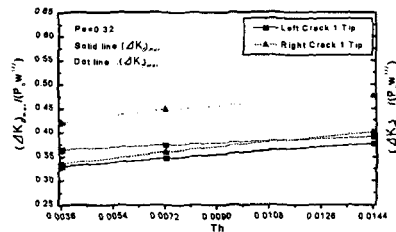


Fig. 13 Variation of dimensionless $(\Delta K_{\sigma})_{max}$ and $(\Delta K_{\tau})_{max}$ with $Pe=0.32$

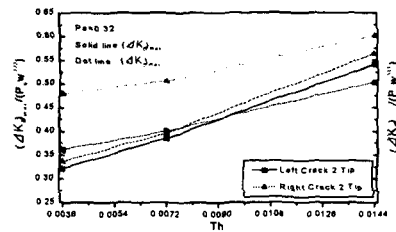


Fig. 14 Variation of dimensionless $(\Delta K_{\sigma})_{max}$ and $(\Delta K_{\tau})_{max}$ with $Pe=0.32$

4. 결론

마찰열을 고려하여 미끄럼 접촉시의 반무한체 내의 복수 수평 균열의 전파특성을 해석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 재료 내부의 수평균열의 경우 mode I 응력확대계수 K_I 보다 mode II 응력확대계수

수 K_{II} 가 지배적인 영향을 미쳤다.
 2. 페클릿 수가 일정한 경우 열하중이 클수록 응력확대계수의 값이 크게 나타났다.
 3. 미끄럼 접촉초기에 내부의 수평균열은 전단모드에 의해 균열면과 수평한 방향으로 성장하게 되며, 계속되는 미끄럼 접촉에 의한 마찰열로 인하여 균열이 표면을 향하여 72° 방향으로 성장하게 된다.

후 기

이 논문은 1997년도 한국학술진흥재단 외국석학과의 공동연구과제(1997-011-E0002 4) 연구비에 의하여 지원되었으며 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Sih. G.C., "On the Singular Character of Thermal Stresses Near a Crack Tip", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.29, pp.587-589, 1962.
2. N.P. Suh, "The Delamination Theory of Wear", Wear, Vol.25, pp.111-124, 1973.
3. H.C. Shin, N.P. Suh, "Subsurface Crack Propagation Due to surface Traction in Sliding Wear", Journal of Applied Mechanics, Vol.51, pp.317-322, 1984.
4. Kulkarni, S. M., Rubin, C. A., and Hahn, G.T., "Elasto-Plastic Coupled Temperature-Temperature-Displacement Finite Element Analysis of Two-Dimensional Rolling-Sliding Contact With a Translating Heat Source", ASME Journal of Tribology, Vol.113, pp.93-101, 1991.
5. Sekine, H., "Crack Problem for a Semi-infinite Solid with Heated Bounding Surface", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.44, pp.637-642, 1977b
6. Goshima, T., and Keer, L. M., "Thermoelastic Contact Between a Rolling Rigid Indenter and a Damaged Elastic Body", ASME Journal of Tribology Vol.112, pp.382-391, 1990.
7. S. S. Cho, K.Komvopoulos, "Thermoelastic Finite Element Analysis of Subsurface Cracking Due to Sliding Surface Traction", ASME Journal of Engineering Materials and Technology, Vol.119, pp.71-78, 1997.
8. K. J. Bath, "Finite Element Procedures" Prentice-Hall, pp.369-371, 1996.
9. T. L. Anderson, "Fracture mechanics; Fundamentals and Application" CRC Press, Second edition, pp.586-59, 1995.
10. D. Broek, "Elementary Engineering Fracture mechanics", Sijthoff & Noordhoff pp.306-323, 1978.
11. N. P. Suh, "Tribophysics", Prentice-Hall, First Edition, pp.103-172, 1986.