

FE-BEM을 이용한 뼈대구조물의 해석모델 개발

Development of the Analytical Model for Frame Structures using FE-BEM

최 원* · 나 준 엽 · 김 한 중(서울대)

Choi, Won · Na, Joon Yeop · Kim, Han Joong

Abstract

This paper presents an explanatory study of combining the finite element and boundary element methods to achieve an efficient and accurate analysis of frame structure containing shear wall. This model analyzes the frame by finite element method and the shear wall by boundary element method. The purpose of this study is the specific case that boundary element is surrounded by finite element. If material properties of shear wall are relatively the very smaller than it of frame structure, the displacement shape of each node is calculated exactly. And if the solution of displacement is the larger, the displacement shape is approximated more accurately.

I. 서론

뼈대 구조물을 해석하는 일반적인 수치해석 기법으로는 유한요소법이 있다. 유한요소법은 복잡한 기하 요소를 포함한 실제적인 공학 문제에 유용한 방법이며, 손쉽게 재료 및 기하적 비선형성 등을 고려할 수 있는 이점이 있다. 그러나 유한요소망을 생성해야하고, 필요에 따라 인위적인 경계조건을 설정해야 하며, 필요로 하는 변위를 얻기 위해 해석영역 전체를 유한요소망으로 생성해야 한다²⁾.

경계요소법은 한 점에서 지배방정식을 만족시키는 기본해만 알면, 경계에서만 이산화하기 때문에 입력 자료의 작성이나 프로그램 실행에 있어 효율적이다. 경계요소법은 문제 풀이가 간단하고, 수학적이어서 대형 문제를 일관된 방법으로 풀 수 있어, 응력집중, 균열 등과 같이 특이성이 존재하는 문제, 바다와 같은 무한 또는 반무한 경계를 갖는 문제 등을 해결하는 데 적합하다^{2,4)}. 반면, 복잡한 형상으로 이루어졌거나 비선형성을 등을 가지는 구조물을 다루는 데에는 유한요소법보다 곤란하다²⁾.

본 연구에서는 전단벽을 가진 뼈대구조물을 해석하기 위해 유한요소법과 경계요소법을 조합하였다. 유한요소법과 경계요소법의 조합방법으로는 경계요소의 계 방정식을 유한요소형 계 방정식으로 변환시키는 유한요소형 접근방법을 이용하였다. 유한요소법과 경계요소법을 조합한 기존의 방법들은 대부분 유한요소와 경계요소가 일정한 경계영역에서 상호 결합되지만^{1,3)}, 본 연구에서는 유한요소가 경계요소를 해석영역 외가에 있도록 모델링 하여⁵⁾, 뼈대는 유한요소법, 전단벽은 경계요소법을 이용하는 전단벽을 가진 뼈대구조물을 해석 할 수 있는 모델을 개발하

고자 한다.

II. 유한요소법과 경계요소법의 결합

2.1 유한요소법의 정식화

적용할 대상물은 2차원 뼈대구조물이고, 2차원 뼈대구조물에서 유한요소법과 강성도법은 같은 정도의 해를 도출한다. 계산 횟수가 적은 강성도법을 유한요소법 대신 사용하였다. 사용할 강성도법의 강성도 행렬은 식(1.1)과 같다.

$$\begin{pmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ m_1 \\ f_{x_2} \\ f_{y_2} \\ m_2 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

여기서, A : 단면적, E : 탄성계수, L : 부재의 길이, I : 단면 2차 모멘트

x : x 방향 변위, y : y 방향 변위, θ : 회전각, f : 절점 하중, m : 절점 모멘트
변환행렬은 식(1.2)와 같다.

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

전체 강성도 행렬로의 결합은 식(1.3)과 같아

$$T k T^{-1} = K \quad (1.3)$$

위의 식을 조합하면

$$KU = F \quad (1.4)$$

가 된다.

2.2 경계요소법의 정식화

2.2.1 경계적분방정식

가상일의 원리로부터 적분 방정식을 얻을 수 있다. 여기에 경계 조건을 대입한 후 발산정리를 적용하고 기본해를 적용하면 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$c(i)u(i) + \int \int_S u_k \dot{u}_k^* dS = \int \int \int_V b_k u_k^* dV + \int \int_S p_k u_k^* dS \quad (2.1)$$

여기서, S : 표면, V : 체적, $c(i)$: i 점에서 형상에 따라 변화하는 계수,

$u(i)$: i 점에서 변위, u_k : 점 k 에 작용하는 변위,

b_k : 점 k 에 작용하는 외부 힘, p_k : 점 k 에 작용하는 표면력벡터, l : 방향(1 or 2),

u_k^* , p_k^* : 점 i 에 작용하는 단위하중에 의해 점 k 에서 l 방향으로 작용하는 표면의 변위와 표면력벡터

2.2.2 경계요소 계방정식

2차원 등방성 탄성체를 위한 경계요소방정식을 유도하기 위하여 다음과 같이 가정한다.

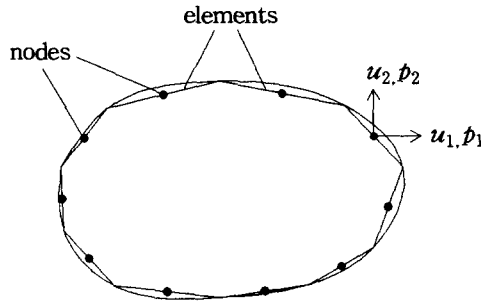


Fig. 1. Constant boundary elements

$$\begin{aligned} u_{ik}^* &= u^* = [u_1 \ u_2]^T \\ p_{ik}^* &= p^* = [p_1 \ p_2]^T \\ b_k &= b = [b_1 \ b_2]^T \end{aligned} \quad (2.1)$$

이것을 정리하면 다음과 같다.

$$c(i)u(i) + \int_C p^* u \, ds = \int \int_R u^* b \, dx_1 dx_2 + \int_C u^* p \, ds \quad (2.2)$$

여기서, R : 평면영역, C : 경계영역
위의 방정식을 이산화시키면

$$c(i)u(i) + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{C_j} p^* \, ds \right\} u_j = \int \int_R u^* b \, dx_1 dx_2 + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{C_j} u^* \, ds \right\} p_j \quad (2.3)$$

물체력 항은 다음과 같다.

$$B_i = \int \int_R u^* b \, dx_1 dx_2 = \sum_{s=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^l (u^* b)_k w_k \right\} A_s \quad (2.4)$$

여기서, M : 내부 격자의 개수, A : 내부 격자의 면적, w_k : 가중치
물체력은 무시하고

$\overline{H}_{ij} = \int_{C_i} p^* \, ds$, $\overline{G}_{ij} = \int_{C_i} u^* \, ds$ 라 하면 식(2.5)와 같이 정리된다.

$$c(i)u(i) + \sum_{j=1}^N \overline{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N \overline{G}_{ij} p_j \quad (2.5)$$

이식을 정리하면

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{H}_{ij} & \text{if } i \neq j \\ \overline{H}_{ij} + c(i) & \text{if } i = j \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N \overline{G}_{ij} p_j \quad (2.7)$$

위의 식을 행렬 형태로 표현하면 식(2.8)과 같다.

$$HU = GP \quad (2.8)$$

2.3 유한요소법과 경계요소법의 결합

2.3.1 외력과 표면력 사이의 관계

절점에 작용하는 힘에 의한 일

$$W = (u_x)_1(F_x)_1 + (u_x)_2(F_x)_2 + (u_x)_3(F_x)_3 + (u_y)_1(F_y)_1 + (u_y)_2(F_y)_2 + (u_y)_3(F_y)_3 \quad (3.1)$$

경계적분에 의한 일

$$W = \int_{C_i} (u_x p_x + u_y p_y) dC \quad C_i : \text{요소의 길이} \quad (3.2)$$

위의 식에 Jacobian과 형상함수를 대입하고 정리하면 식(3.3)과 같다.

$$W(\xi) = \int_{-1}^{+1} [N_1(\xi)(u_x)_1 + N_2(\xi)(u_x)_2 + N_3(\xi)(u_x)_3] p_x(\xi) J(\xi) d\xi + \int_{-1}^{+1} [N_1(\xi)(u_y)_1 + N_2(\xi)(u_y)_2 + N_3(\xi)(u_y)_3] p_y(\xi) J(\xi) d\xi \quad (3.3)$$

$$\text{여기서, } N_1(\xi) = -\frac{\xi}{2}(1-\xi), \quad N_2(\xi) = (1+\xi)(1-\xi), \quad N_3(\xi) = \frac{\xi}{2}(1+\xi)$$

위의 식에 형상함수를 직접 대입하면 식(3.4)와 같다.

$$\begin{aligned} (F_x)_1 &= \left[\frac{4}{15}(p_x)_1 + \frac{2}{15}(p_x)_2 - \frac{1}{15}(p_x)_3 \right] J(\xi) \\ (F_x)_2 &= \left[\frac{2}{15}(p_x)_1 + \frac{16}{15}(p_x)_2 + \frac{2}{15}(p_x)_3 \right] J(\xi) \\ (F_x)_3 &= \left[-\frac{1}{15}(p_x)_1 + \frac{2}{15}(p_x)_2 + \frac{4}{15}(p_x)_3 \right] J(\xi) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{여기서, } J(\xi) = \sqrt{\left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right]^2 + \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right]^2}$$

행렬형태로 표현하면 다음과 같다.

$$F = MP \quad (3.5)$$

2.3.2 FEM-BEM 의 결합

$KU = F$ 에 식(3.5)를 대입하면

$$KU = MP \quad (4.1)$$

$$HU = GP \quad (4.2)$$

가 된다.

(4.1)식과 (4.2)식을 결합하면 다음과 같이 두 가지 형태 중 하나가 된다.

$$\begin{bmatrix} [K]^{(FE)} & 0 \\ 0 & [K]^{(BE)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(FE)} \\ U^{(BE)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{(FE)} \\ F^{(BE)} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} [K]^{(FE)} & 0 & 0 \\ 0 & [K]^{(BE)} & 0 \\ 0 & 0 & [K]^{(BE+FE)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(FE)} \\ U^{(BE)} \\ U^{(BE+FE)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{(FE)} \\ F^{(FE)} \\ F^{(FE+BE)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

(4.3)식은 공통된 절점이 없는 경우이고, (4.4)식은 공통된 절점이 있는 경우이다.

(4.4)식에서 경계요소법과 유한요소법이 결합된 부분의 물성치는 다음과 같다.

$$K^{(FE+BE)} = \frac{1}{2}(K^{(FE)} + K^{(BE)}) \quad (4.5)$$

III. 적용 예

3.1 적용 예

Frame의 물성치는

$$E=20,389,019 \text{ Ton/m}^2$$

$b=0.3\text{m}$, $h=0.5\text{m}$, $A=0.15\text{m}^2$, $I=3.125 \times 10^{-3}\text{m}^4$ 로 가정하였고
전단벽의 물성치는

$$E=2531050.7 \text{ Ton/m}^2$$

$L(\text{Frame 당 길이})=4\text{m}$, $\nu=0.2$ 로 가정하였다.

적용한 모델링 부분은 아래 그림에서 점선으로 표시한 부분이다.

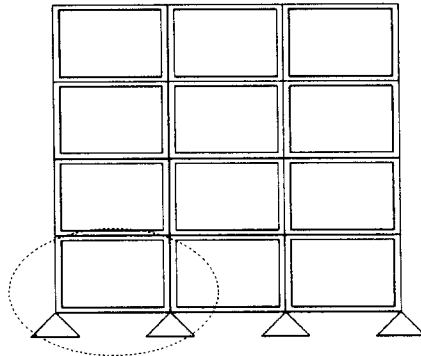


Fig. 2. 대상 구조물

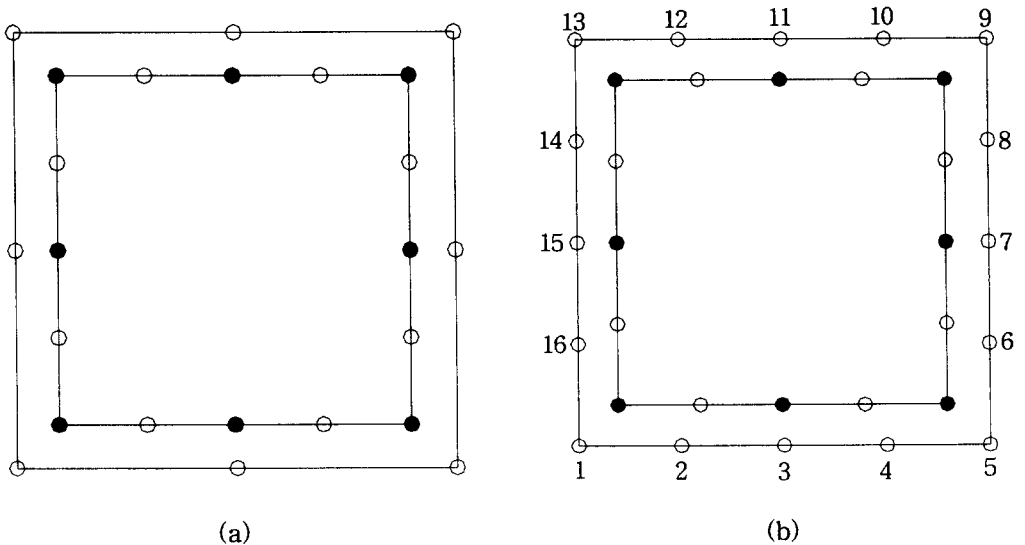


Fig. 3. 대상 구조물 중 적용할 일부분을 확대한 모습

a) (4.3)의 방법에 의해 적용되는 형태

b) (4.4)의 방법에 의해 적용되는 형태

본 연구에서 적용한 구조물의 요소분할 형태는 Fig. 3.2 이다.

3.2 결과

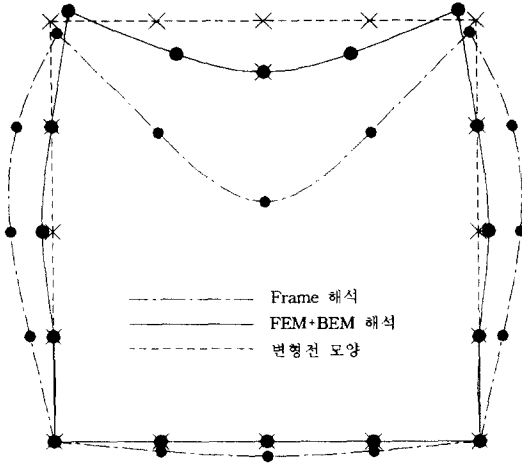


Fig. 4. FEM과 BEM을 결합하여 해석한 결과

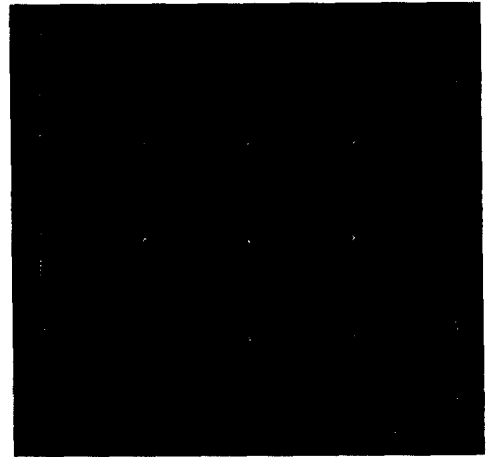


Fig. 5. SAP2000을 이용하여 해석한 결과

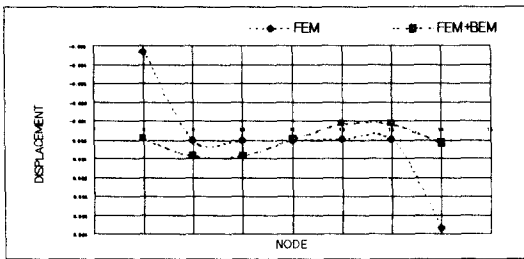


Fig. 6. 수평 변위

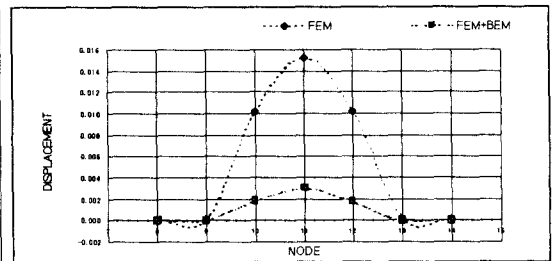


Fig. 7. 하중이 가해진 방향의 변위

위의 그래프는 구조물에서 변위가 가장 크게 일어나는 Node만을 선별해서 FEM에 의한 결과와 FEM과 BEM을 결합한 결과와 비교해본 결과이다. 위의 결과를 살펴보면 FEM과 BEM을 조합한 결과는 전단벽의 영향으로, Frame만을 이용한 결과보다 더욱 작은 변위(수직 변위 : 20%이내)를 나타냄을 알 수 있다. 그리고 전단벽에 의해 하중이 고르게 분포되어서 변위가 전체적으로 완만한 분포를 보이고 있다.

3.3. 고찰

같은 재료상수를 적용하여, FEM 행렬의 원소들과 BEM 행렬의 원소들을 비교하면, FEM 행렬의 원소들이 전체적으로 BEM의 원소들보다 그 값이 훨씬 크다. 그런데 본 연구에서처럼 FEM과 BEM을 결합할 때 경계조건이 공유되는 절점에서, 두 가지 물성치의 단순한 평균을 사용한다면 BEM에 의한 영향이 너무도 크게 나타나는 것을 볼 수 있었다. 그러므로 이러한 구조물을 적용할 때는 다음과 같은 제약 조건이 따른다.

첫째, 전단벽의 물성치가 Frame의 물성치보다 상대적으로 매우 작아야 한다. 이는, Frame의 물성치를 중심으로 행렬의 해가 구해지기 때문에 보다 현실에 가까운 해를 얻을 수 있다.

둘째, 전단벽과 Frame의 모든 경계가 일체로 작용하여야만 이러한 구조해석을 적용할 수 있다. 실제로 Sap2000을 이용해 이러한 구조물을 해석하면 공유되는 절점만 같은 변위를 가지고 나머지 부분은 분리되어 각각의 독립된 변위만을 가지기 때문이다.

셋째, FEM과 BEM을 결합한 해석 결과는 상대적으로 변위가 큰 부분에만 적용하여야만 한다. 즉, 변위가 큰 부분은 Frame의 변위 곡선과 그 형상이 잘 일치하지만, 변위가 작은 부분은 해석 결과가 신뢰할 수 없는 약간의 편차가 발생하였다.

넷째, FEM과 BEM을 결합한 해석 결과는 구조물이 변형되는 형태를 전체적으로 파악할 수 있고, 다른 node들과의 상대적인 위치만을 파악하는데 이용하여야 한다.

이에 따라 유한요소법과 경계요소법을 결합한 새로운 행렬식의 기본형은 다음과 같다.

$$K^{(FE+BE)} = \frac{1}{\alpha} K^{(FE)} + \beta K^{(BE)} \quad (\alpha : 2\text{근처의 값}, \beta : 0 < \beta < 1 \text{ 사이의 값}) \quad (4.6)$$

여기서 α 와 β 의 값은 좀 더 많은 실험을 거쳐서 결정되어야 할 것이다. 그리고 α 와 β 의 값은 탄성계수나 포아송비와 밀접한 관련을 맺을 것으로 사려된다. 그리고 정확한 해석 결과인지 판별하기 위해 실험이 뒤따라야 할 것으로 판단된다. 이는 앞으로 좀더 많은 이론적인 연구가 필요할 것이라 생각된다.

IV. 결론

유한요소가 경계요소를 해석영역 외각에 있도록 모델링 하여 뼈대는 유한요소법, 전단벽은 경계요소법을 이용하는 전단벽을 가진 뼈대구조물의 해석 모델을 개발하였다.

1. 유한요소와 경계요소를 하나의 방정식으로 정식화하였다.
2. FE-BE를 결합한 해석 결과는 상대적으로 변위가 큰 부분에서 Frame의 변위 곡선과 그 형상이 잘 일치하였다.
3. FE-BE를 결합하는 경우 새로운 행렬식의 기본형을 정의하였다.

참고문헌

1. 김문겸, 허택녕, 이상도, “유한요소와 경계요소의 조합에 의한 다층 구조계의 비선형 해석”, 한국전산구조공학회지, 제7권, 제4호, 1994, pp.57-67.
2. Becker, A. A., *The Boundary Element Method in Engineering*, McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS, 1992, pp.216-222.
3. CODA, H. B., W. S. VENTURINI and M. H. ALIABADI, “A GENERAL 3D BEM/FEM COUPLING APPLIED TO ELASTODYNAMIC CONTINUA/FRAME STRUCTURES INTERACTION ANALYSIS”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 46, 1999, pp.695-712
4. Kythe, Prem K., *An Introduction to Boundary Element Methods*, CRC Press, 1995, pp.157-178.
5. Landenberger, A., A. El-Zafrany, “Boundary element analysis of elastic contact problems using gap finite elements”, *Int. J. Computers and Structures.*, vol. 71, 1999, pp.651-661