

탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 최저차 대칭 및 역대칭 고유진동수 방정식

Lowest Symmetrical and Antisymmetrical Natural Frequency Equations of Shallow Arches on Elastic Foundations

이병구(원광대) · 박광규(대전대) · 오상진*(담양대) · 서종원(동아건설)
Lee, Byoung Koo · Park, Kwang Kyou · Oh, Sang Jin · Ser, Jong Won

Abstract

This paper deals with the free vibrations of shallow arches resting on elastic foundations. Foundations are assumed to follow the hypothesis proposed by Pasternak. The governing differential equation is derived for the in-plane free vibration of linearly elastic arches of uniform stiffness and constant mass per unit length. Sinusoidal arches with hinged-hinged and clamped-clamped end constraints are considered in analysis. The frequency equations (lowest symmetrical and antisymmetrical natural frequency equations) are obtained by Galerkin's method. The effects of arch rise, Winkler foundation parameter and shear foundation parameter on the lowest two natural frequencies are investigated.

I. 서론

지반 위에 놓인 구조물의 거동특성은 구조공학, 기초공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구 대상으로 취급되어 이와 관련한 많은 연구가 수행되고 있다. 지반-구조물 상호작용과 관련한 많은 문제들은 탄성지반 위에 놓인 보로서 모형화할 수 있으며, 이에 대한 가장 실제적인 예로서는 철도궤도, 파이프라인 및 띠기초(strip footing) 등을 들 수 있다.

최근에도 다양한 조건을 갖는 탄성지반 위에 놓인 보의 동적거동에 관한 연구^{1,2)}가 활발히 이루어지고 있지만, 이들 연구에서 다루어지고 있는 대상구조는 대부분 직선보이다. 그러나 실제 구조물에는 초기곡률을 갖는 곡선부가 존재하고 있어 이에 대한 연구결과가 필요하다. 그러나 Laura와 Maurizi³⁾가 고찰한 바와 같이 지반 위에 놓인 곡선부재의 거동특성에 관한 유용한 연구결과는 부족한 실정이다.

본 연구에서는 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 최저차 대칭 및 역대칭 고유진동수 방정식을 구하고자 한다. 이를 위하여 Pasternak가 제안한 지반모형 위에 놓인 낮은 아치의 면내 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 유도된 지배방정식에 양단회전 및 양단고정의 단부조건을 갖는 정현아치를 적용하고, Galerkin method를 이용하여 해석하였다. 해석결과로서 아치높이, Winkler지반계수, 전단지반계수의 향으로 표현되는 고유진동수 방정식을 산출하였다.

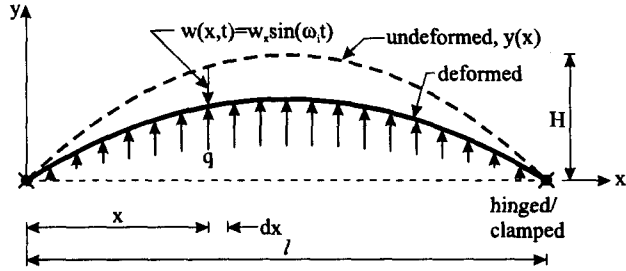


Fig. 1. Mode shape and variables of shallow arch resting on elastic foundations

II. 수학적 모형 및 고유진동수 방정식

Fig. 1은 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 제변수 및 진동형을 나타낸 것이다. 이 그림에서 l 과 H 는 각각 지간길이 및 아치높이, $y(x)$ 는 변형전 아치축상 임의점의 y 좌표이며, q 는 지반반력을 나타낸 것이다. 한편 $w(x, t)$ 는 변형전 아치축을 기준으로 측정된 진동변위로서 이를 조화진동식으로 표현하면 식 (1)과 같다.

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

식 (1)에서 w_x 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며, ω_i 는 고유각진동수, t 는 시간, i 는 모드번호이다.

Fig. 1에 보인 아치가 면내에서 진동하게 되면 부재 미소요소에는 진동변위에 의해 전단력 V , 휨모멘트 M 및 추력 N 이 발생하게 된다. 또한 질량을 가지고 있는 부재 미소요소에는 관성력 $\rho A \partial^2 w / \partial t^2$ 가 발생하며, 진동변위와 반대방향으로 지반반력 q 가 발생한다. 부재 미소요소에 작용하는 이 힘들의 동적 평형방정식을 세우면 식 (2), (3)과 같다.

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q = 0, \quad V - \frac{\partial M}{\partial x} - N \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0 \quad (2,3)$$

식 (2)에서 ρ 는 부재재료의 단위체적당 질량, A 는 단면적이다.

Pasternak가 제안한 지반모형을 채용하는 경우 지반반력 q 는 식 (4)와 같이 표현된다⁴⁾.

$$q = Kw - G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4)$$

윗 식에서 K 는 Winkler지반계수, G 는 전단지반계수(shear foundation modulus)이다. 한편 진동변위에 의한 추력 N 은 식 (5)와 같다⁵⁾.

$$N = \frac{EA}{2l} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

식 (5)에서 E 는 재료의 탄성계수이다.

Bernoulli-Euler 보이론에 의한 휨-곡률사이의 관계식은 식 (6)과 같다.

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (6)$$

여기서 I 는 단면2차모멘트이다. 식 (6)을 식 (3)에 대입하여 $\partial V/\partial x$ 를 구한 후 이를 식 (4)와 함께 식 (2)에 대입하고 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + Kw - G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

무차원 형태의 지배미분방정식을 얻기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\eta = w_x/l, \quad \xi = x/l, \quad \delta = y/l, \quad k = Kl^4/(\pi^4 EI), \quad g = Gl^2/(\pi^2 EI) \quad (8-12)$$

식 (1)과 (5)를 식 (7)에 대입하고, 식 (8)~(12)의 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 다음의 무차원 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} - \left(\frac{l}{r} \right)^2 \frac{d^2 \delta}{d\xi^2} \int_0^1 \frac{d\delta}{d\xi} \frac{dw}{d\xi} d\xi + \pi^4 k \eta - \pi^2 g \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - C_i^2 \eta = 0 \quad (13)$$

식 (13)에서 r 은 식 (14)에 보인 단면회전반경이고, C_i 는 무차원 고유진동수로서 그 내용은 식 (15)와 같다.

$$r = \sqrt{I/A}, \quad C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho A/(EI)} \quad (14,15)$$

단부($\xi=0$ 또는 1에서)가 회전단일때와 고정단인 경우 경계조건식을 무차원 변수를 사용하여 나타내면 각각 식 (16), (17)과 같다.

$$\eta = d^2 \eta / d\xi^2 = 0, \quad \eta = d\eta / d\xi = 0 \quad (16,17)$$

Fig. 1에 보인 아치의 선형을 식 (18)로 가정하면, 이의 무차원 선형식은 식 (19)와 같다.

$$y = H \sin(\pi x/l), \quad \delta = h \sin(\pi \xi) \quad (18,19)$$

위의 식들에서 h 는 아치높이 H 를 지간길이 l 로 정규화한 것이다.

본 연구에서는 식 (13)의 지배 미분방정식을 해석하기 위하여 고전적인 해석기법 중의 하나인 Galerkin method를 이용하였다. 조화진동의 진폭을 식 (20)과 같이 나타낼 수 있다고 가정하면, 식 (21)과 같이 Galerkin방정식으로 나타낼 수 있다⁶⁾.

$$\eta(\xi) = \sum_{i=1}^j a_i \phi_i, \quad \int_0^1 Q(\eta) \phi_i d\xi = \int_0^1 Q \left(\sum_{i=1}^j a_i \phi_i \right) \phi_i d\xi = 0, \quad i=1,2,\dots,j \quad (20,21)$$

식 (21)에서 $Q(\eta)$ 의 내용은 식 (22)와 같다.

$$Q(\eta) = \frac{d^4 \eta}{d\xi^4} - \left(\frac{l}{r} \right)^2 \frac{d^2 \delta}{d\xi^2} \int_0^1 \frac{d\delta}{d\xi} \frac{dw}{d\xi} d\xi + \pi^4 k \eta - \pi^2 g \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - C_i^2 \eta \quad (22)$$

대상아치의 단부조건이 양단회전인 경우 식 (16), 양단고정인 경우 식 (17)의 경계조건식을 만족하는 함수 ϕ_i 는 각각 식 (23), (24)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_i = \sin(i\pi\xi), \quad \phi_i = \sin(\pi\xi)\sin(i\pi\xi) \quad (23,24)$$

본 연구에서는 근사적인 고유진동수 방정식을 얻기 위하여 각각의 해당 진동형에 대한 1개의 항만을 고려한 해를 얻었다. 먼저 식 (19)의 선형을 갖는 양단회전 아치인 경우 $i=1$ 및 $i=2$ 에 대한 식 (23)을 식 (21)에 대입하여 정리하면 식 (25) 및 (26)을 얻을 수 있다.

$$a_1\left[\pi^4 + \frac{1}{2}\pi^4 k^2 \left(\frac{l}{r}\right)^2 + \pi^4 k + \pi^4 g - C_S^2\right] = 0, \quad a_2[16\pi^4 + \pi^4 k + 4\pi^4 g - C_A^2] = 0 \quad (25,26)$$

식 (25)와 (26)에서 C_S 는 대칭진동형을 갖는 최저차 고유진동수(lowest symmetrical frequency), C_A 는 역대칭진동형을 갖는 최저차 고유진동수(lowest antisymmetrical frequency)이며, 이 식들에서 C_S 와 C_A 를 구하면 식 (27)과 같다.

$$C_S = \pi^2 \sqrt{1 + k + g + \frac{1}{2}\lambda^2}, \quad C_A = \pi^2 \sqrt{16 + k + 4g} \quad (27a,b)$$

식 (27a)에서 λ 는 아치높이를 정의하기 위한 무차원 변수로서 식 (28)에 나타낸 바와 같다.

$$\lambda = H/r \quad (28)$$

마찬가지로 식 (21)와 (24)를 이용하면 식 (19)의 선형을 갖는 양단고정 아치에 대한 고유진동수 방정식이 식 (29)와 같이 얻어진다.

$$C_S = \pi^2 \sqrt{\frac{16}{3} + k + \frac{4}{3}g + \frac{128}{27\pi^2}\lambda^2}, \quad C_A = \pi^2 \sqrt{41 + k + 5g} \quad (29a,b)$$

이상에서 식 (27)과 (29)는 식 (19)의 선형을 갖는 양단회전 및 양단고정 아치의 무차원 고유진동수 방정식이다.

III. 해석 예 및 고찰

본 연구결과를 검증하기 위하여 문헌 [1, 7]의 결과와 Table 1에 비교하였다. 이 표에서 $\lambda=0$ 은 직선보에 대한 결과로서 본 연구와 문헌의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다. 특히 양단회전인 경우 본 연구와 문헌의 결과는 일치함을 알 수 있는데, 이는 본 연구에서 가정한 양단회전의 단부조건에 대한 함수 ϕ_i 가 정확해이기 때문이다. 또한 탄성지반 위에 놓인 아치문제에 대해서는 본 연구와 구조해석용 범용 프로그램인 SAP90의 결과를 비교하였다. 아치문제에 있어서도 본 연구와 SAP90의 결과는 비교적 잘 근접함을 알 수 있다.

Fig. 2와 3은 각각 양단회전 및 양단고정 아치의 무차원 고유진동수와 아치높이 λ 의 관계를 나타낸 것으로 각 그림의 (a)~(d)는 각각 Winkler지반계수 $k=0, 2, 5, 7$ 에 대한 결과이다. 이 그림들에서 ○, ●로 표시된 값은 $g=0$ 즉, 지반연속성을 고려하지 않은 경우, □, ■는 $g=1$,

Table 1. Comparison of frequency parameter C_1 and C_2 between this study and references

Geometry		Data source	Frequency parameter		Shape
			C_1	C_2	
hinged - hinged	$\lambda=0.$	Present	18.46 (S)*	48.85 (A)	straight beam
	$k=0.5, g=2.$	Ref. [1]	18.46 (S)	48.85 (A)	
	$\lambda=10.$	Present	41.87 (A)	71.85 (S)	arch
$k=2., g=0.$	SAP90	40.87 (A)	70.90 (S)		
clamped - clamped	$\lambda=0.$	Present	28.77 (S)	70.83 (A)	straight beam
	$k=0.5, g=2.$	Ref. [1]	28.10 (S)	68.97 (A)	
	$\lambda=5.$	Present	43.41 (S)	64.72 (A)	arch
$k=2., g=0.$	SAP90	43.16 (S)	62.60 (A)		

* S: symmetric mode, A: antisymmetric mode

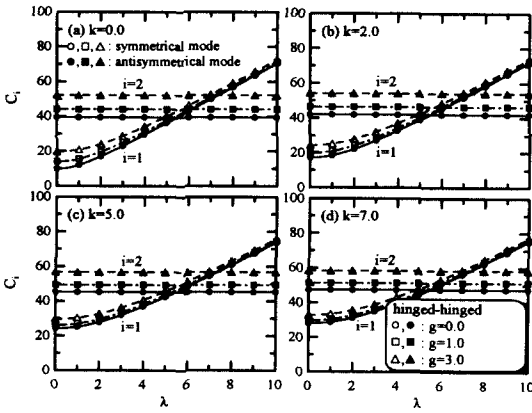


Fig. 2. C_i vs λ curves(hinged-hinged)

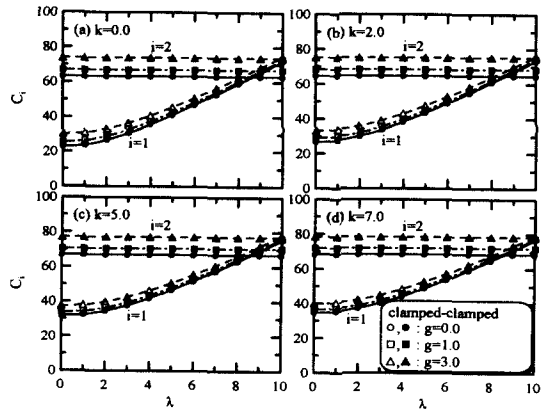


Fig. 3. C_i vs λ curves(clamped-clamped)

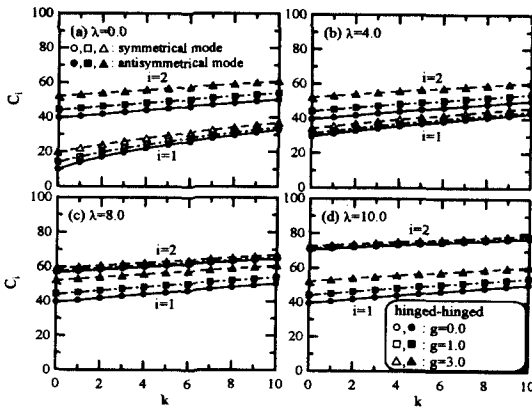


Fig. 4. C_i vs k curves(hinged-hinged)

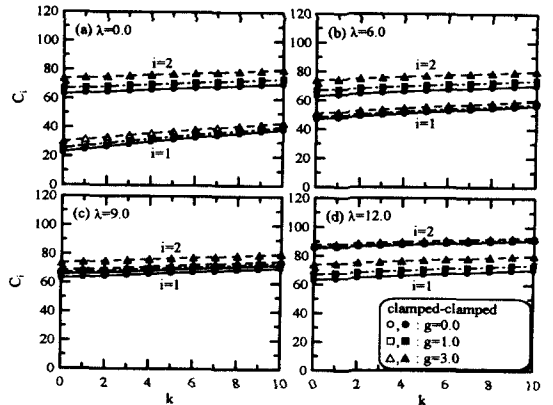


Fig. 5. C_i vs k curves(clamped-clamped)

\triangle , \blacktriangle 는 $g=3$ 에 대한 결과로서 \circ , \square , \triangle 는 대칭진동형, \bullet , \blacksquare , \blacktriangle 는 역대칭진동형에 대한 고유진동수를 나타내고 있다.

Fig. 4와 5는 각각 양단회전 및 양단고정 아치의 무차원 고유진동수와 Winkler지반계수 k 의 관계를 나타낸 것이다. Fig. 4의 (a)~(d)는 각각 $\lambda=0, 4, 8, 10$ 에 대한 결과이며, Fig. 5의 (a)~(d)는 각각 $\lambda=0, 6, 9, 12$ 에 대한 결과이다. 이 그림들에서 기호의 내용은 앞서 Fig. 2와 3에서와 같다. 이 그림에서 Winkler지반계수 k 가 증가하는 경우 고유진동수는 항상 증가함을 알 수 있다.

IV. 결 론

이 논문은 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 자유진동에 관한 연구로서 본 연구결과를 요약 정리하면 다음과 같다.

1) 두 개의 매개변수로 표현되는 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였으며, 유도된 미분방정식에 양단회전 및 양단고정의 단부조건을 갖는 정현아치를 적용하여 Galerkin method로 해석하였다.

2) 대칭 및 역대칭진동형에 대한 최저차 고유진동수 방정식을 산출하여 식 (27) 및 (29)에 제시하였다.

3) 본 연구와 타문헌의 결과를 비교하여 산출된 고유진동수 방정식을 검증하였다.

4) 해석결과로서 무차원 고유진동수와 아치높이, Winkler지반계수, 전단지반계수 사이의 관계를 분석하였다.

본 논문은 한국학술진흥재단의 학술연구비 지원(KRF-98-001-E01895)에 의하여 이루어진 연구결과의 일부로서 재단당국의 연구비 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. 이병구, 1994, "전단층을 갖는 탄성지반위에 놓인 보의 자유진동 해석", 한국강구조학회 논문집, 제6권 제3호, pp.107-115.
2. Yokoyama, T., 1996, "Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations," *Computers & Structures*, Vol. 61, pp.995-1007.
3. Laura, P.A.A. and Maurizi, M.J., 1987, "Recent Research on Vibrations of Arch-Type Structures," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 19, pp.6-9.
4. Selvadurai, A.P.S., 1979, *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier.
5. Simitses, G.J., 1976, *An Introduction to the Elastic Stability of Structures*, Prentice-Hall.
6. Chen, W.F. and Lui, E.M., 1987, *Structural Stability-Theory and Implementation*, Elsevier.
7. Abbas, B.A. and Thomas, J., 1978, "Dynamic Stability of Timoshenko Beams resting on an Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 60, pp.33-44.