선형행렬부등식에 의한 불확실한 선형시스템의 견실한 극점배치

A Robust Pole Placement for Uncertain Linear Systems via Linear Matrix Inequalities

류 석 환
대구대학교 정보통신공학부
shryu@biho.taegu.ac.kr
Seog-Hwan, Yoo
Taegu University, School of Computer and Communication Engineering

ABSTRACT

This paper deals with a robust pole placement method for uncertain linear systems. For all admissible uncertain parameters, a static output feedback controller is designed such that all the poles of the closed loop system are located within the prespecfied disk. It is shown that the existence of a positive definite matrix belonging to a convex set such that its inverse belongs to another convex set guarantees the existence of the output feedback gain matrix for our control problem. By a sequence of convex optimization the aforementioned matrix is obtained. A numerical example is solved in order to illustrate efficacy of our design method.

Key words : Robust Pole Placement, Uncertain Linear System, Linear Matrix Inequality, Convex Optimization

I. 서론

실 매개변수의 불확실성을 가진 선형시스템에 대한 제어기 설계법은 H_∞ 제어이론의 발달과 더불어 최근 많이 연구되고 있다. Xie 등은 실 매개변수 불확실성을 가진 연속형 선형시스템에서 주어진 폐루프 전달함수의 H_∞ 노옴의 크기를 적절한 값 이하로 유지하면서 폐루프 시스템을 점근적으로 안정하게 하는 제어기의 설계법을 2차 안정성(quadratic stability)의 방법을 사용하여 제시하였고[1,2], Souza는 최근 이산형 선형시스템에 대해서 Xie의 결과를 확장하였다[3]. 그러나 [1-3]의 경우에서 외란으로 인한 제어변수의 영향을 가급적 억제하기 위하여 H_∞ 노옴의 크기를 적절한 값 이하로 제한하였지만 이것은 통상 과도응답을 결정하는 제동비, 자연주파수 등을 직접적으로 다루기는 어렵다. 즉 폐루프 시스템의 극점에 대한 정보가 결여되어 있다.

폐루프 시스템의 극점을 설계자가 원하는 임의의 위치에 두게하는 극점배치법이 현대제어 분야

에서 기본적인 방법으로 사용되어 왔지만 실제의 문제에 있어서는 폐루프 시스템 극점이 정확하게 설계자가 원하는 위치에 고정될 필요는 없으며 차라리 안정영역중의 어느 한 부분영역에 위치하여도 충분할 경우가 많다. 예를 들어 ζ를 제동비, w_n을 자연 비제동 주파수라 하고 설계사양이 $\zeta \geq \zeta_{\min}$, $\zeta w_n \geq \alpha$ 로 주어졌다고 가정한다. C(q,r)을 복소평면상에서 중심이 (-q,0)이고 반경이 r인 디스크라 할때 모든 폐루프 극점이 디스크 C(q,r) 내부에 위치하면 설계사양이 만족된다.[4] 단, 여기에서

$$\theta = \cos^{-1}\zeta_{\min},\ q = \frac{\alpha}{1-\sin\theta},\ r = \frac{\alpha\sin\theta}{1-\sin\theta} \quad (1)$$

이다.

Haddad 등은 모든 폐루프 극점이 설계자가 (1)에 의해 주어지는 디스크 C(q,r) 내부에 위치하고 H_2 노옴의 수단으로 정의된 성능지수의 상한치인 보조 성능지수를 최소화하게 하는 제어기의 설계법을 Lagrange 승수법을 사용하여 제시하였다.[4] 그러나 이 경우 설계방정식이 서로 상호 결합된 행렬 방정식으로 주어져 반복법을 이용하여 해를 구해야 하는 단점이 있다. 최근에 G. Garcia 등은 선형 불확실한 시스템을 전 상태 피드백을 이용하여 모든 불확실성하에서 폐루프 극점을 주어진 디스크 C(q,r) 내부에 위치하게 하는 제어법칙을 제시하였다.[5]

본 연구에서는 불확실한 매개변수의 크기가 유계이고 시불변이라는 가정하에 선형시스템을 실 매개변수 불확실성을 가진 선형시스템으로 확장하고 허용된 가능한 모든 매개변수에 대해서 폐루프 극점이 C(q,r) 내부에 위치하게 하는 견실한 출력 피드백 제어기의 설계법을 최근 연구가 활발한 선형행렬 부등식을 사용하여 제시하고자 한다.

II. 문제의 정식화

다음의 실 매개변수 불확실성을 가진 선형시스템을 생각한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A+\Delta A)x + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서 $x \in R^n$는 상태변수, $u \in R^m$는 제어입력, $y \in R^p$는 출력이며 A, B, C는 적절한 차원을 갖는 상수 행렬이고 ΔA는 시스템 행렬에서 매개변수 불확실성을 나타내는 행렬이고 다음 형태의 구조적인 불확실성을 나타낸다고 가정한다.

$$\Delta A = HFE \quad (3)$$

여기에서 $H \in R^{n\times k}$, $E \in R^{k\times n}$는 불확실성의 구조를 나타내는 행렬이고 $F \in R^{k\times k}$는 시불변 대각행렬이며 일반성을 잃지 않고 다음과 같이 크기가 유계인 불확실한 매개변수를 나타낸다.

$$F^T F \leq I \quad (4)$$

이 경우 H, E는 불확실한 구조를 표현하는 데있어서 유일하지가 않으며 임의의 양한정 행렬 $S \in R^{k\times k}$에 대해서 $H_s = HS^{1/2}$, $E_s = S^{-1/2}E$ 역시 다음을 만족한다.

$$\Delta A = H_s F E_s \quad (5)$$

정적 출력 피드백(static output feedback)제어 $u = Ky$를 사용하면 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x} = (A + \Delta A + BKC)x \quad (6)$$

제어문제는 $F^T F \leq I$를 만족하는 모든 불확실한 매개변수에 대해 시스템 (6)의 모든 극점이 디스크 C(q,r)내부에 위치하게 하는 정적 출력 피드백 제어기 $u = Ky$를 설계한다.

q > r 일 경우, 즉 모든 극점이 C(q,r) 내부에 위치할 때 폐루프 시스템이 점근적으로 안정하면 위의 제어문제를 정식화하기 위해 다음의 보조정리 1을 소개한다.

보조정리 1[5]: 다음의 두 조건은 등가이다.

1) 시스템 (6)의 모든 극점이 디스크 C(q,r)내부에 존재한다.

2) 다음의 행렬 부등식을 만족하는 대칭인 $P>0$가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & (A+BKC+\Delta A+qI_n)^T/r \\ (A+BKC+\Delta A+qI_n)/r & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

(증명) 참고문헌 [5]의 정리 1참조.

따라서 보조정리 1을 이용하면 제어문제는 다음과 같이 정식화된다.

제어문제: 모든 허용 가능한 불확실성 ΔA에 대해 식 (7)의 제약조건을 충족하는 출력 피드백 행렬 K를 구하여라.

III. 선형 행렬 부등식

이 절에서는 II 장에서 정의된 제어문제에서 피드백 행렬 K를 구하기 위하여 선형 행렬 부등식 문제로 변환한다.

식 (7)을 다시 쓰면

$$UKV+(UKV)^T+M<0 \quad (8)$$

여기에서

$$U=\begin{bmatrix} 0 \\ B_r \end{bmatrix}, \quad V=[\,C_r \;\; 0\,],$$

$$M=\begin{bmatrix} P^{-1} & (A_r+\Delta A_r)^T \\ A_r+\Delta A_r & P \end{bmatrix},$$

$$A_r=(A+qI_n)/r, \;\; B_r=B/r, \;\; C_r=C,.$$

$$\Delta A_r=H_rS^{1/2}FS^{-1/2}E_r, \;\; H_r=H/\sqrt{r}, \;\; E_r=E/\sqrt{r}.$$

식 (8)의 선형 행렬 부등식에서 M은 불확실한 행렬 ΔA_r이 포함되어 해를 구하기가 어렵다. 따라서 다음의 보조정리 2를 소개한다.

보조정리 2: 다음 식 (9)의 선형 행렬 부등식을 만족하는 K, $P>0$, $S>0$이 존재하면 식 (9)의 해 K, P는 식 (8)의 선형 행렬 부등식을 만족한다.

$$UKV+(UKV)^T+\overline{M}<0 \quad (9)$$

여기에서

$$\overline{M}=\begin{bmatrix} -P^{-1}+E_r^TS^{-1}E_r & A_r^T \\ A_r & -P+D_rSD_r^T \end{bmatrix}.$$

(증명) $F^TF\le I$ 이므로 다음의 행렬 부등식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} E_r^TS^{-1}E_r & -E_r^TF^TD_r^T \\ -D_rFE_r & D_rSD_r^T \end{bmatrix}= \begin{bmatrix} E_r^TS^{-1/2} & 0 \\ 0 & -D_rS^{1/2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & F^T \\ F & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^{-1/2}E_r & 0 \\ 0 & -S^{-1/2}D_r^T \end{bmatrix}\ge 0 \quad (10)$$

따라서

$$\begin{bmatrix} 0 & E_r^TF^TD_r^T \\ D_rFE_r & 0 \end{bmatrix}\le\begin{bmatrix} E_r^TS^{-1}E_r & 0 \\ 0 & D_rSD_r^T \end{bmatrix} \quad (11)$$

이 성립하므로

$$M\le\begin{bmatrix} -P^{-1}+E_r^TS^{-1}E_r & A_r^T \\ A_r & -P+D_rSD_r^T \end{bmatrix}=\overline{M} \quad (12)$$

이다.

다음으로 선형 행렬 부등식 (9)의 해가 존재할 조건과 해를 구하는 방법을 기술한다.

정리 3: 식 (9)의 해가 존재할 필요 충분조건은 (13)의 행렬 부등식의 해 $X>0$가 존재하고 (14)의 행렬 부등식의 해 $Y>0$가 존재하여 $XY=I$를 만족하는 것이다.

1) $T_1(X)<0$ (13)

2) $T_2(Y)<0$ (14)

여기에서

$$X=\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad Y=\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

$$T_1(X)=\begin{bmatrix} B_r^{\perp}(-P+A_rPA_r^T+D_rSD_r^T)B_r^{\perp T} & B_r^{\perp}A_rPE_r^T \\ E_rPA_r^TB_r^{\perp T} & E_rPE_r^T-S \end{bmatrix}$$

$$T_2(Y)=\begin{bmatrix} C_r^{T\perp}(-Q+A_r^TQA_r+E_r^TRE_r)C_r^{T\perp T} & C_r^{T\perp}A_r^TQD_r \\ D_r^TQA_rC_r^{T\perp T} & D_r^TQD_r-R \end{bmatrix}$$

(증명) 선형 행렬 부등식 (9)의 해가 존재할 필요 충분 조건은 참고문헌 [6]의 보조정리 4로 부터 행렬 U, V, $\overline{M}$가 다음의 조건을 만족할 경우이

다.

$$U^{\perp}\overline{M}U^{\perp T}<0,\ \ V^{T\perp}\overline{M}V^{T\perp T}<0 \tag{15}$$

일반성을 잃지 않고

$$U^{\perp}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B_r^{\perp} \end{bmatrix},\ \ V^{T\perp}=\begin{bmatrix} C_r^{T\perp} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{16}$$

이므로 (16)을 (15)에 대입하여 Schur 보수 정리(Schur compliment theorem)을 적용하면

$$\begin{aligned} & B_r^{\perp}(-P+D_rSD_r^T)B_r^{\perp T} \\ & \quad -B_r^{\perp}A_r(-P^{-1}+E_r^TS^{-1}E_r)^{-1}A_r^TB_r^{\perp T} \\ & =B_r^{\perp}(-P+D_rSD_r^T)B_r^{\perp T} \\ & \quad -B_r^{\perp}A_r(-P-PE_r^T(S-E_rPE_r^T)^{-1}E_rP)A_r^TB_r^{\perp T} \\ & =B_r^{\perp}(-P+A_rPA_r^T+D_rSD_r^T)B_r^{\perp T} \\ & \quad -B_r^{\perp}A_rPE_r^T(E_rPE_r^T-S)^{-1}E_rPA_r^TB_r^{\perp T}<0 \end{aligned} \tag{17}$$

(17)의 첫번째 등식은 역행렬 정리(matrix inversion lemma)를 사용하여 전개 되었으며, 두번째 부등식에서 Schur 보수 정리 를 적용하면 (13)의 부등식이 성립 함을 알 수있다. (14)의 부등식도 유사한 밥법으로 증명할 수있으며 상세 증명은 생략한다.

검토: 전 상태 피드백의 경우 $C_r^{T\perp}$가 존재하지 않으므로 식 (13)의 행렬 부등식을 만족하는 $P>0$, $S>0$만 존재하면 식 (9)를 만족하는 K가 존재하고 (13)은 컨벡스(convex)한 제약조건이므로 컨벡스 최적화 기법을 사용하여 $P>0$, $S>0$를 쉽게 구할 수있다. 그러나 출력 피드백의 경우에는 (13)과 (14)는 컨벡스하지만 $PQ=I$, $SR=I$의 제약조건 때문에 컨벡스하지가 않다.

정리 3의 조건을 만족하는 $X>0$, $Y>0$가 주어지면 선형 행렬 부등식 (9)에서 $\overline{M}$가 주어지고 U, V 또한 기지이므로 식 (9)를 만족하는 K를 참고문헌 [7]의 보조정리 2.3을 이용하여 쉽게 구할 수가 있다.

IV. 참고문헌

[1] L. Xie and C. E. de Souza, "Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time varying uncertainties", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37, No. 8, pp. 1188-1191, 1992.

[2] L. Xie, M. Fu and C. E. de Souza, "H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37, No. 8, pp. 1253-1256, 1992.

[3] C. E. de Souza, M. Fu and L. Xie, "H_∞ analysis and synthesis of discrete time systems with time varying uncertainty", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 38, pp. 459-462, 1993.

[4] W. M. Haddad and D. S. Berstein, "Controller design with regional pole constraints", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37, No. 1, Jan. 1992.

[5] G. Garcia and J. Bernussou, "Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 40, No. 1, pp. 184-190, Jan. 1995.

[6] T. Iwasaki and R. E. Skelton, "A unified approach to fixed order controller design via linear matrix inequalities", Proceedings of American Control Conference, pp. 35-39, Baltimore, Maryland, June 1994.

[7] T. Iwasaki and R. E. Skelton, "A complete solution to the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas", Proceedings of American Control Conference, pp. 605-609, San Francisco, California, June 1993.