

# 고차 시스템 제어를 위한 CDM 기법을 이용한 PIDA 제어기 설계

## PIDA Controller Design by CDM for Control of High-Order system

하달영\*, 조용성\*\*, 김승철\*\*, 설재훈\*\*\*, 임영도\*\*\*\*

\* : 동아대학교 전자공학과 석사과정, \*\*: 동아대학교 전자공학과 박사과정, \*\*\* :  
동아대학교 전자공학과 박사, \*\*\*\*: 동아대학교 전기·전자·컴퓨터 공학부 교수

\*Dal-Young, Ha, \*\*Yong-Seong, Cho, \*\*Seong-Chul, Kim,

\*\*\*Jae-Hoon, Sul, \*\*\*\*Young-Do, Lim

부산광역시 사하구 하단동 840번지, 동아대학교 전자공학과 제어연구실

Tel : (051) 200-6733, Fax : (051) 200-7712 e-mail : maverickno1@hanmail.net

Dong-A Univ. Department of Electronic Engineering 840, Hadan-dong, Saha-gu, Pusan,  
604-714, Korea

### Abstract

A design of PIDA(Proportional-Integral-Derivative-Acceleration) controller for the third-order plant using the CDM(Coefficient Diagram Method) is presented. Using CDM, the closed-loop system with the designed PIDA controller can be made stable and satisfied both the transient and steady state response specifications without any adjustment. The effect of output step disturbance can also be lastly rejected. The fast step response of the controlled system can be achieved by reducing the equivalent time constant. The MATLAB's simulation results show that the performances of the designed controlled system using CDM is better than the performance of the controlled system using PIDA controller designed by its own technique.

## I. Introduction

산업현장에서 쓰이는 플랜트는 일반적으로 type 0이거나(3차에서 5차 지상 시스템이거나 데드타임을 가지는 1개의 1차 지상시스템) 또는 type 1(한개 또는 두개의 1차 지상시스템)이다. 대부분의 플랜트는 적절하게 조절된 PID 제어기를 사용하여 제어하거나 설계된다. PID 제어기는 전형적으로 2차 시스템에 적용이 된다. 그러나 3차 또는 고차의 경우 PID 제어기 자체에 존재하는 영점의 수보다 더 많은 수의 영점을 가지고 있기 때문에 뛰어난 응답 특성을 얻기란 불가능하다. 이러한 것을 해결하기 위하여 Jung & R. C. Dorf는 새로운 형태의 PIDA 제어기를 제안함으로써 3차 이상의 고차 시스템 문제를 해결할 수 있었다. 즉 원하는 특성방정식을 얻고 제어기가 포함된 시스템의 전달함수를 구하여 이를 등가로 보고 풀어냄으로써 원하는 PIDA 제어기를 얻을 수 있었다. 그러나 설계된 PIDA 제어기의 0점들의 영향으로 인하여 원하는 지연 응답특성을 만족할 수 없었다. 그러나 제어기 이득은 원하는 형태로 충분히 얻을 수 있었다.

본 논문에서는 Shunji Manabe에 의해 제안된 CDM 기법을 이용하여 PIDA 제어기를 설계하고자 한다. PIDA 제어기의 특성은 제어된 시스템의 속도와 안정성에 기인하는 표준 안정도 지수와 등가시정수로부터 얻어진다. 제어된 시스템의 정상상태 시간이 선택되었을 때, 등가시정수가 결정되어진다. 안정도 지수, 등가 시

정수는 특성 다항식의 각 계수로부터 얻어진다. 이들 계수는 제어기 파라미터의 대수적 형태와 절대적인 관계가 있다. 그러므로 설계된 제어기로부터 안정된 지연, 정상상태 응답을 얻을 수 있다.

본 논문에서는 CDM 기법을 사용하여 PIDA 제어기를 설계하고, 스텝응답 특성을 기존 PIDA 제어기 설계기법(Jung, R. C. Dorf)가 비교 평가한다. 그 결과 기존의 PIDA 제어기 기법에 비해 매우 뛰어난 특성을 얻을 수 있었다.

## II. CDM (Coefficient Diagram Method)

CDM 기법을 사용하여 설계된 제어기는 스텝응답에 대해 고속의 응답과, 안정성, 그리고 강인성을 가지고 있다. 일반적으로, CDM에 의해 설계된 제어기는 플랜트에 비해 낮은 차수로 설계가된다.

Fig. 1은 SISO(Single Input-Single Output)에 대해 CDM 기법을 이용하여 설계된 제어기의 기본 블록 다이어그램을 보여주고 있다. 각 블록의 다항식에서 플랜트의 전달함수는 다음과 같다.

$$A_p(s) = p_k s^k + p_{k-1} s^{k-1} + \dots + p_0 \quad (1a)$$

$$B_p(s) = q_m s^m + q_{m-1} s^{m-1} + \dots + q_0 \quad (1b)$$

그리고 제어기의 다항식은 다음과 같다.

$$A_c(s) = l_\lambda s^\lambda + l_{\lambda-1} s^{\lambda-1} + \dots + l_0 \quad (2a)$$

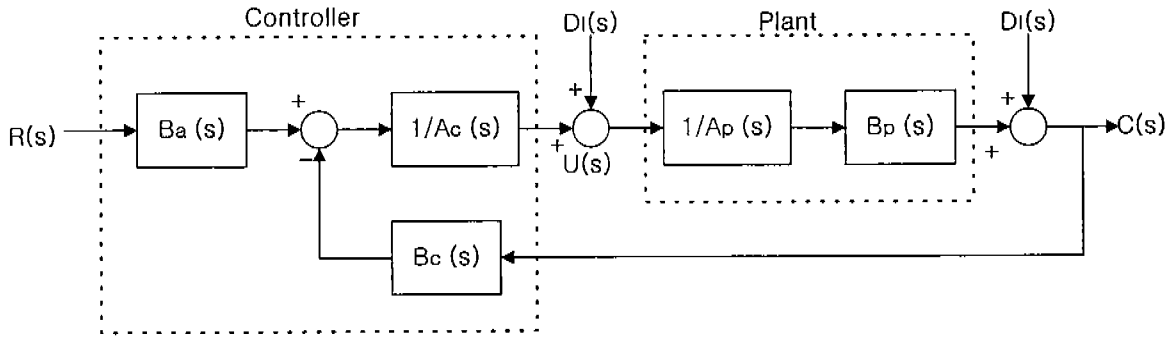


Fig. 1. CDM standard block diagram for the SISO system

$$B_c(s) = k_\lambda s^\lambda + k_{\lambda-1} s^{\lambda-1} + \dots + k_0 \quad (2b)$$

$$B_0(s) = k_0 \quad (2c)$$

여기서,  $\lambda < k$ ,  $m < k$ ,  $B_0(s)$ 는 전보상기로서  $k_0$ 로 선택된다. 이는 스텝응답이 0 정상상태 오차를 가진다. 그러므로 제어기의 전달함수는 2개의 분자 성분을 가지게 된다. 이것을 소위 2 자유도(2 DOF : 2 Degree of Freedom) 시스템 이라고 한다.

그림 1에서 보여준 제어시스템의 특성다항식은 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} P(s) &= A_c(s) A_p(s) + B_c(s) B_p(s) \\ &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 \quad (3) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i s^i \end{aligned}$$

여기서,  $a_0, a_1, \dots, a_n$ 은 특성 다항식의 계수들이다. 안정도 지수  $\gamma_i$ , 등가 시정수  $\tau$ , 그리고 안정도 한계지수  $\gamma_i^*$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\gamma_i = \frac{a_i^2}{a_{i+1} a_{i-1}} \quad (\text{단, 여기서 } i=n-1) \quad (4)$$

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} \quad (5)$$

$$\gamma_i^* = \frac{1}{\gamma_{i+1}} + \frac{1}{\gamma_{i-1}} \quad ; \quad \gamma_0, \gamma_n = \infty \quad (6)$$

앞선 식들을 통하여 안정도 지수의 표준값과 등가시정수는 다음과 같은 형태로 선택된다.

$$t_s = 2.5 \tau \sim 3 \tau \quad (7)$$

$$\gamma_{n-1} = \dots = \gamma_3 = \gamma_2 = 2, \gamma_1 = 2.5 \quad (8)$$

일반적으로 식 7, 8은 원하는 스텝응답과 안정성에 크게 영향을 미친다. 그러나 반드시  $t_s = 2.5 \tau$ ,  $\gamma_2 \sim \gamma_{n-1} = 2$ 로써 선택할 필요는 없다. 즉  $\tau$ 에 대해 다른 식( $t_s = 3 \tau$ )을 선택하거나,  $\gamma_2$  이상을 2.5로 선택해도 무관하다. 안정도 지수 한계 안정도 지수의 상관관계는 다음과 같다.

$$\gamma_i > 1.5 \gamma_i^* \quad (9)$$

만약 아래와 같은 조건식을 만족한다면 안정도 지수를 식 (8)과 같이 사용할 수 있다.

$$p_k / p_{k-1} > \tau / (\gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \cdots \gamma_1) \quad (10)$$

여기서  $p_k$ 와  $p_{k-1}$ 은 제어기의  $k$ 와  $k_{n-1}$ 항에 해당한다. 만약 상기의 조건을 만족하지 못한다면 첫 번째,  $\gamma_{n-1}$ 을 증가시키고, 그런다음  $\gamma_{n-2}$ 를 증가시키는 형태로 하면 된다. 나머지 값들도 마찬가지로 하면된다. 그렇게 하면 (10)을 만족하게 된다. (4) ~ (6) 식으로부터 계수  $a_i$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} a_i &= a_0 \tau^i \frac{1}{\gamma_{i-1} \cdots \gamma_2^{i-2} \gamma_1^{i-1}} \\ &= a_0 \tau^i \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{(\gamma_{i-j})^j} \end{aligned} \quad (11)$$

따라서 특성다항식은 다음과 같이된다.

$$P(s) = a_0 \left[ \left\{ \sum_{i=2}^n \left( \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\gamma_{i-j}^j} \right) (\tau s)^i \right\} + \tau s + 1 \right] \quad (12)$$

### III. CDM을 사용한 PIDA 제어기 설계

Jung 과 Dorf에 의해 제안된 3차 플랜트에 대한 PIDA 제어기의 전달함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G_c(s) &= k_p + \frac{k_i}{s} + \frac{k_d}{(s+d)} s + \frac{k_a}{(s+d)(s+e)} s^2 \\ &= K \frac{(s+a)(s+b)(s+z)}{s(s+d)(s+e)} \end{aligned} \quad (13)$$

그러므로,  $d, e \gg a, b, z$  이면 극점  $d, e$ 는 무시될 수 있다. 그러므로,

$$G_c(s) = \frac{k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s} \quad (14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} k_3 &= K, \quad k_2 = K(a + b + z), \quad k_1 \\ &= K[(a + b)z + ab], \end{aligned}$$

$k_0 = K(abz)$ 이다. 식 (2a)-(2b)를 비교함으로써 (14)번식에서 제어기의  $A_c(s)$  계수는  $l_3 = l_2 = l_0 = 0$ 이고  $l_1 = 1$ 이 된다. 즉 이것은  $A_c(s) = s$ 이고,  $B_c(s)$ 의 계수는 나머지와 동일하다. 그러므로  $A_c(s)$ 는  $s$ 로써 기술되고 이것은 제한적으로 플랜트에 대해 4차식의 형태로 기술된다. 그러므로 3차 제어기는 플랜트에 비해 충분 차수를 갖지 못한다. (차수가 하나 부족하다.)

CDM을 이용하여 PIDA 제어기의 파라미터를 얻는 방법을 요약하면 다음과 같다.

1) 원하는 정상상태 시간  $t_s$ 로부터 등가 시정수  $\tau$ 를 계산한다.

$$t_s = 2.5 \tau \sim 3.5 \tau$$

2) 8식의 표준 안정도 지수로부터 적절한 안정도 지수  $\gamma_i$ 를 선택한다. 일반적으로 Manabe가 설계한 CDM 기법에 의하면  $\gamma$ 계수들은 다음과 같다.

$$\gamma_{n-1} = \cdots = \gamma_3 = \gamma_2 = 2, \quad \gamma_1 = 2.5$$

3) 3식에서부터 14식까지 기술된 PIDA 제어기의 특성 다항식을 유도한다. 그리고 앞선 식에서 구해진  $\tau$ 와  $\gamma$ 를 이용하여 12식의 특성 다항식을 계산한다. 마지막으로 제어기에 대한 각

계수값  $k$ 를 얻는다.

4)  $B_0(s) = k_0$ 로 선택한다.

#### IV. 시뮬레이션 결과

본 절에서는 CDM을 이용하여 설계된 PIDA 제어기의 성능을 Matlab을 이용하여 시뮬레이션해 보았다. 시뮬레이션 결과는 아래와 같다.

- 1) 등가 시정수  $\tau$ 의 변화에 따른 스텝응답을 살펴본다.
- 2) 상수의 왜란에 대한 스텝응답을 살펴본다.
- 3) 플랜트의 파라미터를 변화시키면서 제어기의 스텝응답을 살펴본다.
- 4) CDM에 의해 설계된 PIDA 제어기와 Jung & Dorf 방법에 의해 설계된 PIDA 제어기의 성능 AC 모터에 적용하여 비교한다.

등가 시정수  $\tau$ 변화에 따른 스텝응답 시뮬레이션 설계된 제어기에 대한 원하는 성능을 다음과 같이 설정한다.  $t_s \leq 2$ 초로 설정한다.

##### 4-1. Type 0의 3차 시스템

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+6)}$$

상기의 식을 풀어보면  $G_p(s)$ 는 다음과 같다.

$$G_p(s) = \frac{1}{s^3 + 10s^2 + 27s + 18}$$

먼저, 특성다항식  $P(s)$ 를 계산한다. 앞선식을 사

용하면,

$$A_C(s) = s, \quad B_C(s) = k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0$$

$$A_P(s) = s^3 + 10s^2 + 27s + 18, \quad B_P(s) = 1$$

따라서,

$$\begin{aligned} P(s) &= A_C(s)A_P(s) + B_C(s)B_P(s) \\ &= s(s^3 + 10s^2 + 27s + 18) + k_3s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_0 \\ &= s^4 + s^3(10 + k_3) + s^2(27 + k_2) + s(18 + k_1) + k_0 \end{aligned}$$

가 된다.

따라서 특성방정식은 다음과 같다.

$$P(s) = s^4 + 50s^3 + 1250s^2 + 15620s + 78120$$

앞선 두식을 비교하여 우리는  $k$ 값들을 구할 수 있다.

따라서 우리가 구하고자 하는 PIDA 제어기는 다음과 같이 된다.

$$G_{PIDA}(s) = \frac{2.5s^3 + 51.13s^2 + 226.14s + 305.18}{s}$$

가 된다. 본 논문에서 사용된 각 변수들은 다음과 같다.

$$\gamma_1 = 2.5, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 2, \quad t_s = 0.5$$

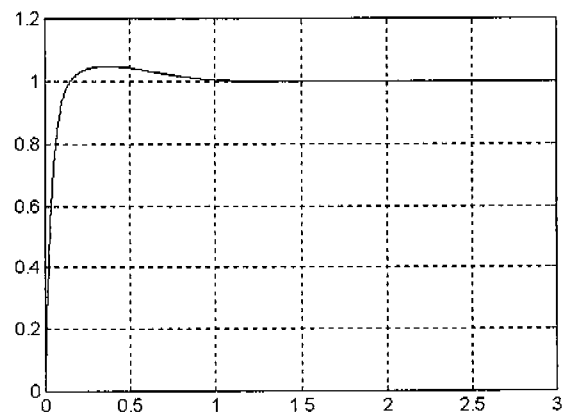


Fig. 2. Output waveform by Jung & Dorf Method

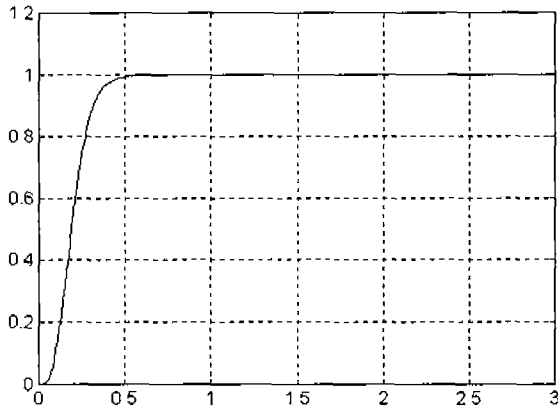


Fig. 3. Output waveform by CDM Method

그림 2는 Jung & Dorf가 제안한 PIDA제어기를 사용한 경우의 출력파형이다. 그림 3은 본 논문에서 제안한 CDM 기법을 사용한 PIDA제어기의 출력파형이다. 그림에서 알 수 있듯이 스텝응답에 따른 출력응답의 경우 본 논문에서 사용한 방법이 오버슈트라든가, 정상상태 도달 시간의 관점에서 기존의 방법보다 우수함을 알 수 있다. 정상상태 시간 변화에 따른 PIDA 제어기의 계수도를 그림 4에 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이  $a_i$  계수가 왼쪽끝 하단으로 감에 따라 증가시정수  $\tau$ 는 작아지고 스텝응답 특성이 매우 빨라짐을 그림 2에서 알 수 있다.

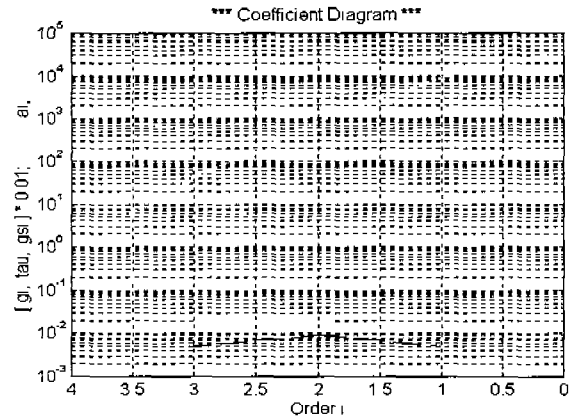


Fig. 4. Coefficient diagram with the variant of  $\tau$

#### 4-2. Type 1의 3차 시스템

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+7)}$$

이 시스템에 대한 풀이도 역시 앞선 시스템과 같은 방법이다.  $t_s$ 의 변화에 따른 PIDA제어기의 형태도 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{33.67s^3 + 861.1s^2 + 9042s + 37680}{s}$$

그림 5는 Jung & Dorf가 제안한 PIDA제어기를 사용한 경우의 출력파형이다. 그림 6은 본 논문에서 제안한 CDM 기법을 사용한 PIDA제어기의 출력파형이다. 그림 5와 6에서 알 수 있듯이 기존의 PIDA제어기를 사용하는 경우 플랜트 극점의 변화에 따라 파형의 급격한 변화를 알 수 있다. 그러나 본 논문에서 사용한 제어기의 출력응답의 경우 플랜트의 변화에 따라 정상상태 시간이 조금 느려질뿐 파형의 급격한

변화는 없다.

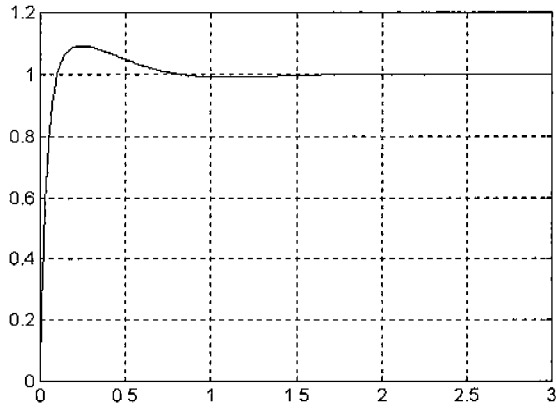


Fig. 5. Output waveform by Jung & Dorf Method

$$G(s) = \frac{40.67s^3 + 868.1s^2 + 9042s + 37680}{s}$$

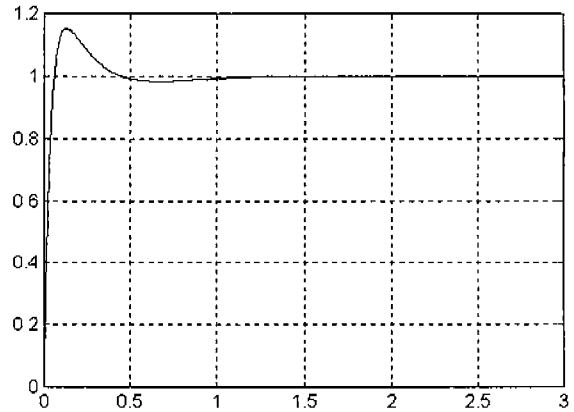


Fig. 7. Output waveform by Jung & Dorf Method

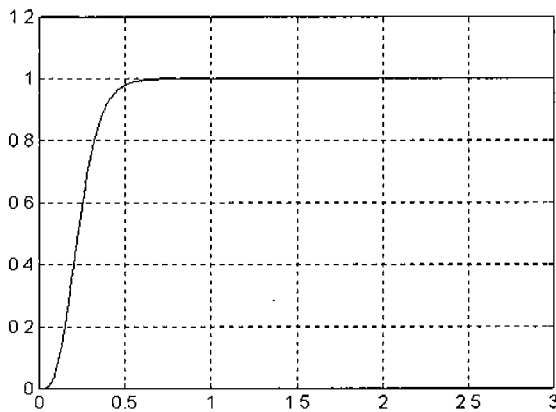


Fig. 6. Output waveform by CDM Method

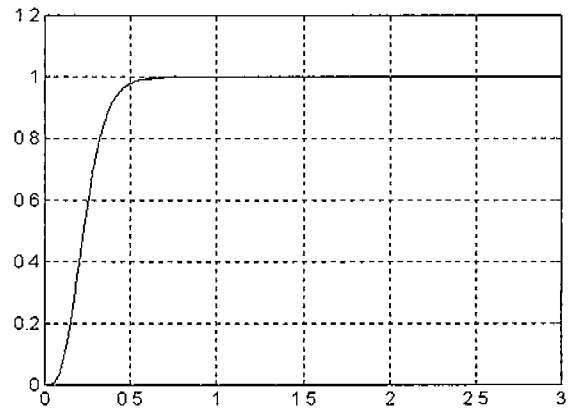


Fig. 8. Output waveform by CDM Method

#### 4-3. Type 2의 3차 시스템

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

이 시스템에 대한 풀이도 역시 앞선 시스템과 같은 방법이다.  $t_s$ 의 변화에 따른 PIDA제어기의 형태도 다음과 같다.

그림 7은 Jung & Dorf가 제안한 PIDA제어기를 사용한 경우의 출력파형이다. 그림 8은 본 논문에서 제안한 CDM 기법을 사용한 PIDA제어기의 출력파형이다.

## V. 결론

본 논문에서는 CDM 기법을 이용하여 PIDA 제

어기를 설계하는 방법을 제안하였다. CDM을 사용함으로써, 요구되는 사양에 맞는 제어기 설계가 가능하였다. 또한 플랜트의 변화에 따라 기존의 PID 제어기의 경우 스텝응답에 따라 출력응답의 급격한 변화를 볼 수 있다. 그러나 본 논문에서 제안한 제어기의 경우 플랜트의 변화에 대해 거의 일정한 형태의 출력응답을 얻을 수 있었다. 그렇지만, 플랜트의 변화나 동가 시정수의 변화에 따라 매우 높은 이득을 요구하기 때문에 매우 조심스럽게 선택하여야만 한다. 이는 곧 실험상에 구현이 불가능하게 되므로 이에 대한 문제 해결이 필요하다.

### 참고문헌

1. J. G. Ziegler and N. B. Nichols, "Optimum settings for automatic controllers", Trans. ASME, vol. 64, pp. 759-768, 1942.
2. E. J. Davison, "A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-11, pp.93-101, JAN 1966.
3. P. N. Paraskevopoulos, "On the design of PID output feedback controllers for linear multi-variable systems", IEEE Trans. on Industrial Electronics and Control Instrumentation, vol. IECI-27, pp. 16-18, Feb, 1980.
4. K. Ogata, Modern Control Engineering, 2nd edition, Prentice Hall, 1990.
5. C. C. Hang, K. J. Åström, and W. K. Ho, "Refinements of the Ziegler-Nichols tuning formula", Proc. IEE, Pt.D., vol. 138, pp. 111-118, 1991.
6. R. C. Dorf and D. R. Miller, "A method for enhanced PID controller design", Journal of Robotics and Automation, vol. 6, pp. 41-47, 1991.
7. R. C. Dorf and R. H. Bishop, Modern Control Systems, 7th edition, Addison Wesley, 1995.
8. R. C. Dorf, S. Jung, J. Dawes, and L. Ng, "An s-plane analytic technique for lead-lag controller design", Proc. of American Control Conference, pp. 2227-2228, Seattle, June, 1995.
10. Seul Jung and Richard C. Dorf, "Analytic PIDA Controller Design Technique for A Third Order System", Proc. of 35th, Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, 1996, pp. 2513-2518
11. Photong Pathm Ngamwiwit Jongkol, Tirasesth Kitt, Komine Noriyuki, Manabe Shunji, "PIDA Controller Design by CDM", Proc. of 13th, KACC, 1998, pp. 395-400