

쌍선형 시스템의 퍼지 제어기 개발

Fuzzy Controller Design for the Bilinear System

이 상 혁

부산대학교 전기공학과, leehyuk@hyowon.pusan.ac.kr

김 주 식

충북대학교 전기공학과, jskim@empire.chungbuk.ac.kr

Sang-Hyuk Lee

Pusan National University, Dept. of Electrical Engineering

Ju-Sik Kim

Chungbuk National University, Dept. of Electrical Engineering

Abstract

본 논문에서는 쌍선형 시스템에 대한 퍼지 제어 기법을 제안하였다. 쌍선형 시스템은 비선형 시스템의 특별한 형태로서, 상태 변수와 입력변수가 곱해진 항 때문에 시스템을 제어하기가 용이하지 않다. 이러한 비선형 때문에 기존의 제어기법을 적용하여도 원하는 성능을 얻기가 쉽지 않다. 또한 쌍선형 시스템을 선형 시스템에 근사화 시켜서 최적해를 구하기 위한 반복적 방법을 이용한 최적제어기법 역시 제안되었으나 이 결과 또한 제한된 시스템에 대하여만 적용이 가능하고 많은 연산이 큰 부담으로 작용한다. 따라서 쌍선형 시스템에 대한 제어기 설계는 활발한 연구결과에도 불구하고 용이하지 않다. 따라서 본 논문에서는 비선형성에 대한 적당한 보상을 퍼지제어 기법을 통하여 제공 하므로써 쌍선형 시스템의 제어 문제를 해결하였다. 또한 설계된 제어기를 모의 실험을 통하여 원하는 성능을 얻을 수 있음을 보였고 기존의 반복적 방법을 통한 최적제어 기법과 비교하였다.

I 서론

쌍선형 시스템의 제어기 설계문제는 시스템이 갖는 특성 때문에 꾸준히 연구되어 왔다. 그러나 상태 변수와 입력변수가 곱해진 항 때문에 시스템을 제어하기가 용이하지 않다.(Cebuhar and Costanza, 1984; Mohler, 1991; Ryan, 1984) 쌍선형 시스템을 비선형 시스템으로 간주하여 제어기를 설계하여도 적절한 성능을 얻을 수 없었고, 선형 시스템으로 근사화 시켜서 최적해

를 구하기 위한 반복적 방법을 이용한 최적제어기법 역시 제안되었으나 이 결과 또한 제한된 시스템에 대하여만 적용이 가능하고 많은 연산이 큰 부담으로 작용한다.(Aganovic and Gajic, 1994; Hofer and Tibken, 1988) 따라서 쌍선형 시스템에 대한 제어기 설계는 활발한 연구결과에도 불구하고 용이하지 않다. 따라서 본 논문에서는 비선형성에 대한 적당한 보상을 퍼지 제어 기법을 통하여 제공 하므로써 시스템의 모델링에 대한 부담을 줄이고 실시간에서

제안된 쌍선형 시스템의 안정성 문제와 제어 문제를 해결하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 다음 장에서는 기존의 제안된 쌍선형 시스템의 제어기법을 소개하였다, 여기서는 다른 쌍선형 시스템의 제어 기법 중 최적해를 구하기 위한 반복적 방법을 이용한 제어 기법을 소개한다. 이상의 방법에서 우리는 만족할 만한 성과를 얻기 위하여 시스템을 근사화하고, 또한 오프라인으로 결과를 저장한 후 제어시스템을 구성하는 복잡한

과정을 유도한다. 이러한 제작상의 문제점을 극복하기 위하여 쌍선형 시스템에 적용하기 위한 퍼지 제어를 제안하였다. 시스템의 입력을 퍼지 제어 기법을 통하여 적절히 선정함으로써 제안된 쌍선형 시스템의 안정도를 보장하도록 하였다. 3장에서는 제안된 제어기에 대한 검토를 하였다.

II 본문

II.1 반복적 연산을 이용한 최적 제어기

다음과 같은 단일 입력을 가진 쌍선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Nu(t)x(t) + Bu(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

여기서 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R$ 그리고 $y(t) \in R^r$ 는 각각 상태변수, 입력변수 그리고 출력 변수이다. 또한 행렬은 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{1 \times n}$, $N \in R^{n \times m}$ 를 만족하는 상수 행렬이다.

최적해를 구하기 위하여 쌍선형 시스템의 평가함수를 다음과 같이 제안한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_{k=0}^{t^f} [x^T(t) C^T Q C x(t) + u(t)^T \bar{R} u(t)] dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) P x(t_f) \quad (2)$$

여기서 t^f 는 최종시간이고, $Q \in R$ 는 출력의 가중치, P 는 최종시간 출력의 가중치이고 또한 $\bar{R} \in R$ 는 입력의 가중치이고 그 값은 각각 $Q \geq 0$, $P > 0$ 그리고 $\bar{R} > 0$ 를 만족한다. 우리는 여기서 최적해를 얻기 위하여 폰트리야진의 최소정의를 이용하여 해밀토니안을 다음과 같이 구성한다.

$$H(x, u, p) = \frac{1}{2} [x^T C Q C x + u^T \bar{R} u]$$

$$+ p^T (Ax + Nux + Bu) \quad (3)$$

여기서 $p(t)$ 는 보조 상태 변수이다. 필요조건을 이용하여 다음과 같은 최적해를 얻을 수 있다. (Lewis, 1986)

$$u = -\bar{R}^{-1} (B + Nx)^T p,$$

또한

$$\dot{x} = Ax - (B + Nx) \bar{R}^{-1} (B + Nx)^T p, \quad (4)$$

를 만족하고

$$[\dot{p}]_i = [C^T Q C x]_i + [A^T p]_i - \frac{1}{2} p^T [N_i \bar{R}^{-1} (B + Nx)^T$$

$$+ (B + Nx) \bar{R}^{-1} N_i^T] p,$$

(5)

가 되며 $[\cdot]_i$ 는 대응 벡터의 i -번째 값이다.

$i = 1, \dots, n.$

최적해를 구성하기 위하여, 리카티 방정식의 해를 구하는 것이 요구 되는데 이러한 리카티 방정식을 구하기 위하여 식 (4)와 (5)를 다음과 같이 다시 정리한다.(Hara and Furuta, 1976)

$$\dot{x} = \tilde{A}x - \tilde{B} \tilde{R}^{-1} \tilde{B}^T p,$$

$$\dot{p} = \tilde{Q}x + \tilde{A}^T p,$$

이 방정식의 경계조건은

$$x(0) \text{ 이고 } p(t^f) = C^T P C x(t^f) \text{ 이다.}$$

또한 $\tilde{A} = [\tilde{A}_{ij}]$ 이고 $\tilde{Q} = [\tilde{Q}_{ij}]$ 일때

$$\tilde{A}_{ij} = A_{ij}$$

$$- \frac{1}{2} [(N_j \bar{R}^{-1} B^T + B \bar{R}^{-1} N_j^T) p(t)];$$

(6)

$$\tilde{Q}_{ij} = [C^T Q C]_{ij}$$

$$- \frac{1}{2} p(t)^T (N_i \bar{R}^{-1} N_j^T + N_j \bar{R}^{-1} N_i^T) p(t) \quad (7)$$

$$\tilde{B} \tilde{R}^{-1} \tilde{B}^T = (B + [xM]) \bar{R}^{-1} (B + [xM])^T$$

$$- \frac{1}{2} ([xM] \bar{R}^{-1} B^T + B \bar{R}^{-1} [xM]^T).$$

(8)

를 만족한다. 이상의 관계식에서 \tilde{A}, \tilde{Q} 그리고 $\tilde{B} \tilde{R}^{-1} \tilde{B}^T$ 는 $x(t)$ 와 $p(t)$ 의 함수이므로 다음과 같은 형태의 반복 연산을 갖는 식으로 정의한다.

$$\dot{x}^{(j+1)}(t) = \tilde{A}^{(j)} x^{(j+1)}(t)$$

$$- \tilde{B}^{(j)} \bar{R}^{-1} \tilde{B}^{(j)T} p^{(j+1)}(t), \quad (9)$$

$$x^{(j+1)}(0) = x^0$$

그리고

$$\dot{p}^{(j+1)}(t) = - \tilde{Q}^{(j)} x^{(j+1)}(t) - \tilde{A}^{(j)T} p^{(j+1)}(t), \quad (10)$$

$$p^{(j+1)}(t^f) = C^T \bar{P} C x^{(j+1)}(t^f).$$

보조상태를 $p(t) = S(t)x(t)$ 와 같이 정의하여 (9)와 (10)의 해는 다음과 같이 유도된다.

$$\dot{S}^{(j+1)}(t) = \tilde{A}^{(j)T} S^{(j+1)}(t) + S^{(j+1)}(t) \tilde{A}^{(j)}$$

$$- S^{(j+1)}(t) \tilde{B}^{(j)} \bar{R}^{-1} \tilde{B}^{(j)T} S^{(j+1)}(t) + \tilde{Q}^{(j)}, \quad (11)$$

간단하게 반복적 방법을 이용한 해를 제시하면, (11)와 (3-25)의 반복적 해를 이용하여 (9)과 (10)의 반복해를 다음과 같은 절차를 통하여 얻는다.

반복적 방법을 통하여 얻어지는 최적해를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u^{(j+1)}(t) = - \bar{R}^{-1} (B + \langle x^{(j+1)}(t) N \rangle)^T S^{(j)}(t) x^{(j+1)}(t)$$

먼저 초기값 $\tilde{A}^{(0)}, \tilde{Q}^{(0)}$ 그리고

$\tilde{B}^{(0)} \bar{R}^{-1} \tilde{B}^{(0)T}$ 으로 부터 $\tilde{A}^{(j)}, \tilde{Q}^{(j)}$ 그리고

$\tilde{B}^{(j)} \bar{R}^{-1} \tilde{B}^{(j)T}$ 의 결과를 얻을 수 있다. 여기서 $j = 0, 1, \dots$.

step1 :

$$\begin{aligned}
 -\dot{S}^{(j+1)}(t) &= \tilde{A}^{(j)T} S^{(j+1)}(t) + S^{(j+1)}(t) \tilde{A}^{(j)} \\
 &\quad - S^{(j+1)}(t) \tilde{B}^{(j)} \bar{R}^{-1} \tilde{B}^{(j)T} S^{(j+1)}(t) \\
 &\quad + \tilde{Q}^{(j)}
 \end{aligned}$$

$$\text{and } P^{(j)}(t^j) = C^T P C,$$

첫번째, $S^{(j)}(t)$ 는 오프라인에서 구해지고 저장된다. 이상의 결과로부터 $x^{(j+1)}(t)$ 가 구해지고

$$\begin{aligned}
 \text{step 2} \quad & u^{(j+1)}(t) = -\bar{R}^{-1} (B + \langle x^{(j+1)}(t) N \rangle)^T \\
 & S^{(j)}(t) x^{(j+1)}(t).
 \end{aligned}$$

제어입력 $u^{(j+1)}(t)$ 를 구할 수 있다. 만약 $u^{(j)}(t)$ 와 $u^{(j+1)}(t)$ 의 차이가 미리 설정한 범위안에 설정되면, 반복연산을 중지하고 그때의 값을 취한다. 만약 범위안에 포함되지 않으면 $\tilde{A}^{(j+1)}$, $\tilde{Q}^{(j+1)}$ 와 $\tilde{B}^{(j+1)} \bar{R}^{-1} \tilde{B}^{T(j+1)}$ 를 다시 구성한다. 새로운 $\tilde{A}^{(j+1)}$, $\tilde{Q}^{(j+1)}$ 와 $\tilde{B}^{(j+1)} \bar{R}^{-1} \tilde{B}^{T(j+1)}$ 를 구성하기 위하여 $p^{(j+1)}(t)$ 와 $x^{(j+1)}(t)$ 가 필요하다. $x^{(j+1)}(t)$ 는 (3-26)를 통하여 구성되며, $p^{(j+1)}(t)$ 는 관계식 $p(t) = S(t)x(t)$ 을 이용하여 구성한다.

$$\text{step 3 : } p^{(j+1)}(t) = S^{(j)}(t) x^{(j+1)}(t).$$

II.2 쌍선형 시스템의 퍼지 제어기 설계

이상의 결과로부터 우리는 최적해를 구하기 위하여 많은 연산과 제한된 조건하에서 해를 구할 수 있음을 알 수 있었다. 따라서 이상의 결과를 퍼지 제어에 적용할 경우 많은 반복 연산

을 피할 수 있게 되어 연산 면에서 유리하고 실시간 제어를 할 수 있다는 측면에서도 유용한 결과를 도출 할 수 있다.

먼저 제안한 쌍선형 시스템을 다시 나타내자.

$$\dot{x} = Ax + Nux + Bu,$$

$$(1)$$

$$y = Cx$$

여기서 행렬 A 와 N 은 상수행렬이고, 단일 입력시스템이므로 시스템의 안정도를 결정하는 행렬 $\bar{A} = A + A_u(t)$ 의 고유치를 결정지을 수 있다. 여기서 $A_u(t) = Nu$ 로 근사화 시킨다. $A_u(t)$ 는 상태 변수 $x(t)$ 에 의존하므로 상태변수 값을 이용하여 제어를 설계하고자 한다. 우리는 가정하는 시스템에 대하여 다음과 같은 가정한다.

가정1. 시스템 (1)의 상태를 안정화시킬 수 있다.

가정2. 시스템의 상태변수의 값을 알 수 있다.

가정1의 경우, 비선형 시스템의 가 제어성을 Mohler(1973)의 정의에 따르도록 한다. 이 경우, 행렬 (A, B) 와 (N, B) 가 가제어 하다. 가정2의 경우 역시 쌍선형 관측기를 통하여 관측기를 구성할 수 있다고 가정한다.(Funahashi, 1979; Svoronos, Stephanopoulos and Aris, 1981; Hara and Furuta, 1976)

이 쌍선형 시스템은 여러 동작점에서 함수를 선형화 함으로서 퍼지 모델로 표현할 수 있고 각 모델은 IF THEN 규칙으로 표현 되는데 전체 시스템은 각각의 국부 모델의 집합이라고 할 수 있다. i 번째 퍼지 모델을 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

퍼지 모델 i : IF $x_1(t)$ is M_1^i and ...and $x_n(t)$ is M_n^i ,

T H E N

$$\dot{x} = (A + Nu)x + B_i u, \quad i = 1, \dots, q.$$

여기서 $M_j^i, j=1, \dots, n$ 은 i 번째 퍼지 집합이고 q 는 규칙의 수이다. 이상과 같이 표현된 퍼지 모델에 대하여 다음과 같은 i 번째 제어기 규칙을 나타낸다.

제어기 룰 i : IF $x_1(t)$ is M_1^i and ...and $x_n(t)$ is M_n^i ,

T H E N

$$u = -\bar{R}^{-1}(B + Nx)^T S_i x, \quad i = 1, \dots, q.$$

이 제어입력은 시스템의 안정성을 보장하기 위한 최적해의 구조이며 여기서 S 는 리카티 방정식의 해이며 다음을 만족한다.

$$0 = \bar{A}_i^T S_i + S_i \bar{A}_i - S_i \bar{B}_i \bar{R}^{-1} \bar{B}_i^T S_i + \bar{Q}_i$$

먼저 시스템의 특성방정식은 u 에 대한 함수로 표현하므로 상태변수 x 값에 의하여 u 의 값을 퍼지 논리로 구성하여 상태방정식의 해를 원하는 위치에 놓이게 한다. 그러나 이제 적용하려고 하는 과열기 시스템의 경우 상태값뿐만 아니라 기지의 입력값 또한 고려해야 한다.

II.3 예제

쌍선형 시스템의 전형적인 형태인 열교환 시스템중 과열기 시스템에 대하여 고려하고자 한다. 고려하는 열교환 시스템을 다음과 같이 나타낸

다.(Lee, Kong and Seo, 1997)

$$\dot{x} = (A_0 + w_z A_1 + u A_2)x + Bu + Dv \quad (12)$$

여기서 x 는 상태변수인 과열증기온도, u 는 제어 입력인 냉각수의 흐름률, 그리고 w_z 는 입력증기의 유입량으로서 측정 가능한 기지의 입력이다. 또한 v 는 미지의 입력으로서 외부가스의 온도이다. 이상에 대하여 각행렬은 다음을 만족하다.

$$A_0 = \text{diag}[-a_1],$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & -a_2 & 0 \\ 0 & \cdots & a_2 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_1,$$

$$B_0 = [b_1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T, \quad D = \text{diag}[d],$$

$$\text{여기서 } a_1 = \frac{A_1 \alpha_{ms} A_2 \alpha_{gm}}{(A_1 \alpha_{ms} + A_2 \alpha_{gm}) V \rho C_p},$$

$$a_2 = \frac{1}{V \rho}, \quad b_1 = \frac{C_{pd} T_d}{V \rho C_p},$$

$$d = -\frac{A_1 \alpha_{ms} A_2 \alpha_{gm}}{(A_1 \alpha_{ms} + A_2 \alpha_{gm}) V \rho C_p}.$$

ρ : 증기의 밀도 (kg/m^3).

T_d : 냉각수 온도 ($^{\circ}C$)

C_p, C_{pd} : 증기와 냉각수의 비열 ($kcal/kg^{\circ}C$)

A_1, A_2 : 가열내부 외부의 면적 (m^2)

α_{ms}, α_{gm} : 금속에서 증기/외부가스에서 금속으로의 열 전달률 ($kcal/m^2 s^{\circ}C$)

V : 증기의 체적 (m^3)

C_m : 금속의 비열 ($kcal/kg^{\circ}C$)

를 만족한다.

우리는 제어입력 u 의 양을 상태변수인 과열증기 온도, 입력증기의 유입량 그리고 입력증기의 온도

를 통하여 구성한다.

제어기 를 i : IF $x_1(t)$ is M_1^i andand

$x_n(t)$ is M_n^i

and w_i^1 is W_1^i and and w_i^n

is W_n^i

and T_i^1 is \overline{T}_1^i and and

T_i^n is \overline{T}_n^i

T H E N

$u = -\overline{R}^{-1}(B + Nx)_i^T Sx, i=1, \dots, q.$

이상의 결과로부터 시뮬레이션을 통하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

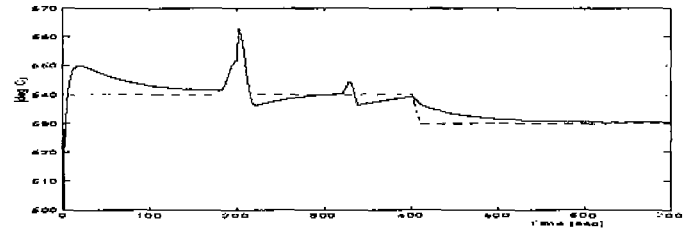
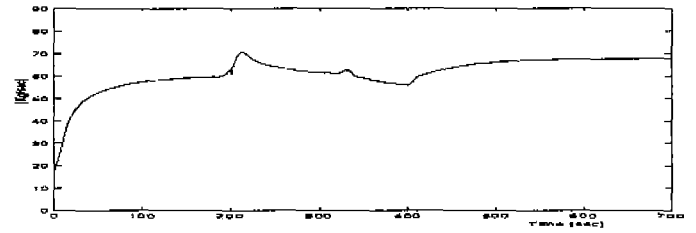


그림5. 시스템 출력

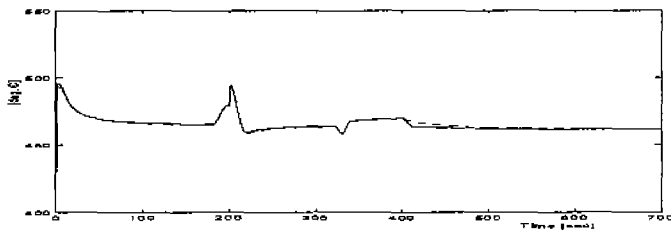


그림1. 쌍성형 관측기를 이용한 증기온도

그림 1의 경우는 증기온도를 관측기를 통하여

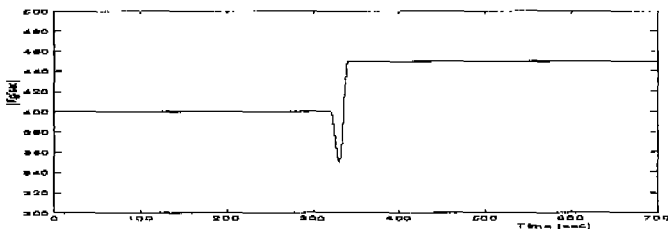


그림2. 유입증기의 흐름률

추정한 결과를 나타냈다. 그리고 그림 2, 3 은

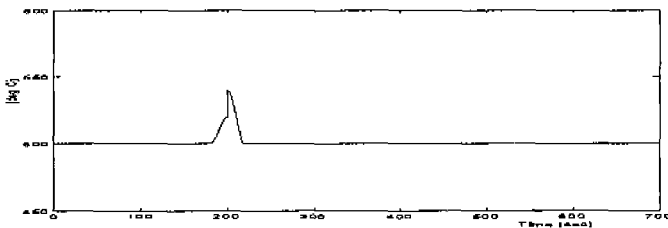


그림3. 유입증기 온도

그림4. 냉각수 유입량

시스템에 가해지는 기지의 입력부분인 유입증기의 유입량과 온도이다. 그림 4의 경우 시스템

의 제어입력이고 그림 5의 경우 시스템의 출력을 나타내었다. 결과에서 보듯 시스템의 출력이 적절히 제어됨을 확인할 수 있다.

III 결론

우리는 본 논문에서 쌍선형 시스템의 안정도를 보장하는 퍼지제어기를 설계하였다. 쌍선형 시스템의 경우 선형성을 일부 가지고 있는 비선형 시스템으로서 시스템 근사화를 통하여 최적 제어기를 구성할 경우, 많은 연산의 부담을 갖고 있다. 따라서 연산의 부담을 제안된 퍼지 제어기를 통하여 해결하고 원하는 성능을 얻을 수 있었다. 또한 전형적인 쌍선형 시스템인 과열기 모델에 적용하여 시스템의 출력을 적절하게 제어 할 수 있음을 보였다.

IV 참고문헌

[1] Aganovic, Z. and Z. Gajic (1994). The Successive Approximation Procedure for Finite-Time Optimal Control of Bilinear Systems, *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-39, No. 9, pp. 1932-1935.

[2] Cebuhar, W.A. and V. Costanza (1984). Approximation Procedures for the Optimal Control of Bilinear and Nonlinear Systems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 43, No. 4, pp 615-627.

[3] Funahashi, Y. (1979). Stable State Estimator for Bilinear Systems, *Int. J. Control*, Vol. 29, No. 2, pp. 181-188.

[4] Hara, S. and K. Furuta (1976). Minimal Order State Observers for Bilinear Systems, *Int. J. Control*, Vol. 24, No. 5, pp. 705-718.

[5] Hofer, E.P. and B. Tibken (1988). An

Iterative Method for the Finite-Time Bilinear-Quadratic Control Problem, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 57, No. 3, pp. 411-427.

[6] Lee, S.H., J.S. Kong and J.H. Seo (1997). Observer for Bilinear Systems with Unknown Inputs and Application to Superheater Temperature Control, *Journal of IFAC, Control Engineering Practice*, Vol. 5, No. 4, pp. 493-506.

[7] Lewis, F.L. (1986). *Optimal Control*, John Wiley & Sons.

[8] Mohler, R.R. (1991). *Nonlinear Systems Application To Bilinear Control*, Prentice-Hall.

[9] Ryan, E.P. (1984). Optimal Feedback Control of Bilinear Systems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 44, No. 2, pp. 333-362.

[10] Svoronos, V., G. Stephanopoulos and R. Aris (1981). On Bilinear Estimation and Control, *Int. J. Control*, Vol. 34, No. 4, pp. 651-684.