

LMI를 이용한 불확실 비선형 시스템의 강인한 퍼지 제어기 설계

Design of Robust Fuzzy Controller For Nonlinear System with Uncertainty Using LMI

전 상 원, 주 영 훈, 이 호재*, 박 진배*
군산대 전자정보공학부, 연세대 전기 및 컴퓨터공학과*

Sang-Won Jeon, Young-Hoon Joo, Ho-Jae Lee*, Jin-Bae Park*
School of Electronics & Info. Eng.. Kunsan Univ.
*Dept. of Electrical & Computer Eng.. Yeon-Se Univ

Abstract - This paper proposed design of robust fuzzy controller for nonlinear systems in the presence of parametric uncertainties. In the design procedure, we represent the nonlinear system using Takagi-Sugeno fuzzy model. A sufficient condition of the robust stability is presented in the sense of Lyapunov for the TSK fuzzy model with uncertainties. Finally, the effectiveness of proposed controller has been through a result of numerical simulation.

I. 서론

일반적으로 TSK 퍼지 모델은 비선형 시스템을 모델링 하기에 가장 적합한 모델로 알려져 있고, 퍼지 규칙의 후반부에 선형 함수를 쓸 수 있어서, 종래의 선형 시스템 이론으로 비선형 시스템의 해석이 가능하다. 또, 다양한 종류의 TSK 퍼지 모델 기반 제어기가 제안되어 왔다. 하지만 설계자가 무시했을 수도 있는 플랜트의 파라미터 변화나 예측할 수 없는 일이 발생했을 경우에는 제어기의 성능을 보장할 수 없다. 본 논문에서는 이러한 점을 고려하여, 비선형 시스템을 불확실성을 포함한 TSK 퍼지 모델을 제안하고, 리아프노프(Lyapunov) 안정도 분석에 근거하여 시스템을 안정하게 하는 강인 안정화 조건을 제시, 이 조건에 적합한 제어기 설계기법을 제안한다.

본 논문의 구성은 2.1절에서 불확실 TSK 퍼지모델의 소개, 2.2절에서는 비선형 시스템의 불확실성을 포함한 TSK 퍼지 모델링 제안, 2.3절에서 불확실 TSK 퍼지 모델의 강인 안정화 조건 제시한다. 2.4절에서는 모의실험 결과고찰, 마지막으로 3절에서 결론을 맺는다.

II. 본론

2.1 불확실 TSK 퍼지 모델

일반적인 전력 계통 시스템은 다음과 같이 불확실성을 포함한 연속시간 비선형 동적 시스템으로 표현한다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \Delta f(x(t)) + (g(x(t)) + \Delta g(x(t)))u(t) + d \quad (1)$$

여기서, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 는 상태 벡터, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 는 제어 입력 벡터, $f(x(t)) \in \mathbb{R}^n$ 와 $g(x(t)) \in \mathbb{R}^n$ 는 비선형 벡터 함수, 그리고, $\Delta f(x(t))$ 와 $\Delta g(x(t))$ 는 불확실 벡터 함수이고, $d \in \mathbb{R}^n$ 는 바이어스 상수 행렬이다. 이런 비선형 불확실 시스템은 다음과 같은 TSK 퍼지 모델로 표현할 수 있다.

Plant Rule i :

$$\begin{aligned} \text{IF } x_1(t) \text{ is } \Gamma_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t) \text{ is } \Gamma_n^i \\ \text{THEN } \dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) + d_i \\ i = 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서 $\Gamma_i^j(x(t))$ 는 퍼지 집합, ΔA_i 와 ΔB_i 는 비선형 시스템에서 파라미터의 불확실성을 나타내는 시변 행렬들이다. 그리고 $d_i \in \mathbb{R}^n$ 는 i 번째 규칙에서 부 모델의 바이어스 상수 벡터이다. q 는 TSK 퍼지 모델에서 규칙의 개수이다. (2)와 같은 규칙으로 구성되는 TSK 퍼지 시스템의 비퍼지화 출력은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i(x(t))((A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) + d_i) \quad (3)$$

여기서,

$$w_i(x(t)) = \prod_{j=1}^n \Gamma_j^i(x_j(t)), \quad \mu_i(x(t)) = \frac{w_i(x(t))}{\sum_{i=1}^q w_i(x(t))}$$

이고, $\Gamma_i^j(x_j(t))$ 는 상태변수 $x_j(t)$ 가 퍼지집합 Γ_i^j 에서의 속의 정도를 나타낸다.

TSK 퍼지 모델로 표현된 시스템을 제어하기 위하여 다음과 같은 퍼지 규칙으로 표현되는 TSK 퍼지 모델 기반 상태 피드백 제어기는 다음과 같이 정리된다.

Controller Rule i :

$$\begin{aligned} \text{IF } x_1(t) \text{ is } \Gamma_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t) \text{ is } \Gamma_n^i \\ \text{THEN } u(t) = K_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 는 설계해야 할 상수 제어 이득이다. 그러나 플랜트 규칙(2)는 불확실 행렬을 포함한 형태이므로 제어 이득 행렬, K_i 를 구하기는 쉽지 않다. 본 논문에서는 시변 불확실 행렬 ΔA_i , ΔB_i 를 제거하여 제어 이득 행렬, K_i 의 계산을 용이하게 하기 위해 다음과 같이 가정한다.[1]

가정 1 파라미터의 불확실성에 대한 고려는 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$[\Delta A_i, \Delta B_i] = D_i F_i(t) [E_{1i}, E_{2i}]$$

여기서 D_i, E_{1i}, E_{2i} 는 알려진 적당한 차수의 실수 형태 상수 행렬이고, $F_i(t)$ 는 $F_i(t)^T F_i(t) \leq I$ 의 조건을 만족하는 lebesgue 측정 가능한 행렬 함수이다. 또한, I 는 적절한 차수를 가지는 단위 행렬이다.

2.2 비선형 시스템의 퍼지 모델링

본 절에서는 비선형 시스템의 퍼지 모델링을 Fig 1과 같은 단일 링크 유연 로봇에 적용한다. 단일 링크 유연 로봇의 동역학은 식(5)과 같이 표현한다.

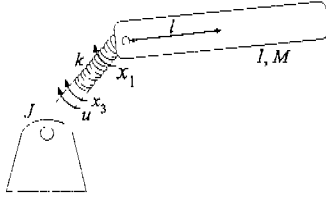


Fig 1 One-link flexible robot

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{Mgl}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I} (x_1 - x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{k}{J} (x_1 - x_3) + \frac{1}{J} u \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, M 은 링크의 질량, I 는 링크의 관성, l 은 링크의 길이, k 는 관절과 연결된 스프링의 탄성, J 는 구동부 축의 관성, g 는 중력가속도이다. 비선형 시스템(5)에서는 $\sin x_1$ 꼴의 비선형 요소를 포함하고 있다. 이 비선형 요소를 선형 시스템의 가중치 합으로 표현하기 위해 다음과 같이 정리한다.

정리 1. $x(t) \in [M_1, M_2]$ 이라고 가정하면, 비선형 요소 $f(x(t)) = \sin(x(t))$ 에 대하여 다음과 같이 선형 시스템의 가중치 합으로 표현할 수 있다.

$$f(x(t)) = \left(\sum_{i=1}^2 \mu_i g_i(x(t)) \right) x(t)$$

여기서,

$$\begin{aligned} g_1(x(t)) &= 1, \quad g_2(x(t)) = \alpha, \\ \mu_1 &= \Gamma_1, \quad \mu_2 = \Gamma_2 \\ \Gamma_1 &= \frac{\sin(x(t)) - \alpha x(t)}{(1-\alpha)x(t)}, \\ \Gamma_2 &= \frac{x(t) - \sin(x(t))}{(1-\alpha)x(t)}, \quad \text{for } x(t) \neq 0 \\ \Gamma_1 &= 1, \quad \Gamma_2 = 0, \quad \text{for } x(t) = 0 \end{aligned}$$

그리고 $\alpha = \sin^{-1}(\max(M_1, M_2))$ 이다.

정리 1을 이용하여 불확실 비선형 시스템 (5)를 TSK 퍼지 모델링 하면,

Plant Rules:

IF $x(t)$ is about M_1 THEN $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$

IF $x(t)$ is about M_2 THEN $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$ (6)

여기서,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{Mgl}{I} - \frac{k}{I} & 0 & \frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{J} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha Mgl}{I} - \frac{k}{I} & 0 & \frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{J} \end{bmatrix}$$

참고 1 단일 링크 유연 로봇의 TSK 퍼지 모델(6)은 시스템의 비퍼지화된 출력이 실제 비선형 시스템과 일치하므로 모델링 불확실성이 존재하지 않는 한 정확한 TSK 퍼지 모델이다.

2.3 불확실 TSK 퍼지 시스템의 강인 안정화

본 절은 불확실 TSK 퍼지 모델의 강인 안정화를 위한 충분조건을 제시한다. 우선, 불확실한 파라미터를 가진 연속 TSK 퍼지 시스템을 다음과 같은 식으로 설명하자.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t)) (A_i + \Delta A_i) x(t) + (B_i + \Delta B_i) u(t) \quad (7)$$

참고 2 동적 시스템(7)은 비선형 전역 시스템의 TSK 퍼지 시스템(3)에서 상수 바이어스 상수 행렬 d_i 를 생략한 형태이다. 상수 행렬 d_i 의 유계는 항상 존재하므로, 동적 시스템(7)이 점근적으로 안정하다면 시스템(3)의 유계는 항상 존재한다.

시스템(7)의 강인 안정화를 위해서 다음과 같은 TSK 퍼지 모델 기반 상태 궤환 제어기를 설계한다.

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t)) K_i x(t) \quad (8)$$

시스템(7)과 제어기(8)로 이루어지는 폐루프 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(x(t)) \mu_j(x(t)) (A_i + \Delta A_i \\ &\quad + (B_i + \Delta B_i) K_j) x(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i^2(x(t)) (A_i + \Delta A_i + (B_i + \Delta B_i) K_i) x(t) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} \mu_i(x(t)) \mu_j(x(t)) \left(\frac{A_i + \Delta A_i + (B_i + \Delta B_i) K_i}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_j + \Delta A_j + (B_j + \Delta B_j) K_j}{2} \right) x(t) \end{aligned} \quad (9)$$

시스템 파라미터의 불확실성을 포함하는 TS 퍼지 모델의 점근적 안정성을 보장하는 충분 조건은 다음과 같이 정리할 수 있다.

정리 2 다음 두 개의 선형행렬부등식(LMI)을 만족하는 양한정 대칭행렬 P 와 행렬 K_i 와 적절한 양의 상수 ε_{ij} , ($i, j = 1, \dots, q$)가 존재한다면, TSK 퍼지 시스템(8)은 TSK 퍼지 모델 기반 상태 궤환 제어기(9)에 의해서 점근 안정하다.

$$(a) \begin{bmatrix} \Psi_{ii} & * & * \\ E_{1i} Q + E_{2i} M_i & -\varepsilon_{ii} I & * \\ D_i^T & 0 & -\varepsilon_{ii}^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad (1 \leq i \leq q),$$

$$(b) \begin{bmatrix} Y_{ij} & * & * & * & * \\ E_{1i} Q + E_{2i} M_j & -\varepsilon_{ij} I & * & * & * \\ E_{1j} Q + E_{2j} M_i & 0 & -\varepsilon_{ij} I & * & * \\ D_i^T & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1} I & * \\ D_j^T & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad (1 \leq i \leq j \leq q),$$

여기서, $\Psi_{ii} = Q A_i^T + A_i Q + M_i^T B_i^T + B_i M_i$,

$$Y_j = QA_i^T + A_iQ + QA_i^T + A_iQ + M_i^T B_i^T + B_i M_i + M_i^T B_i^T + B_i M_i$$

$$Q = P^{-1}, M_i = K_i P^{-1} \text{ 이고, *는 전치 요소를 나타낸다.}$$

증명 : 참고문헌[2] 참조

참고 2 정리 2의 두 번째 LMI 중, 첨자(i, j)로 구성되는 LMI는 모든 시간 $t \geq 0$ 에 대하여 $\mu_i(x(t))\mu_j(x(t))=0$ 이면, 시스템의 안정도를 판별하기 위해서 고려할 필요가 없다.

참고 3 정리 2에서 임의로 정한 D_i 와 E_j 는 불확실성을 표현하기 위한 임의의 행렬들이나, 이러한 요소들은 일반적으로 제어기의 성능에 영향을 미칠 수 있다.

2.4 모의 실험

본 절에서는 불확실성을 포함하는 단일 링크 유연 로봇의 강인 퍼지 제어기의 설계에 대한 예를 보인다. 모의 실험을 위하여 다음과 같이 파라미터를 참고문헌[3]에서 차용한다.

$$I = 0.03 \text{ kg-m}^2, \quad M = 0.2687 \text{ kg}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2,$$

$$L = 1 \text{ m}, \quad k = 31 \text{ N/m}, \quad J = 0.004 \text{ kg-m}^2.$$

정리 1의 $x(t) \in [M_1, M_2]$ 라는 가정에서 M_1, M_2 는 각각 $[-2.85, 2.85]$ 로 정하고, 설계파라미터 α 는 0.1로 정한다. 또 시스템 파라미터는 30%의 불확실성을 갖는 것으로 가정한다. 가정 1에 의하여 시스템의 파라미터의 불확실성을 표현하는 행렬들은 다음과 같이 정한다.

$$D_1 = \frac{10}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{I} & \frac{MgL}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{J} & \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad E_{11} = \frac{3}{10} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \frac{10}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{I} & \frac{\alpha MgL}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{J} & \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \frac{3}{10} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{21} = E_{22} = \frac{3}{10} [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T.$$

정리 2을 이용, 제어기 이득행렬을 구하면 다음과 같다.

$$K_1 = [-4.8256 \quad -10.5644 \quad -123.1353 \quad -0.9452],$$

$$K_2 = [-4.7085 \quad -10.4402 \quad -121.7476 \quad -0.9342].$$

또한 단일링크 유연 로봇의 TSK 퍼지 모델의 안정성을 보장하는 양한정 대칭행렬 P는 다음과 같다.

$$P = 1.0e+006 \times \begin{bmatrix} 0.0003 & -0.0042 & 0.0003 & 0.0032 \\ -0.0042 & 0.1400 & -0.0093 & -0.3257 \\ 0.0003 & -0.0093 & 0.0011 & -0.0378 \\ 0.0032 & -0.3257 & -0.0378 & 8.7353 \end{bmatrix}$$

따라서 본 논문에서 제안한 방법이 리아프노프의 의미에서 안정하다는 것을 의미한다. 시스템의 상태 변수 초기값이

$x(0) = \left[\frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{6} \quad -\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{6} \right]^T$ 일 때, Fig 2는 영입력 응답을 나타내고, Fig 3은 시스템의 불확실성을 고려하지 않았을 때의 영입력 응답을 나타낸 결과이다. 여기서 시스템 파라미터의 불확실성을 고려한 경우가 더 강인하게 안정함을 보여주고 있다.

III. 결론

본 논문에서는 불확실성을 포함하는 비선형 시스템의 제어를 위한 강인 퍼지 제어기를 설계하였다. 불확실 비선형 시스템의 모델링하기 위하여 TSK 퍼지 모델링 기법을 도입하였으며, 불확실성을 고려한 TSK 퍼지 모델 제어기 설계 기법을 제안하였다. 본 논문에서 제안한 불확실성을 포함해서 설계된 제어기가, 불확실성을 포함하지 않고 제어기를 설계한 경우보다 강인하게 안정함을 모의 실험을 통해서 볼 수 있다. 따라서 제안된 제어기 설계기법에 의해 설계된 제어기의 성능이 매우 우수함을 입증하였다.

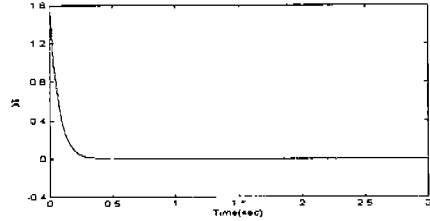


Fig 2. Response of characteristic with uncertainties

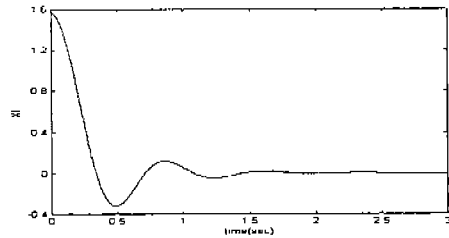


Fig 3 Response of characteristic without uncertainties

본 연구는 한국과학재단 2000년도 지역대학 우수과학자 지원 연구(과제번호: 2000-1-30200-002-3)에 의해 수행되었습니다.

IV 참고문헌

- [1] Y. H. Joo, L. S. Shieh and G. Chen. "Hybrid state-space fuzzy model-based controller with dual-rate sampling for digital control of chaotic systems," *IEEE trans. on Fuzzy systems*, Vol. 7, No. 4, Aug., 1999.
- [2] Y. H. Joo, S. W. Jeon, O. S. Kwon, "Design of Robust Fuzzy controller for Load-Frequency Control of Power System Using Intelligent Digital Redesign Technique." *Journal of Fuzzy Logic and Intelligent System*, Vol. 10, No. 4, Aug. 2000.
- [3] H. A. Maiki, D. Misir, D. Feigenspan and G. Chen, "Fuzzy PID control of a flexible-joint robot arm with uncertainties from time-varying loads," *IEEE Trans. on Control Syst. Techn.*, Vol. 5, No. 3, May, 1997.