

불확실성을 가지는 퍼지 시스템을 위한 안정화 제어기 설계

Design of Stabilizing Controllers for Fuzzy Systems with Uncertainty

곽기호 · 박주영

Kiho Kwak, Jooyoung Park

고려대학교 제어계측공학과

요 약

본 논문에서는 불확실성을 가지는 TS 퍼지 시스템을 안정화시킬 수 있는 제어기를 제안하고, 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality : LMI)을 이용한 설계 방법을 제시하였다. 그리고, 간단한 예제를 통하여 제안된 기법의 응용 가능성을 확인하여 보았다.

I. 서 론

일반적으로 많은 물리적 시스템들이 비선형성과 불확실성을 포함하고 있다. 따라서 이러한 시스템들을 제어하기 위한 많은 제어기술들이 개발되고 있다. 이러한 방법들 중 Takagi와 Sugeno에 의해서 제안된 TS 퍼지 모델은 제어기를 설계하는데 있어서 체계적인 선형 제어 이론을 적용하는 것이 가능하므로 폭 넓게 사용되고 있다. 따라서 본 논문에서는 연속 불확실 비선형 시스템을 파라미터 불확실성을 가지는 연속 TS 퍼지 모델로 바꾸고, 다른 입력행렬을 가질 경우 시스템을 안정화시킬 수 있는 퍼지 제어기를 설계하였다.

본 논문의 내용은 다음과 같다. 2장에서는 비선형 불확실 시스템의 TS 퍼지 모델을 구하는 것에 대해서 논하며, 3장에서는 다른 입력행렬을 갖는 비선형 불확실 시스템에 대한 퍼지 제어기 설계방법에 대해 선형행렬부등식을 이용한 풀이방법을 제시하고, 4장에서는 모의 실험을 통하여 그 성능을 입증한다. 그리고 마지막장에서는 결론을 맺는다.

II. 비선형 불확실 시스템의 TS 퍼지 모델

본 논문에서는 일반적인 비선형 시스템이 아닌 (1)과 같이 파라미터 불확실성을 포함한 연속시간 비선형 시스템을 다루고자 한다:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \Delta f(x(t)) + (g(x(t)) + \Delta g(x(t)))u(t) \quad (1)$$

여기서 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 는 상태벡터, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 는 제어 입력벡터, $f(x(t))$, $g(x(t))$ 는 비선형 벡터함수, 그리고 $\Delta f(x(t))$, $\Delta g(x(t))$ 는 불확실 비선형 벡터함수이다. 이러한 형태의 비선형 불확실 시스템은 다음과 같은 TS 퍼지 모델로 근사화 할 수 있다:

Plant Rule i :

IF $z_1(t)$ is M_{i1} and ... and $z_r(t)$ is M_{ir} ,
THEN

$$\dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t). \quad (2)$$

여기서, $z_i(t)$ 와 M_{ij} , $i=1, \dots, r$, $j=1, \dots, g$ 은 각각 전건부 변수와 퍼지 집합, r 은 IF-THEN 규칙의 개수, 그리고 ΔA_i 와 ΔB_i 는 비선형 시스템의 파라미터 불확실성을 나타내는 시변 행렬이다. 그리고 TS 퍼지 모델의 일반적인 추론 방법에 의하면, 정규화된 전체 시스템의 상태 방정식은 다음과 같은 형태로 표현된다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ (A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) \}. \quad (3)$$

여기서, 표준화된 하중함수 h_i 는 $h_i(z(t)) > 0$ 과 $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \forall t \geq 0$ 을 만족한다. 전제부 변수 $z_i(t)$ 는 일반적으로 입력 $u(t)$ 와는 무관하나 상태 $x(t)$ 와는 긴밀한 상관관계를 갖는다. 따라서 TS 퍼지 시스템은 근본적으로 비선형 특성을 갖게 된다.

III. 다른 입력행렬을 갖는 TS 퍼지 시스템에 대한 제어기 설계

여기서는 선형행렬부등식(LMI : Linear Matrix Inequality) [1]를 이용하여 다른 입력행렬을 가지는 경우 TS 퍼지 모델로 표현된 비선형 불확실 시스템을 안정화시키기 위하여 다음과 같은 퍼지 제어기를 제안한다.

$$\dot{u}(t) = A_c u(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t), \quad (4)$$

이러한 형태의 제어기는 게인 스케줄링을 다룬 [2]에서 제안된바 있다. 이는, 일반적인 퍼지 제어기 $u_{TS}(\cdot) \triangleq \sum_{i=1}^r h_i(z(\cdot)) K_i x(\cdot)$ 가 선형시스템 $G_c(s) \triangleq (sI - A_c)^{-1}$ 에 의해 여과된 형태이다.

하지만 새로운 제어기를 시스템에 적용하는데 있어서, 플랜트 규칙(2)에 시변 불확실 행렬이 포함된 형태이므로 제어 이득행렬, K_i 를 구하는 것이 쉽지 않다. 따라서 시변 불확실 행렬 $\Delta A_i, \Delta B_i$ 를 제거하여 제어 이득행렬, K_i 를 쉽게 계산하기 위하여 시스템 방정식의 파라미터 불확실성을 표현하는 행렬 $\Delta A_i, \Delta B_i$ 을 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$[\Delta A_i \quad \Delta B_i] = D_i F_i(t) [E_{1i} \quad E_{2i}] \quad (5)$$

여기서 D_i, E_{1i}, E_{2i} 는 알려진 실수 행렬이고, 알지 못하는 행렬인 $F_i(t)$ 는 $F_i(t)^T F_i(t) \leq I$ 의 조건을 만족하는 Lebesgue-measurable 행렬 함수이다. 그리고 I 는 적절한 차원의 단위 행렬이다. 그리고 이하 논문에서 사용되는 $F_i(t)$ 는 F_i 로 표현함을 명시한다.

따라서 제어 입력 u 를 TS 퍼지 시스템(5)에 적용하면, 다음의 결과를 얻을 수 있다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ (A_i + \Delta A_i) x(t) + (B_i + \Delta B_i) u(t) \}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= A_c u(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ K_i x(t) + A_c u(t) \}. \end{aligned}$$

그리고 (6)의 결과에 (5)를 도입하면 다음과 같은 페루프가 얻어진다:

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} A_i + D_i F_i E_{1i} & K_i \\ B_i + D_i F_i E_{2i} & A_c \end{bmatrix} X(t) \quad (7)$$

여기서 X 는 $X(t) = [x^T(t) \quad u^T(t)]^T$ 로서 확장된 상태 벡터이다.

따라서, 이 polytopic 시스템은 $F_i^T F_i \leq I$ 를 만족하는 $\forall F_i(t)$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 대칭행렬 $Q \in R^{(n+p) \times (n+p)}$ 가 존재할 때, 페루프가 안정됨을 알 수 있다:

$$\begin{aligned} Q &> 0, \\ \begin{bmatrix} A_i + D_i F_i E_{1i} & B_i + D_i F_i E_{2i} \\ K_i & A_c \end{bmatrix} Q \\ + Q \begin{bmatrix} A_i + D_i F_i E_{1i} & B_i + D_i F_i E_{2i} \\ K_i & A_c \end{bmatrix}^T &< 0, \quad (8) \\ i &= 1, \dots, r \end{aligned}$$

하지만 여기서 주의해야 할 점은 부등식은 변수 $Q, A_c, K_i, i=1, \dots, r$ 에 대해 비선형이라는 점이다. 따라서 선형의 형태로 변환하기 위하여, 행렬 $[K_i \quad A_c]$ 가 Full row rank를 가진다는 가정하에서 변수 제거기법을 적용하면 [2], (8)식은 K_i 와 A_c 가 제거된 다음의 형태로 치환될 수 있다:

$$\begin{aligned} Q &> 0, \\ N^T \left(\begin{bmatrix} A_i + D_i F_i E_{1i} & B_i + D_i F_i E_{2i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q \right. \\ \left. + Q \begin{bmatrix} A_i + D_i F_i E_{1i} & B_i + D_i F_i E_{1i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right) N &< 0, \quad (9) \\ i &= 1, \dots, r. \end{aligned}$$

여기서 N 은 $[0_{n \times p} \quad I_p] N = 0$ 을 만족하는 임의의 최대 랭크 행렬이다. 또, 보편적으로 N 을 $N = [I_n \quad 0_{n \times p}]^T$ 으로 두면, 다음을 만족한다:

$$\begin{aligned} N^T \begin{bmatrix} A_i + D_i F_i E_{1i} & B_i + D_i F_i E_{2i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \triangleq \begin{bmatrix} A_i + D_i F_i E_{1i} \\ B_i + D_i F_i E_{2i} \end{bmatrix} & \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A_i + D_i F_i E_{1i} & B_i + D_i F_i E_{2i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T N \\ \triangleq \begin{bmatrix} A_i + D_i F_i E_{1i} \\ B_i + D_i F_i E_{2i} \end{bmatrix}^T$$

그러므로 (10)의 결과를 이용하여 (9)식을 다시 정리하면 아래와 같다:

$$\begin{bmatrix} A_i + D_i F_i E_{1i} & B_i + D_i F_i E_{2i} \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix} \\ + [I_n \ 0_{n \times p}] Q \begin{bmatrix} A_i + D_i F_i E_{1i} & B_i + D_i F_i E_{2i} \end{bmatrix}^T < 0 \quad (11)$$

하지만 (11) 부등식이 F_i 가 모든 i 와 t 에 대해서 만족시키는 $Q > 0$ 을 구하기 위해서 다음의 정리를 도입한다.

[정리 1] [3][4] 적절한 차원의 행렬 Q, H, E , 그리고 R 이 존재하며, Q, R 은 대칭행렬이고 $R > 0$ 을 만족할 때, 모든 F 가 $F^T F \leq R$ 을 만족할 경우 $Q + HFE + E^T F^T H^T < 0$ 이기 위한 필요충분 조건은 $Q + \varepsilon^2 H H^T + \varepsilon^{-2} E^T R E < 0$ 을 만족하는 $\varepsilon > 0$ 이 존재하는 것이다.

위의 정리를 사용하기 위하여 (11)식을 다시 정리하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned} & Q_{11} A_i^T + A_i Q_{11} + Q_{21}^T B_i^T + B_i Q_{21} \\ & + D_i F_i E_{1i} Q_{11} + Q_{11} E_{1i}^T F_i^T D_i^T \\ & + D_i F_i E_{2i} Q_{21} + Q_{21}^T E_{2i}^T F_i^T D_i^T < 0 \quad (12) \\ \Leftrightarrow & Q_{11} A_i^T + A_i Q_{11} + Q_{21}^T B_i^T + B_i Q_{21} + \varepsilon^2 D_i D_i^T \\ & + \varepsilon^{-2} (E_{1i} Q_{11} + E_{2i} Q_{21})^T R (E_{1i} Q_{11} + E_{2i} Q_{21}) < 0 \end{aligned}$$

만약 실제 시스템에서 구해지는 R 값이 $R \triangleq I$ 이라고 가정한다면, (12)식은 다음의 선형행렬부등식으로 표현이 가능해진다:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} A_i^T + A_i Q_{11} + Q_{21}^T B_i^T + B_i Q_{21} + S D_i D_i^T \\ E_{1i} Q_{11} + E_{2i} Q_{21} \\ (E_{1i} Q_{11} + E_{2i} Q_{21})^T \\ -S \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

여기서 ε 은 변수이므로, ε^2 는 비선형이 된다. 하지만 $\varepsilon^2 I \triangleq S$ 라는 변수로 치환을 한다면 변수 S 에 대해서는 선형이므로 문제가 되지 않고 선형행렬 부등식을 정의할 수 있다. 하지만 (13)에서는 Q_{11}, Q_{21} , 그리고 Q_{12} 만을 구할 수 있다. 따라서 다음의 선형행렬부등식을 구함으로서 페루프를 안정화시키는 Q 를 구할 수 있다.

$$Q > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (14)$$

여기서 $Q_{11}, Q_{22} > 0$ 이고, $Q_{12} = Q_{21}^T$ 이다.

만약 비선형 불확실 시스템이 아니면 (14)에서 구한 Q 를 (8)에 대입하여 간단히 K_i 와 A_c 를 구할 수 있지만, 여기서는 $F_i^T F_i \leq I$ 를 만족하는 모든 F_i 에 대하여 만족하는 K_i 와 A_c 를 구해야하므로 (8)식에서 F_i 에 관련된 항을 [정리 1]을 이용하여 정리하여야 한다. (8)식을 풀어보면 다음과 같다:

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ K_i & A_c \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ K_i & A_c \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} D_i \\ 0 \end{bmatrix} F_i [E_{1i} \ E_{2i}] Q \\ + Q [E_{1i} \ E_{2i}]^T F_i^T \begin{bmatrix} D_i \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0 \quad (15)$$

그리고 (15)식을 [정리 1]을 이용하여 F_i 를 없애기 위하여 다음과 같이 다시 정리를 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ K_i & A_c \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ K_i & A_c \end{bmatrix}^T + \varepsilon \begin{bmatrix} D_i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ + \varepsilon^{-1} Q [E_{1i} \ E_{2i}]^T I [E_{1i} \ E_{2i}] Q < 0 \quad (16)$$

따라서 (16)식을 다시 정리하면 다음의 선형행렬부등식을 얻을 수 있다:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ K_i & A_c \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ K_i & A_c \end{bmatrix}^T + \varepsilon \begin{bmatrix} D_i D_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [E_{1i} \ E_{2i}] Q \\ Q \begin{bmatrix} E_{1i}^T \\ E_{2i}^T \end{bmatrix} \\ -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

그리고 (17)에서 다음과 같이 1행1열을 정리할 수 있다:

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} K_i [I \ 0] Q \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} A_c [I \ 0] Q + \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} K_i [I \ 0] Q \right\}^T \\ + \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} A_c [I \ 0] Q \right\}^T + \varepsilon \begin{bmatrix} D_i D_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

따라서 (18)을 이용하여 (17)의 선형행렬부등식을 풀면 K_i 와 A_c 를 구할 수 있다.

IV. 모의 실험

여기서 예제로 사용하는 것은 파라미터 불확실성을 가지는 간단한 비선형 Mass-Spring-Damper 시스템[5]이다.

$$M\ddot{x} + g(x, \dot{x}) + f(x) = \phi(\dot{x})u \quad (19)$$

여기서 $g(x, \dot{x}) = D(c_1x + c_2\dot{x})$ 는 damper에 대한 비선형항, $f(x) = c_3x + c_4x^3$ 는 spring에 대한 비선형항, 그리고 $\phi(\dot{x}) = 1 + c_5\dot{x}^3$ 은 입력에 대한 비선형항이다. 각 파라미터는 다음과 같다:

$$M = 1, D = 1, K = 1 \\ c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0.01, c_4 = 0.1, c_5 = 0.13$$

그리고 상태가 움직이는 $x \in [-1.5, 1.5]$ 와 $\dot{x} \in [-1.5, 1.5]$ 임을 가정한다. 또한 $x_1 \triangleq \dot{x}$, $x_2 \triangleq x$, $\mathbf{x} \triangleq [x_1 \ x_2]^T$ 라고 정의하면, 시스템(20)은 다음과 같다:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - 0.01x_2 - 0.1x_2^3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + 0.13x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (20)$$

그리고 시스템(20)이 파라미터 불확실성을 가진다고 가정을 하고, Spring 상수 K 와 Damping 상수 D 가 주어진 값의 10%의 변화 안에서 바운드 되어 있다고 가정하면, $\tilde{K} = K + \Delta K$ 이고, $\tilde{D} = D + \Delta D$ 로 정의할 수 있다. 따라서 이 파라미터 불확실성을 가지는 시스템의 TS 퍼지 모델은 다음과 같이 근사할 수 있다:

규칙1: IF x_1 is about 0 and x_2 is about 0,

$$\text{THEN } \dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 u(t),$$

규칙2: IF x_1 is about 0 and x_2 is about ± 1.5 ,

$$\text{THEN } \dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 u(t),$$

규칙3: IF x_1 is about 1.5 and x_2 is about 0,

$$\text{THEN } \dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}_3 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_3 u(t),$$

규칙4: IF x_1 is about 1.5 and x_2 is about ± 1.5 ,

$$\text{THEN } \dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}_4 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_4 u(t),$$

규칙5: IF x_1 is about -1.5 and x_2 is about 0,

$$\text{THEN } \dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}_5 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_5 u(t),$$

규칙6: IF x_1 is about -1.5 and x_2 is about ± 1.5 ,

$$\text{THEN } \dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}_6 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_6 u(t).$$

그리고 퍼지 집합은 다음과 같이 정의된다.

$$w_{11}(x_1) = 1 - \frac{8}{27}x_1^3 \text{ for } x_1 \geq 0, 1 + \frac{8}{27}x_1^3 \text{ for } x_1 \leq 0, \\ w_{12}(x_1) = \frac{8}{27}x_1^3 \text{ for } x_1 \geq 0, 0 \text{ for } x_1 \leq 0, \\ w_{13}(x_1) = 0 \text{ for } x_1 \geq 0, -\frac{8}{27}x_1^3 \text{ for } x_1 \leq 0, \\ w_{21}(x_2) = 1 - \frac{4}{9}x_2^3, w_{22}(x_2) = \frac{4}{9}x_2^3.$$

그리고, 이 퍼지 모델은 다음과 같이 수식화 된다:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^6 h_i(\mathbf{z}(t)) \{ \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i u(t) \} \quad (21)$$

여기서 파라미터 불확실성을 포함한 시스템 행렬 $\tilde{\mathbf{A}}_i = \mathbf{A}_i + \Delta \mathbf{A}_i$ 를 의미한다. 그리고 파라미터 불확실성을 나타내는 행렬 $\Delta \mathbf{A}_i$ 는 $\Delta \mathbf{A}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{F}_i(t) \mathbf{E}_i$ 로 표현할 수 있다. 따라서 불확실성을 포함한 시스템 행렬, 입력 행렬 그리고 정규화된 하중함수는 다음과 같이 주어진다:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} -1 & -0.01 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} -1 & -0.235 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

그리고 $\Delta \mathbf{A}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{F}_i \mathbf{E}_i$ 이므로,

$$\Delta \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.003 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.0705 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.003 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.0705 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.003 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.0705 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1.4388 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_5 = \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0.5613 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

그리고 $\|a_i\|, \|b_i\|, \|c_i\|, \|d_i\|, \|e_i\|, \|f_i\| \leq 1$, $i=1,2$ 이므로, $\mathbf{F}_i \mathbf{F}_i^T \leq \mathbf{I}$ 를 만족하게 된다. 이로서 앞에서 구한 값들을 가지고 페루프를 안정화시킬 수 있는 대칭행렬 \mathbf{Q} (14)을 구할 수 있다. 하지만 위에서 구한 \mathbf{Q} 의 값 중에서 \mathbf{Q}_{22} 는

$Q_{22} \geq Q_{21} Q_{11}^{-1} Q_{21}^T$ 라는 또 하나의 조건을 만족하므로, 이것을 풀어보면 $Q_{22} \geq 732.3867$ 를 얻을 수 있다. 따라서 조건을 만족하는 Q_{22} 의 값을 다시 구해보면 대칭행렬 Q 는 다음과 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} 97.2889 & -62.6267 & -62.0309 \\ -62.6267 & 70.9296 & -108.5207 \\ -62.0309 & -108.5207 & 1450 \end{bmatrix}$$

다음으로 (18)의 선형행렬부등식을 이용하여 K_i 와 A_c 를 구하면 다음과 같다[5]:

$$A_c = -9.1527, \begin{cases} K_1 = [-70.5827 -75.9269] \\ K_2 = [-70.7149 -75.9328] \\ K_3 = [-72.1817 -73.9633] \\ K_4 = [-72.2396 -73.7378] \\ K_5 = [-65.1836 -74.0127] \\ K_6 = [-65.3474 -74.2324] \end{cases}$$

그리고, 제어신호 $u(t)$ 는 다음으로부터 구할 수 있다:

$$\dot{u}(t) = A_c u(t) + \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) K_i x(t). \quad (22)$$

따라서 (21)에서 제시한 시스템은 10%의 파라미터 불확실성을 포함하므로 (22)를 이용하여 다음으로 정의된다:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1.1x_1 - 0.011x_2 - 0.11x_2^3 + (1 + 0.13x_1^3)u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{u} = A_c u + \sum_{i=1}^6 h_i(z(t)) K_i x \end{cases} \quad (23)$$

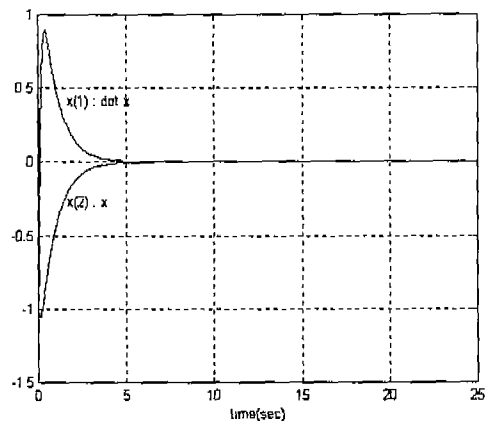
여기서 $X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ u(t)]^T$ 로서 확장된 상태벡터이다. 따라서 (23)를 초기 조건 $X(0) = [-1 \ -1 \ 0]^T$ 에 대하여 풀면 [그림1,2]와 같은 출력 결과를 얻을 수 있다.

V. 결론

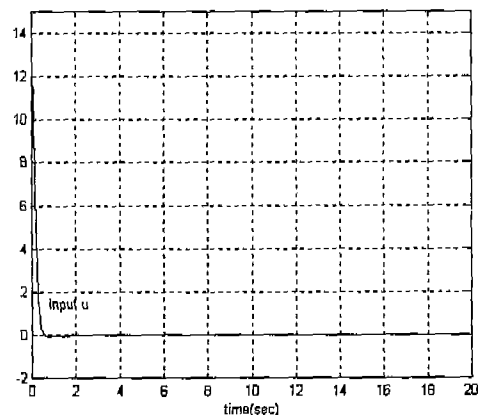
본 논문에서는 파라미터 불확실성을 가지는 비선형 시스템에 대하여 TS 퍼지 모델을 구하고, 시스템을 안정화시킬 수 있는 제어기를 설계하였다. 설계한 제어기를 시스템에 적용한 결과 그림과 같은 만족할 만한 결과를 얻을 수 있었다. 추후 연구과제로는 다른 파라미터 불확실성을 갖는 시스템에서도 좋은 결과를 얻을 수 있는지 알아보아야 할 것이다.

VI. 참고 문헌

- [1] S.Boyd, L.ElGhaoui, E.Feron and V.Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory", SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol.15 (SIAM, Philadelphia, 1994).
- [2] 김진성, 박주영, 박대희, "안정도를 보장하는 TS 퍼지 제어기의 설계: 선형행렬부등식을 이용한 풀이", 퍼지 및 지능시스템 학회 논문지 제8권 1호, pp.51-60, 1998.
- [3] 이호재, 주영훈, 박진배, "파라미터 불확실성을 포함한 TS 퍼지 시스템의 강인 추종제어", 퍼지 및 지능시스템 춘계 학회지, pp.260-263, 2000.
- [4] L.Xie, "Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainties", Int. J. Contr., Vol. 63, No.4, pp.741-750, 1996
- [5] P.Gahinet, A.Nemirovski, A.J.Laub and M. Chilali, "LMI Control Toolbox (MathWorksInc", Natick, MA, 1995).



[그림 1]. 파라미터 불확실성을 갖는 경우의 결과



[그림 2]. 파라미터 불확실성을 갖는 경우의 제어신호