

지능형 디지털 재설계기법을 이용한 비선형 시스템의 제어기 설계

Fuzzy Controller for Nonlinear Systems Using Intelligent Digital Redesign

이상준, 이남수, 주영훈, 박진배*
군산대 전자정보공학부
* 연세대 전기 및 컴퓨터공학과

Sangjun Lee, Namsu Lee, Younghoon Joo and Jinbae Park*
School of Electronics & Information Eng. Kunsan Univ. Korea
* Dept. of Electrical * Computer Eng., Yonsei Univ, Korea

Abstract - This paper addresses a fuzzy controller for nonlinear systems control using a pole placement in a specified disk and fuzzy controller is redesign for Intelligent digital redesign method. For nonlinear system, we obtain continuous time state feedback gain that guarantee stability of globally TS fuzzy system. The feedback gain is satisfied pole placement in a specified disk region so that the closed loop system is stable, For digital control redesign of continuous time TS fuzzy model, we does state matching and obtain feedback gain of digital controller. Finally, it is shown that the proposed method is feasible through a computer simulation.

1. 서 론

실제의 모든 동적 시스템은 연속시간으로 표현된다. 현재의 많은 디지털 제어의 접근법들은 샘플링 주기가 충분히 작다고 가정함으로써 연속 시간 시스템과 이를 제어할 연속 시간 제어기를 각각 이산 시간 시스템과 디지털 제어기로의 근사화를 시도하고 있다. 이러한 기법은 대부분의 동적 시스템에 매우 효과적이다.

Joo[1]는 연속 시간 시스템과 이산 시간 시스템의 상태 정합(state matching)을 기반으로 한 지능형 디지털 재설계 기법을 통하여 복소 좌반면의 섹터 영역에 극점을 위치시키는 방법을 퍼지 제어기에 응용하였다.

본 논문에서는 지능형 디지털 재설계 기법을 이용한 비선형 시스템 퍼지 제어기의 새로운 방법을 제안하고자 한다. 연속 시간의 디지털 제어는 연속 시간 모델에 대해 이산 시간 상태 공간 모델로 표현을 한다. 연속 시간 제어기의 궤환 이득은 지정된 디스크 영역내 극배치법에 의해 구해지고, 이산 시간 제어기의 궤환 이득은 상태 정합(state matching) 통한 지능형 디지털 재설계 기법에 의해 구해진다.

2. 퍼지 제어 시스템

2.1 TSK 퍼지 모델

비선형 시스템에 대한 퍼지 제어기를 구성하기 위해 먼저 TSK 퍼지모델로써 시스템을 표현하면 식(1)과 같이 표현되며, 이 규칙은 시스템에 대해 부분적인 선형 입출력 관계이다.

Plant Rule i :

If $x_1(t)$ is M_1^i and...and $x_n(t)$ is M_n^i

Then $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$ (1)

이 퍼지 모델의 최종 출력은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^q \omega_i(t) (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^q \omega_i(t)} \quad (2)$$

$$\omega_i(t) = \prod_{j=1}^n M_j^i(x_j(t))$$

여기에서, M_j^i ($j=1, 2, \dots, n$)은 i 번째 퍼지 집합, q 는 규칙의 수, $x(t) \in R^n$ 는 상태 변수, $u(t) \in R^m$ 는 제어입력, $A_i \in R^{n \times n}$ 와 $B_i \in R^{n \times m}$ 는 시스템에 대한 i 번째 지역 모델, $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 는 전제부 변수이다.

2.2 퍼지 제어기 규칙

퍼지 제어 규칙을 작성하기 위해 PDC 설계기법을 적용하는데 이것은 식(1)과 동일한 전제부를 사용하며 제어기의 i 번째 규칙은 다음과 같다.

Controller Rule i :

If $x_1(t)$ is M_1^i and...and $x_n(t)$ is M_n^i

Then $u(t) = -K_i x(t)$ (3)

여기에서 $K_i = [k_1^i, \dots, k_n^i]$ 는 궤환 이득 벡터이다. 식(3)의 퍼지 제어기의 최종 출력은 다음과 같

다.

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^q \omega_i(t) K_i x(t)}{\sum_{i=1}^q \omega_i(t)} \quad (4)$$

식(4)를 식(2)에 대입해서 다음과 같은 전체 페루프 시스템을 얻는다.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \omega_i(t) \omega_j(t) \{A_i - B_i K_j\} x(t)}{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \omega_i(t) \omega_j(t)} \quad (5)$$

2.3 퍼지 시스템의 안정도

전체 페루프 시스템 (5)에 대한 안정도 분석은 다음과 같은 충분 조건으로 주어진다.

정리 1[2]: 퍼지 제어 시스템(5)는 다음의 두 개의 부등식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P 가 존재한다면 넓은의미에서 점근적으로 안정하다.

$$\{A_i - B_i K_i\}^T P + P \{A_i - B_i K_i\} < 0, \quad i=1, \dots, q \quad (6)$$

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} < 0, \quad i < j \leq q \quad (7)$$

$$\text{단, } G_{ij} = \frac{\{A_i - B_i K_j\} + \{A_j - B_j K_i\}}{2}$$

이러한 퍼지제어기에서 설계문제는 조건식 (6)과 (7)을 만족하는 케환이득 $K_i (i=1, 2, \dots, q)$ 를 구하는 것이다. 본 논문에서는 다음에 설명되는 지정된 디스크 영역내 극배치법을 이용하여 케환이득을 구한다.

3. 지정된 디스크 영역내 극배치법

다음과 같은 i 번째 부분공간의 가제어 연속 시간 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_i x_c(t) + B_i u_c(t) \\ y_c(t) &= C_i x_c(t) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $u_c(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 은 상태 벡터, 입력 벡터이다. 수식(8)의 시스템의 i 번째 부분 공간에 대한 가격 함수는 다음과 같다.

$$J_i = \int_0^{\infty} [x_c^T(t) Q_i x_c(t) + u_c^T(t) R_i u_c(t)] dt \quad (9)$$

여기서, Q_i 는 양반한정 대칭행렬이고, R_i 는 양한정 대칭행렬이다. 가격 함수(9)를 최소화하는 상태 케환 제어 법칙 $u_c(t)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_c(t) = -K_c^i x_c(t) = -R_i^{-1} B_i^T P_i x_c(t) \quad (10)$$

여기서 K_c^i 는 i 번째 부분 공간에 대한 케환이득이고, P_i 는 양반한정 대칭 행렬로써 다음의 Riccati 방정식의 해이다.

$$A_i^T P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i + Q_i = 0 \quad (11)$$

상태 케환 제어 법칙 $u_c(t)$ 가 적용된 후의 전체 페루프 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x}_c(t) = (A_i - B_i K_c^i) x_c(t) \quad (12)$$

페루프 시스템의 극점을 중심이 $-a + j0$ ($a > 0$)이고 반경이 $\gamma > 0$ 인 디스크 영역 내에 위치하도록 한다. 이를 위해 Hamiltonian 행렬을 적용한다. 다음과 같은 Hami-

ltonian 행렬 H 는 허수축에 대칭인 n 개의 양의 고유값과 n 개의 음의 고유값을 가진다.

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (13)$$

이 행렬의 음의 고유값은 식(12)의 최적 상태 케환 제어 시스템의 고유값과 동일하다.

따라서, 식(12)의 고유값 대신 행렬 H 의 고유값을 배치하는 것이 가능하다. 이는 다음과 같은 비특이 행렬 T 를 이용하여 행렬 H 를 다음과 같이 등가 변환함으로써 시작한다.

$$\bar{H} = T^{-1} H T \quad (14)$$

여기서 $T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_4 \end{bmatrix}$, $\bar{H} = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 & \bar{H}_2 \\ \bar{H}_3 & \bar{H}_4 \end{bmatrix}$ 이고

$\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3, \bar{H}_4, T_1, T_2, T_4$ 는 $n \times n$ 요소를 갖는 행렬이다. 다음 정리를 통해서 지정된 디스크 영역내 극배치를 만족케 하는 하중 행렬 Q 를 얻게 되고 이를 이용하여 최적 제어 법칙을 구하게 된다.

정리 2[3]: 반경 $\gamma_{lef.i}$ 와 $\gamma_{rig.i}$ 로 된 두 개의 디스크가 있을 때, 행렬 \bar{H}_4 와 \bar{H}_3 가 다음 조건을 만족할 경우 행렬 \bar{H} 의 음의 실수부의 고유값은 $D(-a, \gamma)$ 인 디스크 내에 놓이게 된다.

$$\bar{H}_4 = [\bar{h}_{4ij}] < 0, \quad (i, j=1, \dots, n) \quad (15)$$

$$\|[\bar{H}_3 \quad \bar{H}_4 + aI]\|_{\infty} \leq \gamma \quad (16)$$

여기서 $\gamma_{lef.i}$ 와 $\gamma_{rig.i}$ 는 행렬 \bar{H} 의 양과 음의 실수부의 고유값을 포함하는 디스크의 반경이며, I 는 적당한 차원을 갖는 단위 행렬이고 $\|\cdot\|_{\infty}$ 는 H_{∞} norm이다.

보조정리 1[3]: 반경 $\gamma_{lef.i}$ 와 $\gamma_{rig.i}$ 인 두 원의 집합은 다음의 Infinity norm을 만족하면 분리된 것이다.

$$\|[\bar{H}_1 - aI \quad \bar{H}_2]\|_{\infty} < 2a - \gamma \quad (17)$$

단, $\bar{H}_2 = \bar{H}_3^{-1}(A^2 - \bar{H}_4^2) + T_1^{-1} B R^{-1} B^T T_1^{-1}$ 이다.

정리 3[3]: 행렬 M 이 행렬 A 를 대각화한다면 지정된 영역 $D(-a, \gamma)$ 내 극배치를 만족하는 행렬 Q 는 다음과 같이 얻어진다.

$$Q = (M^{-1})^T T_1^{-2} \bar{H}_3 M^{-1} \quad (18)$$

상태 케환 제어 법칙 (12)은 시스템(8)의 페루프 극점을 지정된 디스크 $D(-a, \gamma)$ 내에 배치한다.

4. 상태 정합(state matching)을 통한 지능형 디지털 재설계 기법

4.1 상태 정합

다음과 같은 i 번째 부분공간의 가제어 연속 시간 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_i x_c(t) + B_i u_c(t) \\ y_c(t) &= C_i x_c(t) \end{aligned} \quad (19)$$

한편 식 (19)에 대한 제어 입력

$$u_c(t) = -K_c^i x_c(t) \quad (20)$$

식 (20)에서 구한 시간 연속 시간 제어 규칙을 디지털로 구현하기 위해서 식 (20)을 등가의 디지털 제어 규칙으로

변환하여야 한다. 이를 위해 block-pulse function method(1.6)을 사용하여 식(12)의 $t = kT_s$ 의 상태 $x_c(t)$ 와 디지털적으로 제어되는 $t = kT_s$ 의 상태 $x_d(t)$ 를 정합함으로써 디지털 재설계를 수행한다. 구간별 디지털 제어 법칙은 다음과 같다.

$$u_d(t) = -K_d^i x_d(t) \quad (kT \leq t \leq kT + T) \quad (21)$$

여기에서

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= A_i x_d(t) + B_i u_d(t) \\ y_d(t) &= C_i x_d(t) \end{aligned} \quad (22)$$

이다. $u_c(t)$ 와 $u_d(t)$ 가 (8)에 대해 동일한 페루프 응답을 갖는다.

4.2 지능형 디지털 재설계

본 논문에서 제안된 디지털 재설계 기법을 이용하여 연속 시간 상태-피드백 이득을 등가의 저속 이산시간 상태 피드백 모델로 변환한다. 다음과 같은 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_i x_c(t) + B_i u_c(t) \\ y_c(t) &= C_i x_c(t) \end{aligned} \quad (23)$$

위의 상태 방정식의 $t = kT + T$ 에서의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_c(kT + T) \\ = e^{AT} x_c(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)} B u_c(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (24)$$

여기에서 $u_c(t) = u_d(kT)$ for $kT \leq t < kT + T$ 라면 식 (23)의 등가 고속 이산 시간 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_d(kT + T) &= G_i x_d(kT) + H_i u_d(kT) \\ y_d(kT) &= C_i x_d(kT) \end{aligned} \quad (25)$$

여기서, $G_i = e^{AT}$, $H_i = \int_0^T e^{A^T} B dt = (G - I_n) A^{-1} B$ 이다.

저속 이산 시간 모델은 다음의 정리를 통하여 얻게 된다. 정리 4(1.6) 저속 샘플링 주기 T_s 는 고속 샘플링 주기 T 의 N 배이고, N 은 정수이고, 고속 디지털 모델 (G_i, H_i, C_i)에 대한 저속 디지털 모델 (G_s, H_s, C_s)로의 변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G_s &= e^{AT_s}, G_i = e^{AT_s/N} = G_s^{1/N} \\ H_s &= (G_s - I_n) A^{-1} B, H_i = (G_i - I_n) A^{-1} B \\ A^{-1} B &= (G_s - I_n)^{-1} H_s = (G_i - I_n)^{-1} H_i \end{aligned} \quad (26)$$

따라서, 저속 디지털 모델 G_s, H_s 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \therefore G_s &= G_i^N \\ H_s &= (G_s - I_n)(G_i - I_n) H_i \end{aligned} \quad (27)$$

식 (25)에서 $t = kT_s$ 에 대한 이산 시간 페루프 모델은 다음과 같다.

$$x_d(kT_s + T_s) = (G_s - H_s K_d^i) x_d(kT_s) \quad (28)$$

이산 시간 모델에 대한 페루프 시스템의 상태 $x_d(kT_s)$ 와 연속 시간 모델에 대한 페루프 시스템의 상태 $x_c(t)$ 를 정합시키기 위하여 $t = kT_s$ 라 하면 식 (24)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} x_c(kT_s + T_s) &= \\ G_s x_c(kT_s) + \int_{kT_s}^{kT_s + T_s} B_i u_c(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

다음 구간 $kT_s, (k+1)T_s$ 에서 $u_c(\tau)$ 를 근사화 하기 위

해서 block-pulse function method(1.6)를 사용하면 다음의 결과를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} x_c(kT_s + T_s) &= \\ G_s x_c(kT_s) + \frac{1}{2} H_s [u_c(kT_s) + u_c(kT_s + T_s)] \end{aligned} \quad (30)$$

여기에 식(20)의 $u_c(t)$ 를 대입하면 다음의 근사화된 페루프 시스템을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} x_c(kT_s + T_s) &= \\ (I + \frac{1}{2} H_s K_c)^{-1} (G_s - \frac{1}{2} H_s K_c) x_c(kT_s) \end{aligned} \quad (31)$$

여기에서 식 (28)의 이산 시간 페루프 시스템에 대한 $x_d(kT_s)$ 의 기대값과 식 (31)의 시스템에 대한 $x_c(kT_s)$ 의 기대값이 같다고 하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$G_s - H_s K_d = (I_n + \frac{1}{2} H_s K_c)^{-1} (G_s - \frac{1}{2} H_s K_c) \quad (32)$$

양변에 $(I_n + \frac{1}{2} H_s K_c)$ 를 곱하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G_s - H_s K_d + \frac{1}{2} H_s K_c G_s - \frac{1}{2} H_s K_c H_s K_d \\ = G_s - \frac{1}{2} H_s K_c \end{aligned} \quad (33)$$

따라서 디지털 제어이득 K_d^i 는 다음과 같다.

$$K_d^i = \frac{1}{2} (I + \frac{1}{2} K_c^i H)^{-1} K_c^i (G + I) \quad (34)$$

여기에서 K_d^i 는 i 번째 부분 시스템에 대한 digital feedback gain으로써 제안된 디지털 제어기는 연속 시간 비선형 동적 시스템을 효과적으로 제어할 수 있다.

5. 모의 실험

본 논문에서 도립 진자 시스템을 예로 든다. 이 시스템의 동역학식은 다음과 같다 [4].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - a m l x_2^2 \sin(2x_1) / 2 - a \cos(x_1) u}{4l/3 - a m l \cos^2(x_1)} \end{aligned}$$

여기서, x_1 은 수직축과 펜듈럼이 이루는 각(라디안)이고, x_2 는 각속도, $g = 9.8 m/s^2$ 는 중력가속도이며, $m = 2.0 kg$ 은 펜듈럼의 질량, $M = 8.0 kg$ 은 수레의 질량이고, $2l = 1.0 m$ 는 펜듈럼의 길이, 그리고 u 는 수레에 가해지는 힘이다. 또한 $a = 1/(m + M)$ 이다. 이 시스템을 근사화하기 위한 TS퍼지 모델은 다음과 같다 [5].

Rule1: If $x_1(t)$ is about 0
Then $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$

Rule2: If $x_1(t)$ is about $\pm \pi/2$
Then $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$

여기서,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - a m l} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a}{4l/3 - a m l} \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - a m l \beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a \beta}{4l/3 - a m l \beta^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이고 $\beta = \cos(88^\circ)$ 이다. Rule 1과 Rule 2에 대한 멤버십 함수는 그림 1와 같다.

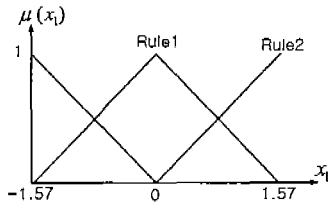


그림 1 멤버십 함수

극점 배치를 위한 디스크 영역은 중심을 -5, 반경을 2로 지정했으며 이 영역으로 극점을 위치시키는 하중 행렬 Q_1 과 Q_2 는 다음과 같다.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 11.3162 & -1.4108 \\ -1.4108 & 0.6543 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 5.2250 & -0.7939 \\ -0.7939 & 0.5582 \end{bmatrix}$$

각 지역 페루프 시스템의 극점은 $(-4.1586, -4.1611)$ 과 $(-3.0594, -3.0594)$ 으로 지정된 영역에 위치함을 알 수 있다. 이 때의 제한 이득과 안정도를 보장하는 공통 양한 정 행렬 P_c 는 다음과 같다.

$$K_c^1 = [-196.0577 \quad -47.1449]$$

$$K_c^2 = [-3575.3388 \quad -1168.6347]$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 0.4195 & 0.0278 \\ 0.0278 & 0.0122 \end{bmatrix}$$

또한 디지털 제어기의 샘플링 주기 $T = 0.03(\text{sec})$ 로 하였을 경우 새로이 생성되는 디지털 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_d(kT+T) &= G_d x_d(kT) + H_d u_d(kT) \\ y_d(kT) &= C x_d(kT), \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} G_{s1} &= \begin{pmatrix} 1.0009 & 0.0100 \\ 0.1730 & 1.0009 \end{pmatrix}, H_{s1} = \begin{pmatrix} -0.0000 \\ -0.0018 \end{pmatrix} \\ G_{s2} &= \begin{pmatrix} 1.0005 & 0.0100 \\ 0.0936 & 1.0005 \end{pmatrix}, H_{s2} = \begin{pmatrix} -0.00000026 \\ -0.00005237 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

지능형 디지털 재설계기법에 의해 생성된 새로운 시스템을 안정화시키는 디지털 제한 이득은 다음과 같다.

$$K_d^1 = [-192.1387 \quad -46.2025]$$

$$K_d^2 = [-3521.8 \quad -1151.1]$$

그림 2과 그림 3는 막대의 초기각도를 $45^\circ(0.7854\text{rad})$ 으로 했을 때, Pole의 각도와 제어 입력을 나타내고 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 지정된 디스크 영역 내에 극배치하는 방법을 지능형 디지털 재설계기법을 통하여 재설계하여, 비선형 퍼지 제어 시스템에 응용하는 방법을 제안하였다. 비선형 시스템은 여러 동작점에서 선형화하여 TS퍼지모델로 표현할 수 있고 이 모델을 기반으로 하여 퍼지 제어기 규칙을 작성할 수 있다. 작성된 퍼지 모델과 제어 규칙을 통하여 구하게 되는 디지털 제어기는 연속 시간 비선형 동적 시스템을 효과적으로 유연하게 제어할 수 있다. 대표적인 비선형 시스템인 도립진자에 적용한 결과로부터 제안한 제어기가 우수한 성능을 가지고 있음을 알 수 있다.

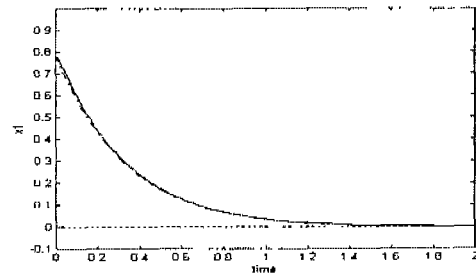


그림 2 제안된 제어기의 출력응답(X_1)

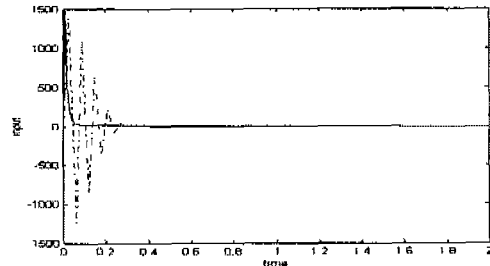


그림 3 제안된 제어기의 입력 상태

본 연구는 한국과학재단 2000년도 지역대학 우수과학자 지원 연구(과제번호: 2000-1-30200-002-3)에 의해 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- [1] Y.H. Joo, L.S. Shieh and G. Chen, "Hybrid State-Space Fuzzy Model-Based Controller with Dual-Rate Sampling for Digital Control of Chaotic System", IEEE Transaction on Fuzzy System, Vol. 7, No. 4, 1999.
- [2] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control", IEEE Trans. Syst., Man, and Cybernetics, Vol. SMC-15, No 1, pp. 116-132, 1985.
- [3] V.G.Nguyen and H.S.Kim, "A Pole Assignment in a Specified Disk by using Hamiltonian Properties" Automation & Systems Engineering, Vol. 4, No. 6, 1998
- [4] C. Li, P. C. Chen, and C.K. Chen, "Analysis and Design of Fuzzy Control Systems", Fuzzy Sets and Systems, Vol.57, pp.125-140, 1993.
- [5] F.H.F.Leung, L.K.Wong and P.K.S.Tam, "Fuzzy Model Based Controller for an Inverted Pendulum", Electronics Letters, Vol.32, pp.1683-1685, 1996
- [6] L S. Shieh, Xiao M.Zhao and Jhon W.Sunkel, "Hybrid state-space self-tuning control using dual-rate sampling" IEE PROCEEDINGS-D, Vol. 138, No. 1 1991.