

비선형 시스템의 퍼지 모델링과 제어

Fuzzy Modeling and Control for Nonlinear System

이 남 수*, 주 영 훈

군산대학교 전자정보공학부, e-mail : yhjoo@ks.kunsan.ac.kr

Namsu Lee and Younghoon Joo

School of Electronics & Information Eng. Kunsan Univ. Korea

(e-mail : yhjoo@ks.kunsan.ac.kr)

ABSTRACT: 근래 퍼지 제어 시스템의 설계는 대부분 Takagi-Sugeno 퍼지 모델에 기반하여 행해지고 있다. 이러한 TS퍼지 모델은 각 규칙의 결론부에 선형 상태 방정식의 형태를 취하고 있는데 각각의 상태 방정식은 원 비선형 시스템으로부터 얻어지고 있다. 하지만 시스템이 복잡해지고 비선형성이 강하면 TS퍼지 모델을 얻는데도 어려움이 따른다. 이에 본 논문에서는 TS 퍼지 모델을 얻기 위한 한가지 방법을 제안한다. 먼저 시스템을 선형항과 비선형항으로 나누어 비선형항을 선형화하여 퍼지 모델화 하는 일련의 과정에 한가지 법칙을 도입하게 된다. 이렇게 얻어진 퍼지 모델을 기반으로 한 제어에는 많은 연구가 있었으며 본 논문에서는 극배치 방법을 이용한다. 마지막으로 모의 실험을 통하여 제안된 방법의 효용성을 검증한다.

I. 서 론

산업현장의 대부분의 플랜트는 상당한 비선형성을 가지고 있는데 비선형 시스템에 대한 제어 이론과 제어기 설계는 쉽지 않다. 지난 20여년간 비선형 시스템에 대한 제어기 설계 기법들이 개발되었는데 그 중 퍼지 제어는 성공적이었다. 특히 비선형 시스템의 퍼지 모델을 기반으로 한 퍼지 제어기 설계는 많은 연구가 이루어지고 있다[1]. 이러한 퍼지 제어기 설계에는 결론부에 선형 상태방정식을 사용하는 TS퍼지 모델을 사용한다. 하지만 비선형 시스템을 정확히 모델링하지 못한 TS퍼지 모델을 기반으로 설계한 제어기는 안정도와 제어 성능을 보장할 수 없다. 대부분은 TS퍼지 모델은 여러 동작점에서 선형화를 행하여 얻어진다[2]. 이와는 다르게 본 논문에서는 비선형 시스템과 출력이 정확히 같은 또 다른 퍼지 모델링 방법을 소개하며 이 모델을 기반으로 극점 배치를 이

용하여 퍼지 제어기를 구성하는 방법을 제안한다. Chen's Attractor를 대상으로 모델링을 행하였고 모의 실험을 통하여 퍼지 모델의 정확도와 제어기 성능의 효용성을 확인하였다.

II. 비선형 시스템의 퍼지 모델링

1. TS 퍼지 모델과 제어기

복잡하고 비선형적인 시스템을 표현하기 위해 다음 식(1)과 같은 TS 퍼지 모델을 사용한다.

$$\begin{aligned} & \text{If } x(t) \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t) \text{ is } F_n^i \\ & \text{Then } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ & \quad (i=1, \dots, q) \quad (1) \end{aligned}$$

여기서, $F_j^i (j=1, \dots, n)$ 은 j 번째 전제부 변수의 퍼지 집합이고, $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$, q 는 규칙 수, $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 는 전제부 변수이다. 퍼지 시스템 (1)의 최종 출력은 다음 식 (2)와 같다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2)$$

여기서, $\mu_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^q w_i}$, $w_i = \prod_j F_j^i(x_j(t))$ 이고

$F_j^i(x_j(t))$ 는 퍼지 집합 F_j^i 에 대한 $x_j(t)$ 의 소속 정도이다.

본 논문에서는 퍼지 모델 기반 제어기로서 다음 식 (3)과 같은 형태를 사용할 것이다. 이것은 확장 병렬 분산 보상(Expanded PDC)개념을 사용한 것이다[4].

$$\begin{aligned} & \text{If } x(t) \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t) \text{ is } F_n^i \\ & \text{Then } u(t) = -K_i x(t) + E_i r(t) \\ & (i = 1, \dots, q) \quad (3) \end{aligned}$$

여기서, K_i 와 E_i 는 각각 i 번째 지역공간의 부궤환 이득과 정궤환 이득이고 $r(t)$ 는 기준입력이다. 이때 퍼지 모델 기반 제어기 (3)의 최종 출력은 다음 식 (4)와 같다.

$$u(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i (-K_i x(t) + E_i r(t)) \quad (4)$$

2. Chen's Attractor의 TS 퍼지 모델링

TS 퍼지 모델링의 대부분은 선형화를 통해서 얻었다. 본 논문에서는 시스템에 이차 비선형 항이 있는 경우 한가지 정리를 통해서 쉽게 퍼지 모델링할 수 있다. 먼저 Chen's Attractor에 대해 살펴본다. 시스템 동역학식은 다음 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) \\ \dot{y} &= (c-a)x - xz + cy \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (5)$$

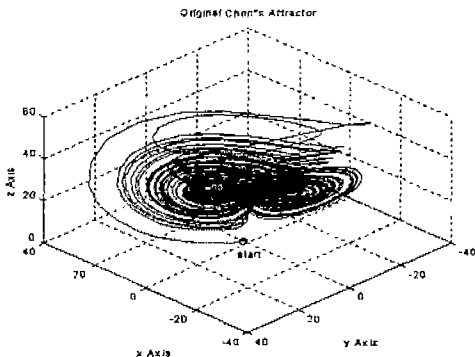


그림 1. Chen's Attractor의 궤적

그림 1은 시간 $t_0=0$ 에서 $t_f=50$ 까지 Chen's Attractor의 위상궤적을 나타낸다. 파라미터는 $(a, b, c) = (35, 3, 28)$ 이며 초기조건은 $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ 이다. 시스템 (5)는 두 개의 이차 비선형 항 xy 와 xz 를 가지고 있다. 따라서, 이 시스템은 다음 식 (6)과 같이 비선형 항을 가진 선형 시스템으로 나누어진다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{bmatrix} \quad (6)$$

Chen's Attractor의 TS 퍼지 모델을 얻기 위해 비선형 항 xy 와 xz 를 선형 함수들의 가중 선형 합으로 표현해야 한다. 이를 위해서 다음의 정리 1과 보조정리 1을 사용한다.

정리 1[3]. 다음과 같은 비선형 함수가 있다.

$$f_n = x_1 x_2 \dots x_n \quad (7)$$

여기서, $x_i \in [M_1^i, M_2^i]$ 이다. 식 (7)은 다음 식(8)과 같은 형태의 선형 가중 합으로 정확히 표현될 수 있다.

$$f_n = \left(\sum_{i_2, i_3, \dots, i_n=1}^2 \mu_{i_2 i_3 \dots i_n} \cdot g_{i_2 i_3 \dots i_n} \right) x_1 \quad (8)$$

단, $g_{i_2 i_3 \dots i_n} = \prod_{j=2}^n M_{i_j}^j$, $\mu_{i_2 i_3 \dots i_n} = \prod_{j=2}^n F_{i_j}^j$

모든 $x_j \in [M_1^j, M_2^j]$ 에 대해서 $F_{i_j}^j$ 는 양반정(positive semi-definite)이고 다음과 같이 정의된다.

$$F_1^j = \frac{-x_j + M_2^j}{M_2^j - M_1^j}, \quad F_2^j = \frac{x_j - M_1^j}{M_2^j - M_1^j}$$

보조정리 1[3]. $y \in [M_1, M_2]$ 인 다음과 같은 비선형 함수가 있다.

$$f(x, y) = xy$$

그러면, 이 함수는 다음과 같이 선형 함수의 선형 가중 합으로 표현될 수 있다.

$$f(x, y) = \sum_{i_2=1}^2 \mu_{i_2} g_{i_2}(x, y)$$

여기서, $g_1(x, y) = M_1$, $g_2(x, y) = M_2$ 이고
 $\mu_1 = F_1^2$, $\mu_2 = F_2^2$

$$F_1^2 = \frac{-y + M_2}{M_2 - M_1}, \quad F_2^2 = \frac{y - M_1}{M_2 - M_1} \text{ 이다.}$$

이제, 보조 정리 1을 사용해서 시스템 (6)에 대한 정확한 TS 퍼지 모델을 다음과 같이 얻을 수 있다.

Plant Rules :

Rule 1 : IF x is M_1 THEN $\dot{\xi} = A_1 \xi$

Rule 2 : IF x is M_2 THEN $\dot{\xi} = A_2 \xi$

(단, $\xi = [x \ y \ z]^T$) (9)

여기서,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & -M_1 \\ 0 & M_1 & -b \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & -M_2 \\ 0 & M_2 & -b \end{bmatrix}$$

멤버십 함수는

$$F_1 = \frac{-x + M_2}{M_2 - M_1}, \quad F_2 = \frac{x + M_1}{M_2 - M_1} \text{ 이다.}$$

F_1 과 F_2 는 모든 $x \in [M_1, M_2]$ 에 대해서 양반한정이다. 그림 2는 Chen's Attractor의 TS 퍼지 모델의 궤적을 나타낸다. 그림으로부터 start지점과 end지점의 위치가 거의 같음을 알 수 있으며 위에서 구한 TS 퍼지 모델은 그 출력이 원 시스템과 같으므로 시스템 (6)을 퍼지 모델 (9)로 완전히 대체할 수 있다.

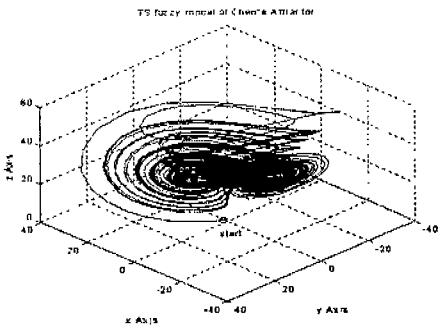


그림 2. Chen's Attractor의 TS 모델 궤적

3. 퍼지 제어기 설계

본 논문에서는 안정적인 각 지역 상태 궤환 제어기의 설계를 위해서 s-평면 좌반면의 섹터 영역내에 최적으로 극점을 배치 방법을 사용한다[4]. 다음과 같은 i 번째 지역공간의 가제어한 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= C_i x(t) \end{aligned} \quad (10)$$

이때 기준입력 $r(t)$ 를 추종하게 하기 위해 성능기준을 다음 식 (11)과 같이 한다.

$$J = \int_0^{\infty} \{ [C_i x(t) - r(t)]^T Q [C_i x(t) - r(t)] + u^T(t) R u(t) \} dt \quad (11)$$

이때 원하는 최적 추적 제어 법칙은 다음 식 (12)와 같다.

$$u(t) = R_i^{-1} B_i^T P_e x(t) + E_i r(t) \quad (12)$$

여기서, P_e 는 다음 식의 해이다.

$$A_i^T P_e + P_e A_i - P_e B_i R_i^{-1} B_i^T P_e + C_i^T Q_e C_i = 0_{\hat{n}}$$

그리고 $E_i = -R^{-1} B_i^T (A_i - B_i K_i)^{-T} C_i^T Q$ 이다.

III. 모의 실험

여기서는 Chen's Attractor를 대상으로 모의 실험한다. 그림 1에서 사용한 파라미터와 초기조건을 사용하고 x 의 경계값은 Chen's Attractor의 모의 실험결과로부터 $[M_1, M_2] = [-30, 30]$ 으로 정했다. 이때 제어시스템의 퍼지 모델은 식 (9)의 결론부를 $\{A_i, B_i\}$ 가 가제어하도록 하는 B_i 를 선택하여 다음 식 (13)과 같이 작성한다.

Rule 1 : IF ... THEN $\dot{\xi} = A_1 \xi + B_1 u$

Rule 2 : IF ... THEN $\dot{\xi} = A_2 \xi + B_2 u$

(단, $\xi = [x \ y \ z]^T$) (13)

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i=1, 2)$$

퍼지 제어기는 식 (3)과 같은 형태로 구성하였으며 앞서 설명한 최적 극점 배치 기법을 이용하여 구한 부궤환 이득 K 와 궤환 이득 E 는 다음과 같다.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.609 & -4.730 & -3.120 \\ -4.730 & 49.966 & 11.273 \\ -3.120 & 11.273 & 28.622 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.609 & -4.730 & 3.120 \\ -4.730 & 49.966 & -11.273 \\ 3.120 & -11.273 & 28.622 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 18.780 \\ 14.430 \\ 10.398 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 18.780 \\ 14.430 \\ -10.398 \end{bmatrix}$$

기준 입력 $r(t)$ 는 진폭이 20이고 주기가 2초인 구형파이다. 그림 3은 Rule1과 Rule2의 소속 함수이고 그림 4는 상태 x 의 추종 상태이다. 그림 4에서 4초 이전은 제어하기 전이며 카오스현상을 보이고 4초 이후로 제어입력이 인가되면서 기준 입력을 추종하고 있음을 볼 수 있다.

IV. 결론

본 논문에서는 비선형 시스템에 이차 비선형 항이 있을 경우 TS 퍼지 모델링에 대한 방법을 소개하였다. 이 방법으로 Chen's Attractor를 퍼지 모델링한 결과가 원 시스템과 같은 출력을 낸다는 것을 확인할 수 있었다. 또한 이 퍼지 모델을 기반으로 제어를 설계한 결과 모의 실험을 통해서 제어 성능이 우수함을 알 수 있었다.

향후에는 다른 형태의 비선형 항이 있을 경우 퍼지 모델링에 대해 연구할 계획이며 입출력 데이터만으로 결론부가 상태방정식인 TS퍼지 모델을 동정하는 방법도 연구되어야 할 것이다.

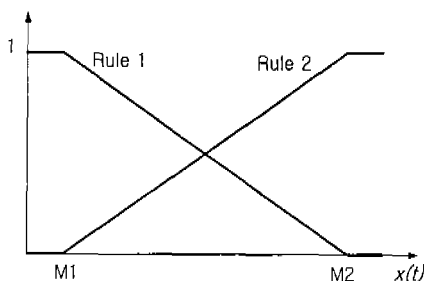


그림 3. 소속 함수

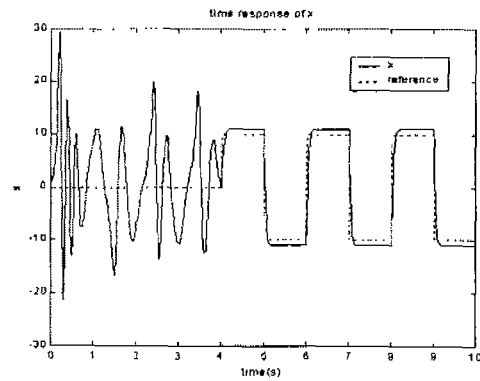


그림 4. Chen's Attractor의 제어결과-x(t)

본 연구는 한국과학재단 2000년도 지역대학 우수 과학자 지원 연구(과제번호: 2000-1-30200 -002-3)에 의해 수행되었습.

V. 참고 문헌

- [1] H.O.Wang, K.Tanaka, and M.F.Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.4, pp.14-23, 1996
- [2] T.Takagi and M.Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control", IEEE Trans. on Syst., Man, and Cybernetics, Vol. SMC-15, No. 1, pp.116-132, 1985.
- [3] H.J.Lee, J.B.Park and G.Chen, "Robust fuzzy control of nonlinear systems with parameteric uncertainties", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 2000. submitted.
- [4] Y.H.Joo, L.S.Shieh, and G.Chen, "Hybrid state-space fuzzy model-based controller with dual-rate sampling for digital control of chaotic systems", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 7, No. 4, Aug., 1999.