

반무한 영역에서의 탄성과 진행문제를 위한 흡수경계에 관한 연구

A Study on Absorbing Boundaries for Wave Propagation in Semi-Infinite Elastic Media

이종세*
Lee, Jong-Seh

김희석**
Kim, Hee-Suk

ABSTRACT

In many dynamic problems, such as foundation vibrations, ultrasonic nondestructive evaluation and blasting analysts are confronted with the problem of wave propagation in an infinite or semi-infinite media. In order to simulate this situation by a finite analytical model, provisions must be made to absorb the stress waves arriving at the boundary. Absorbing boundaries are mathematical artifacts used to prevent wave reflections at the boundaries of discrete models for infinite media under dynamic loads. An analytical study is carried out to examine the effectiveness of Lysmer-Kuhlemeyer model, one of the most widely used absorbing boundaries. Validity of the absorbing boundary conditions suggested by Lysmer-Kuhlemeyer is examined by adopting the solution of Ewing et al. to the problem of plane waves from a harmonic normal force on the surface of an elastic half-space. The Ewing's problem is then numerically simulated using the finite element method on a semi-circular mesh with and without absorbing boundaries which are represented by viscous dashpots. The absorption ratios are calculated by comparing the displacements at the absorbing boundaries to those at the free field without absorbing boundaries.

1. 서론

초음파 탐상, 폭발 효과, 기초의 진동 등 다양한 동적문제의 해석적 연구에 있어서의 합리적인 접근방법은 이 문제들을 무한 또는 반무한 영역에서의 파의 진행문제로서 고려하는 것이지만 이 경우 문제들이 복잡한 형상 때문에 해석적인 해(closed form solution)를 찾는 것은 거의 불가능하므로 수치적인 방법을 이용하고 있다. 지금까지 (반)무한영역에서의 파진행 문제에 널리 쓰이던 수치해석 방법은 경계요소법(Boundary Element Method)이며, 이외에도 유한요소법과 경계요소법을 조합하는 방법이 있으나 이러한 방법은 반해석적-반수치적 방법으로서 요소의 복잡성을 피할 수 없는 단점이 있다.

유한 요소법은 다양한 형태의 비균질성을 쉽게 모형화 할 수 있다는 장점과 함께 요소화된 모든 영역에 있어서 운동방정식을 그대로 사용하기 때문에 불연속면에서의 모드변환 등 여러 가지 중요한 현상들을 직접 관찰할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 그러나 이 방법은 유한의 요소를 가지고 있으므로 직접적으로 무한영역으로의 적용이 불가능하다. 유한의 요소영역으로 무한 영역

* 한양대학교 부교수, 정회원

** 현대건설 사원

을 모형화하는 경우에 파가 제한된 대상 모형의 유한 경계에 도달한 후 반사 현상이 발생하게 되며 이로 인해 구조계 전체의 응답에 큰 영향을 미치게 된다.

이러한 반사파의 영향을 상쇄 시키기 위해서는 인공적인 경계요소가 필요한데, 이러한 인공적인 경계요소를 흡수경계(absorbing boundary)라고 하며 파진행의 문제에 널리 쓰이고 있다. 지금까지는 Lysmer-Kuhlemeyer(1969), Engquist-Majda(1977), Ang-Newmark(1972), White et al.(1977), Smith(1974), Cundal et al.(1978), 그리고 Liao-Wong(1984) 등이 제안한 경계요소들이 쓰이고 있다. 이중 일반적인 수치해석 모델에 가장 효과적으로 적용되는 모델은 Lysmer-Kuhlemeyer가 제안한 방법으로써 요소의 경계에 점성감쇠기를 부착하여 흡수효과를 구현하므로 일반적인 FEM프로그램에 응용이 용이하다.

이러한 흡수경계를 실제 적용하기 위해서는 엄밀한 검증이 선행되어야 하는데 Lysmer-Kuhlemeyer는 이를 위해 무한영역에서의 변위와 FEM 모델에서의 변위를 비교하는 방식으로 흡수경계의 검증을 수행하였다. 이때 무한영역에서의 변위는 Lysmer and Richart(1966)이 제안한 주기하중에 기초에 작용할 때 기초의 진동을 통해 지반에 발생하는 변위의 이론해를 사용하였으며 FEM 모델에서의 변위는 경계면에 흡수경계를 적용시켜 구하였다. 하지만 경계면에서의 변위비교가 아닌 기초 밑에서의 변위를 비교하였고 흡수율 또한 산정하지 못하였으므로 합리적인 검증이 이루어졌다고 보기 어렵다.

본 연구에서는 Lysmer-Kuhlemeyer 흡수경계의 보다 철저한 검증을 위해 이들이 사용한 방법과 다른 방법을 사용하여 검증하고자 하였다. 이는 지표면에서의 주기하중에 의한 전파해를 Lysmer-Kuhlemeyer가 제안한 점성경계 조건식에 직접 삼입함으로써 수행될 수 있는데, 이때 해석 대상은 등방성 탄성매체와 평면 변형을 개념으로 제한하였다. 주기하중에 의한 전파식은 Ewing et al.(1957)이 제안한 식을 사용하였다. 또한 FEM해석을 통해 흡수경계가 적용된 경계면에서의 변위를 구하여 무한영역에서의 변위와 비교함으로써 흡수경계의 흡수효과를 규명하고자 하였다.

2. 주기하중에 의한 전파방정식

지표면에 수직으로 주기하중을 받고 있는 등방성 반무한 탄성영역에서의 전파방정식을 풀면 다음과 같은 해를 구할 수 있다.(Ewing et al.1957)

$$u_r = \frac{a \exp\left\{i\left(\frac{3\pi}{4} - R\right)\right\}}{\mu} \left(\frac{2}{\pi R}\right)^{1/2} \frac{\cos \theta(k^2 - 2 \sin^2 \theta)}{F_0(\sin \theta)} \quad (1)$$

$$u_\theta = \frac{a \exp\left\{i\left(\frac{5\pi}{4} - kR\right)\right\}}{\mu} \left(\frac{2k^5}{\pi R}\right)^{1/2} \frac{\sin 2\theta(k^2 \sin^2 \theta - 1)^{1/2}}{F_0(k \sin \theta)} \quad (2)$$

3. 흡수경계의 해석적 검증

그림 1.은 Lysmer-Kuhlemeyer(1969)가 제안한 P파와 S파에 대한 흡수경계조건을 경계면에서 표현한 것이다.

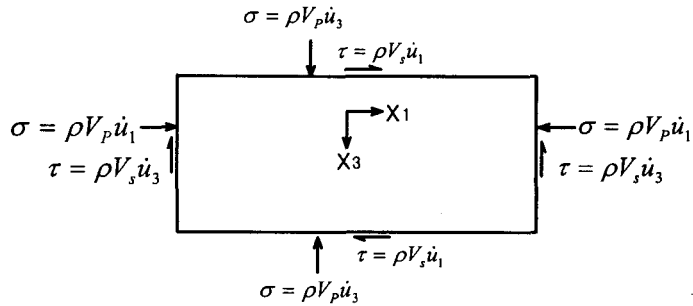


그림 1. P파, S파의 흡수경계조건

위의 흡수경계조건을 극좌표로 변환시키면 다음 식을 얻을 수가 있다.

$$\tau_{rr} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{rr} + \lambda\epsilon_{\theta\theta} = -\rho V_p \dot{u}_r \quad (3)$$

$$\tau_{r\theta} = 2\mu\epsilon_{r\theta} = -\rho V_s \dot{u}_\theta \quad (4)$$

이 조건을 만족시키는 Lysmer-Kuhlemeyer의 흡수경계는 파가 경계면에 수직으로 입사할 때 완벽한 흡수성능을 가지게 된다.

식(1)과 식(2)를 식(3)과 식(4)에 삽입함으로써 P파 및 S파에 대한 흡수경계의 검증은 수행한다. 이때 식(1)과 식(2)는 k_1 을 표준화 요소로 선택하여 유도되었기 때문에 여기서는 직접 사용할 수 없다. 이는 k_1 을 표준화 요소로 사용함으로써 식(3)과 식(4)에 삽입될 때 강제 진동수 (ω)의 영향에 무관하게 되기 때문이다. k_1 을 표준화 요소로 사용하지 않게 되면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$u_r = \frac{a \exp\left\{i\left(\frac{3\pi}{4} - k_1 R\right)\right\}}{\mu} \left(\frac{2}{\pi R}\right)^{1/2} \frac{k_1^3 \cos\theta (k_2^2 - 2k_1^2 \sin^2\theta)}{F(-k_1 \sin\theta)} \quad (5)$$

$$u_\theta = \frac{a \exp\left\{i\left(\frac{5\pi}{4} - k_2 R\right)\right\}}{\mu} \left(\frac{2k_2^5}{\pi R}\right)^{1/2} \frac{\sin 2\theta (k_2^2 \sin^2\theta - k_1^2)^{1/2}}{F(-k_2 \sin\theta)} \quad (6)$$

이제 식(5)와 식(6)을 식(3) 및 식(4)에 대입하여 검증을 수행한다. 이 때 u_r 및 u_θ 의 편도함수들은 실제 미분이 쉽지가 않으므로 Matlab를 사용하여 각각의 도함수들을 구한다. u_r 및 u_θ 의 편도함수들을 식(3)과 식(4)에 대입하여 좌향 및 우향의 값을 θ 및 R 에 대해 구한다. 이때 사용된 매질의 물성 및 강제 진동수는 표 1.과 같다.

표 1. 매질의 물성 및 강제 진동수

포아송비	밀도 ($N \cdot \text{sec}^2/m^4$)	탄성계수 (N/m^2)	전단탄성계수 (N/m^2)	강제 진동수 (rad/sec)
0.25	1066.6666667	200E9	8E10	3.14159

표 1.의 물성의 매질을 전파하는 P파 및 S파의 속도와 파장은 다음과 같다.

$$V_p = 15 \text{ km/sec}, \quad \lambda_p = 30 \text{ km}$$

$$V_s = 8.660254 \text{ km/sec}, \quad \lambda_s = 17.320508 \text{ km}$$

그림 2.는 수신점 $\theta = \pi/4$ 에서 P파에 대한 흡수경계조건 식(3)의 좌항 및 우항의 값을 거리 R 의 함수로 표시한 것이며, 그림 3.은 S파에 대한 흡수경계조건 식(4)의 좌항 및 우항의 값을 각각 나타낸다. 여기서 가로축은 거리 R ($1 \text{ km} \leq R \leq 100 \text{ km}$)을 나타내며 세로축은 좌항(LHS) 및 우항(RHS)의 값을 나타낸다.

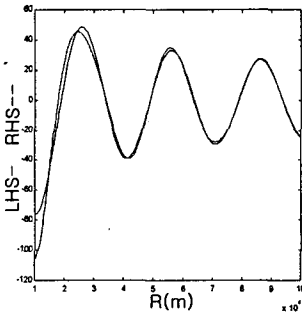


그림 2. 식(3)의 좌항 및 우항 값 ($\theta = \pi/4$)

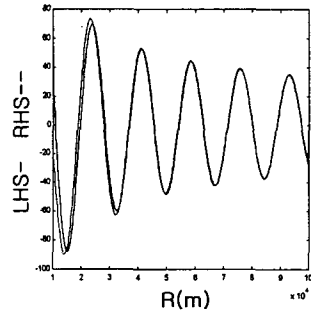


그림 3. 식(4)의 좌항 및 우항 값 ($\theta = \pi/4$)

그림 4.는 수신점 $R = 10,000 \text{ km}$ 에서 P파에 대한 흡수경계조건 식(3)의 좌항 및 우항의 값을 각 θ 의 함수로 표시한 것이며, 그림 5.는 S파에 대한 흡수경계조건 식(4)의 좌항 및 우항의 값을 각각 나타낸다. 여기서 가로축은 각 θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$)을 나타내며 세로축은 좌항(LHS) 및 우항(RHS)의 값을 나타낸다.

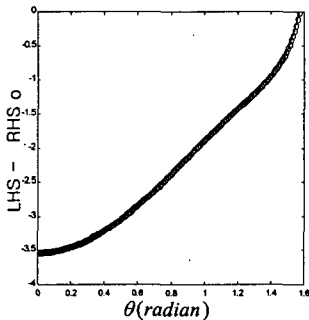


그림 4. 식(3.3)의 좌항 및 우항 값 ($R = 10,000 \text{ km}$)

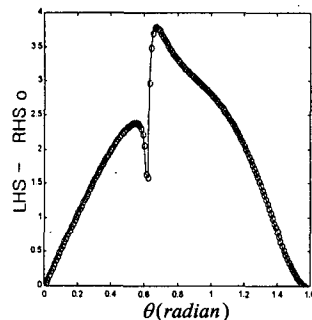


그림 5. 식(3.4)의 좌항 및 우항 값 ($R = 10,000 \text{ km}$)

그림 2.와 그림 3.에서 각각 약 파장 이후에 그래프가 일치함을 볼 수 있다. 이는 식(5)과 식(6)이 Steepest-Descent method에 의해 구해진 asymptotic한 값을 가지는 영역해이기 때문이다. 그림 2. ~ 그림 3.에서 좌항과 우항의 그래프가 일치함을 볼 수 있는데 이로부터 Lysmer-Kuhlemeyer의 P파와 S파에 대한 흡수경계가 완전한 흡수능력을 가지고 있음을 알 수 있다.

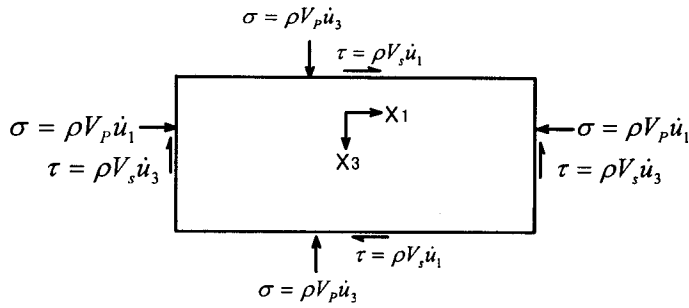


그림 1. P파, S파의 흡수경계조건

위의 흡수경계조건을 극좌표로 변환시키면 다음 식을 얻을 수가 있다.

$$\tau_{rr} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{rr} + \lambda\epsilon_{\theta\theta} = -\rho V_p \dot{u}_r \quad (3)$$

$$\tau_{r\theta} = 2\mu\epsilon_{r\theta} = -\rho V_s \dot{u}_\theta \quad (4)$$

이 조건을 만족시키는 Lysmer-Kuhlemeyer의 흡수경계는 파가 경계면에 수직으로 입사할 때 완벽한 흡수성을 가지게 된다.

식(1)과 식(2)를 식(3)과 식(4)에 삽입함으로써 P파 및 S파에 대한 흡수경계의 검증을 수행한다. 이때 식(1)과 식(2)는 k_1 을 표준화 요소로 선택하여 유도되었기 때문에 여기서는 직접 사용할 수 없다. 이는 k_1 을 표준화 요소로 사용함으로써 식(3)과 식(4)에 삽입될 때 강제 진동수 (ω)의 영향에 무관하게 되기 때문이다. k_1 을 표준화 요소로 사용하지 않게 되면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$u_r = \frac{a \exp\left\{i\left(\frac{3\pi}{4} - k_1 R\right)\right\}}{\mu} \left(\frac{2}{\pi R}\right)^{1/2} \frac{k_1^{3/2} \cos\theta (k_2^2 - 2k_1^2 \sin^2\theta)}{F(-k_1 \sin\theta)} \quad (5)$$

$$u_\theta = \frac{a \exp\left\{i\left(\frac{5\pi}{4} - k_2 R\right)\right\}}{\mu} \left(\frac{2k_2^5}{\pi R}\right)^{1/2} \frac{\sin 2\theta (k_2^2 \sin^2\theta - k_1^2)^{1/2}}{F(-k_2 \sin\theta)} \quad (6)$$

이제 식(5)와 식(6)을 식(3) 및 식(4)에 대입하여 검증을 수행한다. 이 때 u_r 및 u_θ 의 편도함수들은 실제 미분이 쉽지가 않으므로 Matlab를 사용하여 각각의 도함수들을 구한다. u_r 및 u_θ 의 편도함수들을 식(3)과 식(4)에 대입하여 좌향 및 우향의 값을 θ 및 R 에 대해 구한다. 이때 사용된 매질의 물성 및 강제 진동수는 표 1.과 같다.

표 1. 매질의 물성 및 강제 진동수

포아송비	밀도 ($N \cdot \text{sec}^2/m^4$)	탄성계수 (N/m^2)	전단탄성계수 (N/m^2)	강제 진동수 (rad/sec)
0.25	1066.6666667	200E9	8E10	3.14159

표 1. 의 물성의 매질을 전파하는 P파 및 S파의 속도와 파장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 V_p &= 15 \text{ km/sec}, & \lambda_p &= 30 \text{ km} \\
 V_s &= 8.660254 \text{ km/sec}, & \lambda_s &= 17.320508 \text{ km}
 \end{aligned}$$

그림 2. 는 수신점 $\theta = \pi/4$ 에서 P파에 대한 흡수경계조건 식(3)의 좌항 및 우항의 값을 거리 R 의 함수로 표시한 것이며, 그림 3. 은 S파에 대한 흡수경계조건 식(4)의 좌항 및 우항의 값을 각각 나타낸다. 여기서 가로축은 거리 R ($1 \text{ km} \leq R \leq 100 \text{ km}$)을 나타내며 세로축은 좌항(LHS) 및 우항(RHS)의 값을 나타낸다.

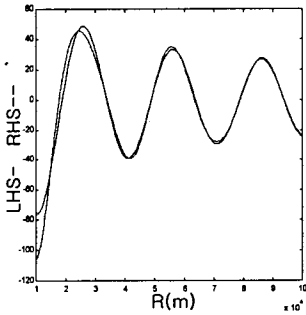


그림 2. 식(3)의 좌항 및 우항 값 ($\theta = \pi/4$)

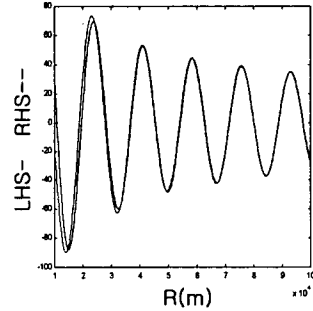


그림 3. 식(4)의 좌항 및 우항 값 ($\theta = \pi/4$)

그림 4. 는 수신점 $R = 10,000 \text{ km}$ 에서 P파에 대한 흡수경계조건 식(3)의 좌항 및 우항의 값을 각 θ 의 함수로 표시한 것이며, 그림 5. 는 S파에 대한 흡수경계조건 식(4)의 좌항 및 우항의 값을 각각 나타낸다. 여기서 가로축은 각 θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$)을 나타내며 세로축은 좌항(LHS) 및 우항(RHS)의 값을 나타낸다.

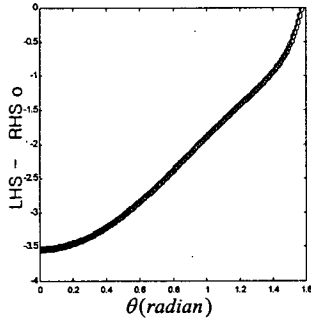


그림 4. 식(3.3)의 좌항 및 우항 값 ($R = 10,000 \text{ km}$)

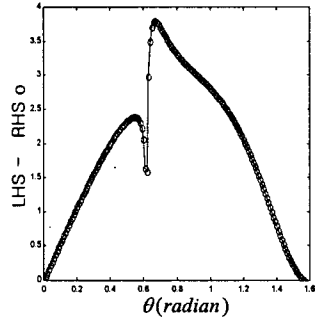


그림 5. 식(3.4)의 좌항 및 우항 값 ($R = 10,000 \text{ km}$)

그림 2. 와 그림 3. 에서 각각 약 파장 이후에 그래프가 일치함을 볼 수 있다. 이는 식(5)과 식(6)이 Steepest-Descent method에 의해 구해진 asymptotic한 값을 가지는 원역해이기 때문이다. 그림 2. ~ 그림 3. 에서 좌항과 우항의 그래프가 일치함을 볼 수 있는데 이로부터 Lysmer-Kuhlemeyer의 P파와 S파에 대한 흡수경계가 완전한 흡수능력을 가지고 있음을 알 수 있다.

4. 흡수경계의 수치적(FEM) 검증

본 연구에서 수치해석을 수행한 해석모형은 그림 6. 과 같다. 모든 경계면에 파를 수직으로 입사시키기 위해 경계면을 반원형으로 모형화 하였으며, 경계면에 Joint요소를 통해 점성감쇠기를 설치하여 입사되는 파가 반사되지 않고 흡수가 되게 함으로써 무한 영역을 모형화 하였다.

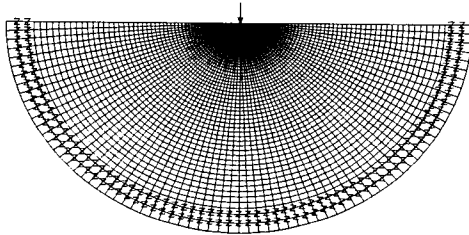


그림 6. 해석모형

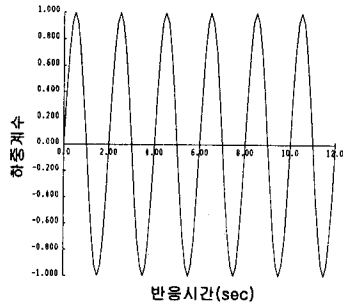


그림 7. 주기하중

Lysmer-Kuhlemeyer의 흡수경계 효과를 구하기 위해 그림 8.의 모형 A와 모형 B에서의 변위를 비교하였다. 여기서 모형 A는 반경 100km의 모델로 수신점을 40km에 위치시켜 반사파가 도달하기 전인 10초까지의 변위를 구하였고, 모형 B는 반경 40km의 모델로 경계면에 점성감쇠기를 이용한 흡수경계를 적용시켜 수신점을 40km에 위치시켜 10초까지의 변위를 구하였다.

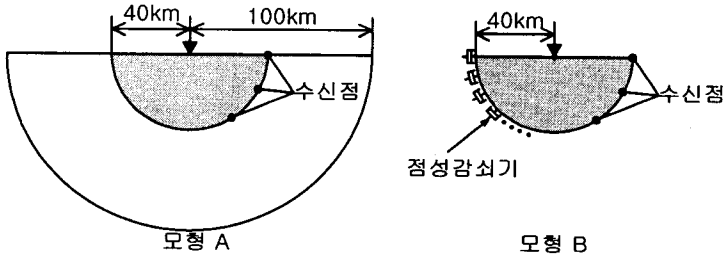


그림 8. 흡수효과 검증에 사용된 모형

그림 9. ~ 그림 11.은 각각 θ 가 90° , 60° , 30° 일 때 모형 A와 모형 B에서의 시간에 대한 수신점 40km에서의 각각 x 방향의 변위를 나타낸다. 이때 각 θ 는 y 축으로부터 반시계방향으로 측정된 값이다.

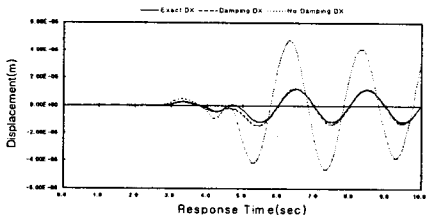


그림 9. 수신점에서의 x 방향 변위
($\theta = 90^\circ$)

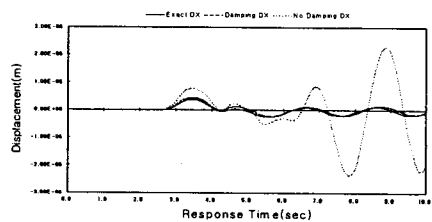


그림 10. 수신점에서의 x 방향 변위
($\theta = 60^\circ$)

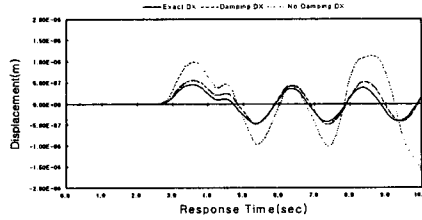


그림 11. 수신점에서의 x 방향 변위
($\theta = 30^\circ$)

표 2. 는 수신점의 위치에 따른 x 방향 및 y 방향의 흡수율을 나타낸다.

표 2. 위치에 따른 흡수경계의 흡수효과

	x 방향 흡수율(%)	y 방향 흡수율(%)
$\theta = 30^\circ$	83.13	85.02
$\theta = 60^\circ$	83.98	88.42
$\theta = 90^\circ$	85.44	85.53

그림 9. ~그림 11. 을 살펴보면 흡수경계가 적용된 모델에서의 변위는 모델 A에서의 반사파가 도달하기전의 변위와 일치하는 경향을 보이거나 흡수경계가 적용되지 않은 모델에서는 전혀 일치하지 않음을 볼 수 있다. 그러나 흡수경계가 적용된 모델에서의 변위는 약 85%의 흡수효과를 보이고 있다.

5. 결론

Lysmer-Kuhlemeyer의 흡수경계 성능을 해석적인 방법과 수치적인 방법으로 검증하였다. 해석적인 방법은 주기하중에 의한 전파식을 MatLab을 사용한 수치미분을 통해 흡수경계조건에 직접 삽입함으로써 수행하였으며, 수치적인 방법은 점성감쇠기를 사용한 FEM 모델을 통해 흡수경계가 적용된 경계면에서의 변위를 구함으로써 수행하였다. 해석적인 검증과 수치적인 검증을 통해 다음과 같은 결론을 얻었다.

해석적인 검증에서는 P파 및 S파에 대한 흡수경계식의 좌향 및 우향의 값이 약 1과장 이후 완전히 일치하였다. 이로부터 주기하중에 의한 전파식에 대해 Lysmer-Kuhlemeyer의 P파 및 S파에 대한 흡수경계가 완벽한 성능을 가지고 있음을 알 수 있었다. Rayleigh파에 대한 흡수경계식의 좌향 및 우향의 값은 경향은 비슷하나 다소 차이가 발생하였다. 이는 Ewing 등에 의한 전파식이 P파 및 S파만을 나타내기 때문으로 분석된다.

수치적인 검증을 통해 약 85%의 흡수율을 구할 수 있었다. 약 15%정도의 오차는 P파와 S파 및 Rayleigh파가 동시에 발생하기 때문이며, 또한 점성감쇠기의 discrete 모델로의 적용에 따른 불가피한 오차의 복합적 작용으로 분석된다. 따라서 흡수경계의 성능을 높이기 위해서는 많은 수의 요소사용과 이를 통한 Rayleigh파의 흡수경계적용이 이루어져야 한다.

[감사의글]

본 연구는 한국과학재단의 목적기초연구사업과 지진공학연구소의 지원에 의해 수행된 것임을 밝히며, 그 지원에 감사드립니다.

References

1. W. M. Ewing, W. S. Jardetzky, and F. Press(1957), "Elastic waves in Layered Media", McGraw-Hill, NewYork
2. B. Engquist, and A. Majda(1957), "Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves", Math. Comp.,31(139), pp.629-651
3. J. Lysmer, and R. L. Kuhlemeyer(1969), "Finite Dynamic Model for Infinite Media", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 95, No. EM4, Proc., Paper 6719,pp.859-887
4. H. -S. Ang, and N. M. Newmark(1972), "Development of a Transmitting Boundary for Numerical Wave Motion Calculations", Report 2631, Defense Atomic Support Agency
5. R. L. Kuhlemeyer, and J. Lysmer(1973), "Finite Element Method Accuracy for Wave Propagation problems", Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol.99, No.SM5, pp.421-427
6. W. White, Valliappan, and I. K. Lee(1977), "Unified Boundary for Finite Dynamics Models", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 103, No. EM5, Proc., pp.949-964