

주파수응답함수를 이용한 감쇠가 있는 유한요소모형의 개선

⁰이 형석* · 우 상연** · 이 건명***

Updating of a Finite Element Model with Damping Effect Using Frequency Response Functions

Hyung-Seok Lee* · Sang-Yeon Woo** · Gun-Myung Lee***

Abstract

Finite element analysis is frequently used to get dynamic characteristics of complex structures. Since the results often show differences from experimentally measured ones, updating of finite element models is performed to make the FE results agree with measured ones. Among several model updating methods, one is to use frequency response function data. This paper investigates characteristics of the model updating method using simulated and experimental data for a cantilever beam. Damping effect is included in FE models, and FRFs for rotational displacements are calculated from FRFs for translational displacements using interpolation.

I. 서론

구조물과 기계의 동적 응답을 예측하기 위하여 사용되고 있는 유한요소해석은 그 결과에 있어서 실험에서 측정된 동적 응답과 일치하지 않는 경우가 흔히 있다. 이러한 경우 유한요소해석 결과를 바로 사용하지 않고 실제로 측정된 데이터와 유한요소해석 결과가 일치하도록 유한요소모형을 개선하는 노력을 기울이고 있다.

진동데이터를 사용하여 유한요소모형을 개선하는 방법에는 모드 영역의 방법, 주파수응답함수(Frequency Response Function)를 사용한 응답 영역의 방법 등 다양한 방법^{[1,2]}}이 있다. FRF를 사용하는 방법 중에 Lin^{[3]}}과 Imregun^{[4]}}등에 의하여 개발된 방법이 있는데, 이 방법에서는 각 유한요소의 질량, 강성행렬의 모든 항을 일정한 비율로 변화시킴으로써 측정된 FRF와 유한요소모형으로부터 예측한 FRF가 일치하도록 하고 있다.

본 논문에서는 시뮬레이션 데이터와 실험 데이터를 사용하여 위 방법의 특성을 고찰하였다. 시스템의 감쇠를 고려하였으며 회전변위에 대한 FRF는 병진변위에 대한 FRF로부터 보간법을 사용하여 구하였다.

II. 이론적 배경

1. 응답함수법

Lin과 Imregun 등에 의하여 개발된 FRF를 이용한 유한요소모형 개선방법을 간략하게 소개한다. 해석 리셉턴스(receptance) 행렬을 $[a_A]$, 실험 리셉턴스 행렬을 $[a_X]$ 로 표시하면 다음과 같은 식을 쓸 수 있다^{[4]}}.

$$[a_A] = [a_X] + [a_A] - [a_X] \quad (1)$$

다음과 같은 형태로 고치면,

$$[a_A] = [a_X] + [a_A][\Delta Z][a_X] \quad (2)$$

여기서 $[\Delta Z] = [a_X]^{-1} - [a_A]^{-1}$ 이다. 만약 $[a_X]$ 의 i 번째 열만 측정한다면 식(2)를 다음과 같이 간단하게 줄일 수 있게 된다.

$$\{a_A\}_i - \{a_X\}_i = [a_A][\Delta Z]\{a_X\}_i \quad (3)$$

* : 경상대학교 대학원

** : 효성에바라

*** : 경상대학교 수송기계공학과, 항공기부품기술연구센터

[ΔZ]는 해석적 방법과 실험적 방법으로 구한 강성행렬, 감쇠행렬, 그리고 질량행렬의 차이로 표현할 수 있다.

$$[\Delta Z] = [Z_A] - [Z_X] \quad (4)$$

$$= [\Delta K] + j\omega[\Delta D] - \omega^2[\Delta M]$$

각 요소에 대한 강성행렬, 질량행렬 및 감쇠행렬의 수정계수를 P_{ki} , P_{mi} , P_{di} 이라 하면 N개의 요소를 가진 유한요소모형에 대해 식(3)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & (\alpha_A)_i - (\alpha_X)_i \\ &= P_{k1}[\alpha_A][K_{e1}](\alpha_X)_i + P_{k2}[\alpha_A][K_{e2}](\alpha_X)_i + \\ & \dots + P_{kn}[\alpha_A][K_{en}](\alpha_X)_i + j\omega P_{d1}[\alpha_A][D_{e1}](\alpha_X)_i \\ & + j\omega P_{d2}[\alpha_A][D_{e2}](\alpha_X)_i + \dots + j\omega P_{dn}[\alpha_A][D_{en}](\alpha_X)_i \\ & - \omega^2 P_{m1}[\alpha_A][M_{e1}](\alpha_X)_i - \omega^2 P_{m2}[\alpha_A][M_{e2}](\alpha_X)_i \\ & - \dots - \omega^2 P_{mn}[\alpha_A][M_{en}](\alpha_X)_i \\ &= [[\alpha_A][K_{e1}](\alpha_X)_i, \dots, [\alpha_A][K_{en}](\alpha_X)_i, \\ & j\omega[\alpha_A][D_{e1}](\alpha_X)_i, \dots, j\omega[\alpha_A][D_{en}](\alpha_X)_i, \\ & -\omega^2[\alpha_A][M_{e1}](\alpha_X)_i, \dots, -\omega^2[\alpha_A][M_{en}](\alpha_X)_i] \begin{pmatrix} P_{k1} \\ \vdots \\ P_{kn} \\ P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dn} \\ P_{m1} \\ \vdots \\ P_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 j는 허수단위이다. 위 식에서 $[K_{ei}]$, $[D_{ei}]$, $[M_{ei}]$ 는 각각 유한요소모형의 전체 강성행렬, 감쇠행렬, 질량행렬에서 i 번째 요소에 해당하는 부분만 남기고 나머지는 0으로 치환한 행렬을 의미한다. 그리고 감쇠는 비례감쇠로 가정하여 각 요소의 감쇠행렬 $[D_e]$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[D_e] = \alpha[M_e] + \beta[K_e] \quad (6)$$

α , β 와 r 번째 모드의 감쇠비 ζ_r , 고유진동수 ω_r 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다^[5].

$$2\zeta_r \omega_r = \alpha + \beta \omega_r^2 \quad (7)$$

$\alpha = 0$ (stiffness-proportional damping)인 경우에는

$$\beta = \frac{2\zeta_r}{\omega_r} \quad (8)$$

이므로 실험 데이터의 모드 해석을 통해 고유진동수 ω_r 과 감쇠비 ζ_r 을 구하고, 이로부터 구한 β 의 평균값을 사용하여 감쇠행렬 $[D_e]$ 를 구할 수 있다.

2. 보 요소

본 논문에서는 유한요소해석에 보 요소를 사용하고 있는데, 이 요소를 Fig. 1에 나타내었다. 이 보 요소는 두 개의 절점을 가지고 있고, 각 절점에서의 병진변위 $w_1(t)$, $w_3(t)$ 와 회전변위 $w_2(t)$, $w_4(t)$, 총 4개의 자유도를 가지고 있으며, f_i 는 절점변위 w_i 에 대응하는 절점력이다.

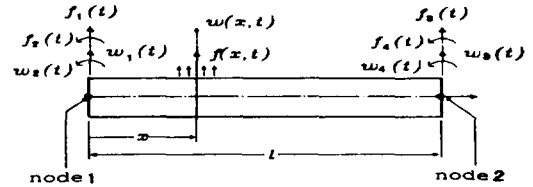


Fig. 1 A beam element.

보 요소에 대한 강성행렬 $[K]$ 과 질량행렬 $[M]$ 은 다음과 같다^[6].

$$[K] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[M] = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

3. 병진변위를 이용한 회전변위의 계산

실제 실험에서 구하기 힘든 회전변위를 간접적인 방법으로 구하는 방법에는 유한요소해석 결과의 회전변위를 그대로 이용하는 방법과 측정된 병진변위로부터 보간법(interpolation)을 이용하여 구하는 방법이 있는데 본 논문에서는 후자를 사용하였다.

보의 각 절점에서 측정된 병진변위로부터 식(11)와 같이 보의 변형 형상을 나타낼 수 있다.

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + a_{(n+1)}x^{n+1} + a_{(n+2)}x^{n+2} \quad (11)$$

외팔보의 경우, 다음의 경계조건

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, y''(x_n) = 0$$

과 각 절점에서의 병진변위

$$y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_{n-1}), y(x_n)$$

로부터 식(12)의 각 항의 계수 a_i 를 구하고, 이 식을 미분함으로써 각 절점에서의 회전변위를 구할 수 있다.

III. 시뮬레이션

유한요소모형의 개선을 위한 응답함수법의 특성을 고찰하기 위하여 이 방법을 시뮬레이션 데이터에 적용하였다. 다섯 개의 요소로 나누어진 외팔보를 대상시스템으로 하여 유한요소모형의 FRF 데이터를 구하고, 유한요소모형의 각 요소의 질량행렬, 강성행렬, 그리고 감쇠행렬에 임의의 수정계수를 곱하여 얻은 유한요소모형의 FRF 데이터를 실험 데이터로 사용하였다. 시뮬레이션에 사용된 외팔보의 제원은 Table 1에 나타내었다.

Table 1 Properties of the cantilever beam

length(l)	270 mm
width(b)	35 mm
height(h)	1.5 mm
Young's modulus(E)	195 GPa
density(ρ)	7580 kg/m ³

1. 감쇠를 고려하지 않은 경우

1.1 병진변위와 회전변위를 모두 측정한 경우

여기서 사용된 실험 데이터는 실제로는 변형된 유한요소모형의 해석결과이므로 회전변위에 대한 FRF의 측정이 가능하다. Table 2에는 실험 데이터에 사용된 각 요소행렬의 수정계수와 응답함수법으로 구한 수정계수를 나타내었다. 이 표에서 양수는 강성행렬이나 질량행렬의 증가를, 음수는 감소를 의미하며, 만약 그 값이 1이라면 100% 증가를 의미한다. 이 표에서 보는 바와 같이 응답함수법의 적용으로 정확한 수정계수를 구하여 유한요소모형의 개선이 이루어졌다. Fig. 2는 개선된 유한요소모형의 FRF가 실험 데이터와 정확하게 일치함을 보여 주고 있다.

Table 2 Estimated values of the correction factors

correction factor	exact value	estimated value
P_{k1}	-0.5	-0.49993
P_{k2}	0.0	0.00003
P_{k3}	0.0	-0.00008
P_{k4}	0.3	0.29994
P_{k5}	1.0	0.99999
P_{m1}	1.0	1.00017
P_{m2}	0.2	0.20003
P_{m3}	0.0	-0.00012
P_{m4}	0.0	-0.00015
P_{m5}	-0.3	-0.29994

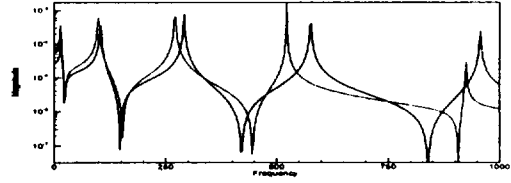


Fig. 2 Comparison of FEM, experiment, and updated FEM data of the simulated system. (— FEM, -- experiment, · · updated FEM)

1.2 병진변위만을 측정한 경우

앞 절에서 사용한 실험 데이터에서 병진변위에 대한 FRF만을 취하고, 회전변위에 대한 FRF는 II.3 절에서 설명한 방법으로 구하였다. 이 경우에는 앞 절과는 달리 응답함수법의 한번 적용으로 정확한 수정계수를 구할 수 없었으므로 이 방법을 반복적으로 적용하였다. 반복계산에 따른 P값의 변화를 Fig. 3에 나타내었다. 반복계산에 따라 P값들이 0에 수렴해 가고, 이는 유한요소모형의 개선이 더 이상 없다는 것을 의미한다. Table 3은 반복 계산에 따른 수정계수의 누적된 값을 보여주고 있고, Fig. 4와 5는 초기 유한요소모형과 개선된 유한요소모형의 FRF, 그리고 측정한 FRF를 비교하고 있다. 표에서 보는 바와 같이 여러 번의 반복 계산을 함으로써 원래의 수정계수 값에 점차적으로 접근해 감을 알 수 있다. 그러나 네 번째 강성행렬과 질량행렬에 대한 수정계수는 큰 오차를 가지고 있음에도 불구하고 Fig. 5에서 보이는 바와 같이 개선된 유한요소모형의 FRF는 측정한 FRF와 일치하고 있다. 이는 실험 데이터와 일치하는 유한요소모형이 여러 개 존재함을 의미한다.

Table 3 Estimated values of the correction factors

correction factor	exact value	estimated value		
		1 iteration	5 iterations	10 iterations
P_{k1}	-0.5	-0.66954	-0.51222	-0.50435
P_{k2}	0.0	-0.28511	-0.02311	-0.03788
P_{k3}	0.0	-0.17808	0.03574	0.02437
P_{k4}	0.3	0.05179	0.07221	0.09261
P_{k5}	1.0	-0.34387	0.68470	0.79870
P_{m1}	1.0	0.00156	0.91650	0.95757
P_{m2}	0.2	0.04967	0.09057	0.07463
P_{m3}	0.0	-0.15867	-0.06225	-0.05936
P_{m4}	0.0	-0.11754	-0.21305	-0.19206
P_{m5}	-0.3	-0.59264	-0.20338	-0.20353

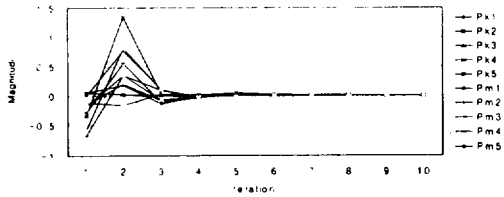


Fig. 3 Variation of correction factors with iteration number.

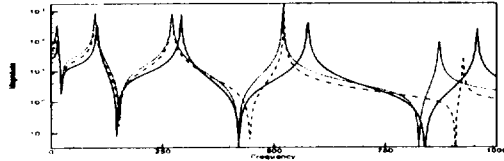


Fig. 4 Comparison of FEM, experiment, and updated FEM data of the simulated system (1 iteration).
(— FEM, -- experiment, · · updated FEM)

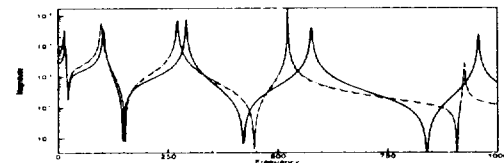


Fig. 5 Comparison of FEM, experiment, and updated FEM data of the simulated system (10 iterations).
(— FEM, -- experiment, · · updated FEM)

2. 감쇠를 고려한 경우

실제 우리가 사용하는 모든 기계나 구조물은 감쇠를 가지고 있으므로, 이 절에서는 감쇠를 첨가하여 보다 실제에 가까운 유한요소모형을 만들었다. 그리고 회전변위에 대한 FRF는 병진변위로부터 보간법을 이용하여 구하였다. 초기 유한요소모형의 감쇠행렬은 강성행렬에 $\beta = 2.0e-6$ 를 곱하여 만들었다. 실험 데이터를 만들기 위하여 사용한 수정계수를 Table 4에 수록하였다.

응답함수법을 반복적으로 적용하여 구한 수정계수를 Fig. 6에 나타내었다. 이 그림으로부터 반복 횟수 5회 이후로는 수정계수의 값이 거의 0이므로 개선된 유한요소모형에 거의 변화가 없음을 알 수 있다. 반복 계산에 따른 각 요소행렬의 누적 수정계수를 Table 4에 수록하였다. 계산된 수정계수는 감쇠를 고려하지 않은 경우에 비하여 더욱 큰 오차

를 지니고 있다. 그러나 Fig. 7과 8에서 보인 것처럼 개선된 유한요소모형의 FRF는 실험 데이터와 거의 일치하고 있다.

Table 4 Estimated values of the correction factors

correction factor	exact value	estimated value		
		1 iteration	5 iterations	10 iterations
P_{k1}	-0.2	-0.14094	-0.14857	-0.14839
P_{k2}	-0.5	0.15593	0.16398	0.16427
P_{k3}	0.3	0.35791	0.38214	0.38209
P_{k4}	-0.2	0.12072	0.12532	0.12557
P_{k5}	0.1	0.09432	0.05706	0.05718
P_{m1}	0.2	0.12002	0.19551	0.19564
P_{m2}	-0.2	-0.10111	-0.17507	-0.17482
P_{m3}	0.0	-0.08044	0.02201	0.02187
P_{m4}	-0.3	-0.52319	-0.43378	-0.43366
P_{m5}	-0.1	-0.17112	-0.24479	-0.24463
P_{d1}	0.0	3.49243	0.73717	0.73005
P_{d2}	-0.5	4.57809	-0.03426	0.03974
P_{d3}	-0.25	1.93966	0.28450	0.28823
P_{d4}	0.5	0.79109	0.14675	-0.13277
P_{d5}	0.25	-1.32802	-0.33468	0.32196

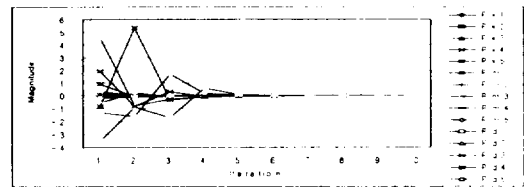


Fig. 6 Variation of correction factors with iteration number.

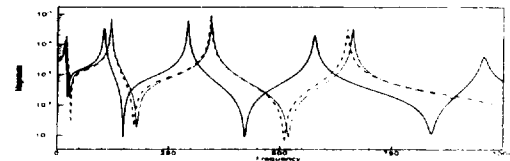


Fig. 7 Comparison of FEM, experiment, and updated FEM data of the simulated system (1 iteration).
(— FEM, -- experiment, · · updated FEM)

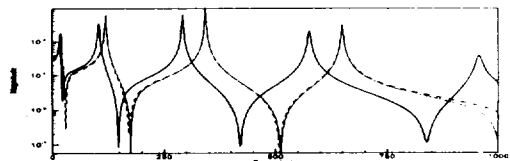


Fig. 8 Comparison of FEM, experiment, and updated FEM data of the simulated system (5 iterations).
(— FEM, -- experiment, · · updated FEM)

IV. 실험

본 응답함수법을 실제 실험 데이터에 적용하기 위하여 Fig. 9와 같이 외팔보에 대하여 실험을 수행하였다. 사용된 장비는 충격해머(Dytran 5801A4), 가속도계(PCB 302A), 그리고 입력신호와 출력신호를 분석하기 위한 FFT 분석기(ONO SOKKI CF-350), 그리고 FFT 분석기로부터 실험 데이터를 컴퓨터로 보내주는 GPIB(general purpose interface bus)등이다.

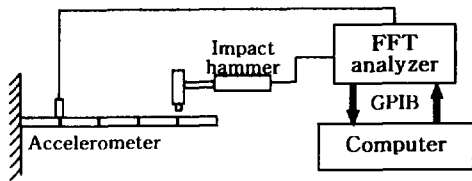


Fig. 9 Schematic diagram of the experimental setup.

실험에 사용된 구조물은 길이 270mm, 폭 35mm, 두께 1.5mm인 스테인레스강 외팔보이다. 외팔보를 등간격으로 다섯 개의 요소로 나누고, 한 절점에 가속도계를 설치하고, 각각의 절점에 충격해머로 가진을 하여 FRF를 측정하였으며 FFT분석기에서 두 번 적분하여 리셉턴스를 얻었다. 이와 같이 측정한 FRF는 저주파수 부분에서 부정확한 결과를 나타내므로 저주파수 부분의 일정 범위를 실험 데이터에서 제거하여 사용하였다.

1. 감쇠를 고려하지 않은 경우

감쇠를 고려하지 않기 위하여 실험으로 측정한 FRF 데이터의 실수부만을 사용하였고, 주파수 범위는 50~1000Hz이며 데이터 간격은 2.5Hz이다. 이 실험 데이터에 응답함수법을 반복적으로 적용하였을 때 매번 계산된 수정계수를 Fig. 10에 나타내었다. 시뮬레이션 데이터를 사용하였을 경우와는 달리 일부 요소행렬에 대한 수정계수는 0에 수렴하지 않고 큰 폭으로 변화하고 있다. 실험으로 측정한 FRF와 개선된 유한요소모형의 FRF는 반복계산을 함에 따라 그 차이가 줄어들다가 다시 커지는 것을 볼 수 있었다. Fig. 11과 12는 반복 횟수가 1회와 4회일 때의 실험으로 측정한 FRF와 개선된 유한요소모형의 FRF를 비교하였다. 반복횟수가 4회일 때 두 FRF가 가장 잘 일치하고 있다. 따라서 이러한 경우에는 두 FRF를 관찰하면서 반복 계산을 수행하여 그 차이가 최소로 될 때의 유

한요소모형을 최종적으로 개선된 모형으로 선택하여야 한다.

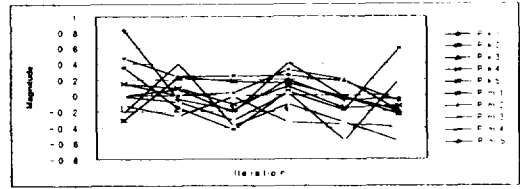


Fig. 10 Variation of correction factors with iteration number.

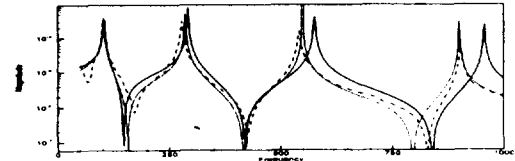


Fig. 11 Comparison of FEM, experiment, and updated FEM data of the cantilever beam (1 iteration).

(— FEM, -- experiment, · · updated FEM)

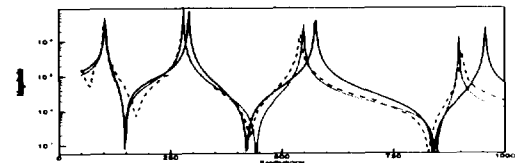


Fig. 12 Comparison of FEM, experiment, and updated FEM data of the cantilever beam (4 iterations).

(— FEM, -- experiment, · · updated FEM)

2. 감쇠를 고려한 경우

감쇠를 고려하기 위하여 실험으로 측정한 FRF 데이터의 실수부와 허수부를 함께 사용하였다. 강성비례감쇠로 가정하여 실험 데이터를 모드 해석하여 고유진동수와 감쇠비를 구하고, 이로부터 구한 β 값들의 평균을 각 요소의 강성행렬에 곱함으로써 초기 유한요소모형의 감쇠행렬을 만들었다. 사용된 실험데이터의 주파수 범위는 앞과 같이 50~1000 Hz로 하였다.

실험 데이터에 응답함수법을 반복적으로 적용하였을 때 반복계산에 따른 수정계수의 변화를 Fig. 13에 나타내었고, 실험으로 측정한 FRF와 개선된 유한요소모형의 FRF를 Fig. 14와 15에서 비교하였다. 앞의 감쇠를 고려하지 않았을 경우와 유사한 결과를 관찰할 수 있다. 반복 계산에 따라 수정계수는 0에 수렴하지 않고 계속 변화하고 있으며, 반

복 횟수가 2회일 때 두 FRF는 가장 잘 일치하고 있다.

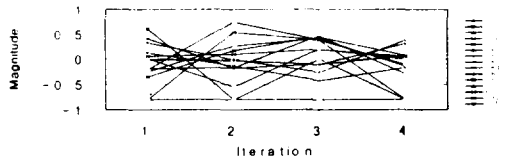


Fig. 13 Variation of correction factors with iteration number.

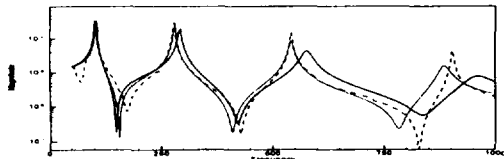


Fig. 14 Comparison of FEM, experiment, and updated FEM data of the cantilever beam (1 iteration).

(— FEM, -- experiment, · · · updated FEM)

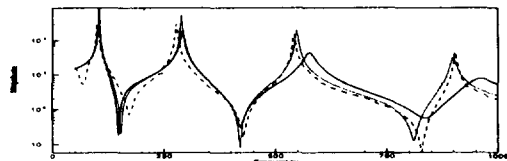


Fig. 15 Comparison of FEM, experiment, and updated FEM data of the cantilever beam (2 iterations).

(— FEM, -- experiment, · · · updated FEM)

V. 결론

유한요소모형의 개선을 위하여 주파수응답함수 데이터를 사용하는 응답함수법의 특성을 고찰하기 위하여 본 방법을 시뮬레이션 시스템과 실제 시스템에 적용하였다. 시뮬레이션 시스템에서 병진변위와 회전변위에 대한 FRF를 모두 측정할 경우에는 본 방법의 한번 적용으로 정확한 수정계수를 구하여 개선된 유한요소모형이 실험 결과와 일치하였다. 병진변위에 대한 FRF만을 측정할 경우에는 본 방법을 반복 적용함으로써 실험 결과와 일치하는 유한요소모형을 얻을 수 있었으나 이 때 구한 수정계수는 원래 값과 비교하여 약간의 오차를 가지고 있었다. 이는 실험 결과와 일치하는 유한요소모형이 여러 개 존재할 수 있음을 의미한다. 감쇠를 고려하였을 경우에도 유사한 결과를 얻었으며 이

때 계산된 수정계수는 더욱 큰 오차를 지니고 있었다.

실제 시스템인 외팔보에 본 방법을 적용하였을 경우에는 시뮬레이션 시스템과 달리 반복 계산을 함에 따라 일부 요소행렬에 대한 수정계수가 0에 수렴하지 않고 큰 폭으로 변화하였다. 실험으로 측정된 FRF와 개선된 유한요소모형의 FRF는 반복 계산을 함에 따라 그 차이가 줄어들다가 다시 커지는 결과를 보였다. 따라서 반복 계산을 수행하면서 두 FRF를 관찰하여 그 차이가 최소로 되는 유한요소모형을 선택하여야 한다.

후기

이 논문은 2000년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

1. 박윤식, 박용화, 1999, "구조물 동특성 변경 관련 연구 분야 및 동향(IV)," 한국소음진동공학회지, 제 9권, 제 6호, pp. 1091~1105.
2. 박윤식, 박용화, 2000, "구조물 동특성 변경 관련 연구 분야 및 동향(V)," 한국소음진동공학회지, 제 10권, 제 1호, pp. 25~32.
3. Lim, R. M. and Ewins, D. J., 1994, "Analytical Model Improvement Using Frequency Response Function," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 4, No. 4, pp. 437~458.
4. Imregun, M., Visser, W. J. and Ewins, D. J., 1995, "Finite Element Model Updating Using Frequency Response Function Data-I. Theory and Initial Investigation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 9, No. 2, pp. 187~202.
5. Petyt, M., 1990, *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, Cambridge University Press, pp. 386~392.
6. Rao, S. S., 1995, *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley, pp. 731~734.