

내부 유동이 있는 곡선 파이프의 면내 및 면외 진동 해석

이수일*, 정진태**

In-Plane and Out-of-Plane Vibration Analysis of Uniformly Curved Pipes Conveying Fluid

Soo Il Lee*, Jintai Chung**

ABSTRACT

The non-linear differential equations of motion of a fluid conveying curved pipe are derived by making use of Hamiltonian approach. The extensible dynamics of the pipe is based on the Euler-Bernoulli beam theory. Some significant differences between linear and nonlinear equations and the basic analysis results are discussed. Using eigenfrequency analysis, it can be shown that the natural frequencies are changed with flow velocity.

1. 서론

내부 유체 유동을 포함한 파이프의 진동 해석은 실제 응용 범위가 넓기 때문에 국내외에서 오래 전부터 다양한 방법으로 연구가 진행되어 왔다. 각종 플랜트, 냉동 및 공조 가전, 기계의 유압 계통 등 파이프 내부 유동에 의한 진동이 나타나는 계는 흔히 찾아 볼 수 있다. 이러한 진동 현상은 제품 자체의 성능과 수명에 영향을 미칠 뿐 아니라 소음 등의 발생원인이 되기 때문에 이의 해결을 위한 노력이 진행되고 있다.

일반적인 직선 및 곡선 파이프의 유동 기인 진동에 대해서는 Paidoussis 를 비롯한 많은 연구자들의 연구 결과가 발표되었으나 [1-4], 선형 안정성 해석 또는 2 차원 비선형 진동 해석 수준에 국한되어 있다. 또한 곡

선 파이프에 대한 연구도 곡선이 이루는 평면내(in-plane) 운동과 평면외(out-of-plane) 운동이 서로 분리되어 있다고 가정하여 해석한 것이 대부분이다.

따라서, 본 연구에서는 늘어날 수 있는 곡선 파이프 계에서 곡선이 이루는 면내 방향 운동과 면외 방향 운동 간의 연성이 존재함을 비선형 운동 방정식 유도 과정으로부터 확인하고, 면내 방향과 면외 방향에 대한 고유진동수 해석을 통하여 그 영향을 해석적으로 확인해 보고자 한다.

2. 운동 방정식 유도

내부 유동을 갖는 곡선 파이프의 비선형 운동 방정식을 유도하기 위하여, Fig. 1 과 같이 양끝단이 단순지지된 반경 R_0 , 각도

* 정회원, 한양대학교 BK21 기계분야사업단 (leesooil@email.hanyang.ac.kr)

** 정회원, 한양대학교 기계공학과

θ_0 , 외경 d_0 , 두께 t 인 탄성 재질 파이프 계를 고려하였다. 파이프의 곡선 반경에 비해 파이프 외경이 작으므로 파이프의 전단 변형이나 회전 관성에 의한 효과는 무시할 수 있다. 또한 파이프의 변형이 어느 정도 큰 경우에는 일반적인 면내 굽힘 이외에 인장이나 면의 굽힘도 동시에 고려해야 한다. 또한 내부 유체는 비압축성이며, 유체의 속도 분포는 단면 및 파이프를 따라서 균일하다고 가정하였다.

Fig. 2는 변형 전·후의 파이프 형상을 나타낸다. $(\hat{e}_t, \hat{e}_n, \hat{e}_b)$ 와 $(\hat{e}_T, \hat{e}_N, \hat{e}_B)$ 는 임의의 파이프 중심 점에서 변형 전·후의 단위 좌표계를 나타내며, u, v, w, ϕ 는 각각 파이프의 인장 방향(t), 면내 반경 방향(n), 면의 방향(b), 그리고 비틀림 방향 변위를 나타낸다. 또한 파이프 길이 방향을 따라가는 변형 전·후의 좌표를 각각 s, \tilde{s} 라 하면, 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\frac{ds}{d\tilde{s}} = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{R_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{R_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (1)$$

계의 변형 에너지를 구하기 위하여 파이프의 변형율과 곡률 변화를 구하면 다음과 같다. 먼저 파이프의 인장 변형율(strain)은

$$e = \lim_{\delta \tilde{s} \rightarrow 0} \frac{\delta \tilde{s} - \delta s}{\delta s} \equiv \frac{d\tilde{s}}{ds} - 1, \quad (2)$$

와 같이 나타낼 수 있으므로, 곡선 파이프에서는 결국 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$e \approx \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{R_0} + \frac{u}{R_0} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \quad (3)$$

또 파이프 위의 임의의 점에서 변형 전·후 사이의 Euler 회전각 관계식을 적용하면, 다음과 같이 각 방향 선형 곡률 성분을 구할 수 있다.

$$\kappa_T \approx \frac{1}{R_0} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial s}, \quad (4a)$$

$$\kappa_N \approx \frac{1}{R_0} \phi - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad (4b)$$

$$\kappa_B \approx \frac{1}{R_0} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial s}, \quad (4c)$$

$$\kappa_O = \frac{1}{R_0}. \quad (4d)$$

결국 전체 계의 변형에너지에서 유체에 의한 영향은 작다고 생각할 수 있으므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EAe^2 + GJ\kappa_T^2 + EI(\kappa_N^2 + (\kappa_B - \kappa_O)^2) \right] ds. \quad (5)$$

여기서, EA, GJ, EI 는 각각 인장, 비틀림, 굽힘 강성계수를 나타낸다.

다음으로 계의 운동 에너지를 구하기 위하여 파이프와 내부 유체의 속도 벡터 \mathbf{v}_p 와 \mathbf{v}_f 를 구하면 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{v}_p = \dot{u}\hat{e}_t + \dot{v}\hat{e}_n + \dot{w}\hat{e}_b, \quad (6a)$$

$$\mathbf{v}_f = (\dot{u} + U)\hat{e}_t + \left(\dot{v} + U \frac{\partial v}{\partial s} + U \frac{u}{R_0} \right) \hat{e}_n + \left(\dot{w} + U \frac{\partial w}{\partial s} \right) \hat{e}_b. \quad (6b)$$

여기서 U 는 유체의 속도를 나타낸다. 따라서 전체 계의 운동에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (m \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p + I_T \dot{\phi}^2) ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^L (M \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{v}_f) ds. \quad (7)$$

여기에서 m 과 M 은 파이프와 유체의 단위 질량을, I_T 는 회전 관성모멘트를 나타낸다.

이상에서 구한 운동에너지 식(7)과 변형에너지 식(5)를 다음과 같은 해밀턴 정리 (Hamilton's Principle)에 적용하면,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0, \quad (8)$$

다음의 운동 방정식을 구할 수 있다.

식(9a-d)는 2 차 비선형 항까지 근사화한 결과로, 유체의 가속도에 의한 영향과 함께 u, v, w 간에 비선형 항으로 서로 연성되어 있음을 알 수 있다. 그리고 식(9a-d)에서 비선형 항을 무시하고 선형 부분만 고려하면 Paidoussis[3]의 선형 방정식 유도 결과와 일치하고, 곡선 형상에 의한 효과를 무시하면(즉, $R_0 \rightarrow \infty$) 직선 파이프에 대한 운동 방정식을 얻을 수 있다. 또한, 면내 운동에 대한 식(9a-b)와 면외 운동에 대한 식(9c-d)사이에는 2 차 이상의 비선형 연성이 존재한다.

$$(m + M)\ddot{u} + M\dot{U} - MU \frac{\dot{v}}{R_0} + MU^2 \left(-\frac{u}{R_0^2} - \frac{v'}{R_0} \right) + EA \left(-u'' + \frac{v'}{R_0} - v'v'' - w'w'' - \frac{uv}{R_0^3} - \frac{vv'}{R_0^2} - \frac{uu''}{R_0} \right) + EI \left(-\frac{u''}{R_0^2} - \frac{v'''}{R_0} \right) = 0, \quad (9a)$$

$$(m + M)\ddot{v} + M\dot{U} \left(v' + \frac{u}{R_0} \right) + 2MU \left(\dot{v} + \frac{\dot{u}}{2R_0} \right) + MU^2 \left(v'' + \frac{u'}{R_0} \right) + EA \left[\frac{v}{R_0^2} - \frac{u'}{R_0} - u'v'' - u''v' - \frac{u^2}{2R_0^3} + \frac{u'v}{R_0^2} - \frac{uu''}{R_0} + \frac{vv''}{R_0} - \frac{(u')^2}{2R_0} + \frac{(v')^2}{2R_0} - \frac{(w')^2}{2R_0} \right] + EI \left(\frac{u'''}{R_0} + v'''' \right) = 0, \quad (9b)$$

$$(m + M)\ddot{w} + M\dot{U}w' + 2MU\dot{w}' + MU^2w'' + EA \left(-u'w'' - u''w' + \frac{vw''}{R_0} + \frac{v'w'}{R_0} \right) + EI \left(w'''' - \frac{\phi''}{R_0} \right) + GJ \left(-\frac{\phi''}{R_0} - \frac{w''}{R_0^2} \right) = 0, \quad (9c)$$

$$I_T \ddot{\phi} + EI \left(\frac{\phi}{R_0^2} - \frac{w''}{R_0} \right) + GJ \left(-\phi'' - \frac{w''}{R_0} \right) = 0, \quad (9d)$$

여기서 미분기호 $()'$ 와 $()\dot{}$ 는 각각 s 와 t 에 대한 미분을 나타낸다. 또한 경계조건은 양끝단($s = 0, L$)에서 다음과 같다.

$$u = v = v'' = w = w'' = \phi = 0. \quad (10)$$

3. 운동 방정식의 무차원화 및 이산화

다음으로 아래와 같은 무차원 변수와 매개변수를 도입하여 방정식(9a-d)를 무차원화시킨다.

$$\bar{u} = \frac{u}{R_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{R_0}, \quad \bar{w} = \frac{w}{R_0}, \quad \bar{\phi} = \phi,$$

$$\bar{s} = \frac{s}{R_0} \equiv \theta, \quad \bar{t} = \frac{t}{R_0} \sqrt{\frac{EI}{m+M}},$$

$$\bar{U} = UR_0 \sqrt{\frac{M}{EI}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{M}{m+M}},$$

$$k = \frac{A}{I} R_0^2, \quad \gamma = \frac{GJ}{EI}, \quad \mu = \frac{(m+M)R_0^2}{I_T},$$

$$\bar{\omega}_n = \omega_n R_0 \sqrt{\frac{m+M}{EI}}.$$

여기서 A, I 는 각각 파이프의 단면적, 관성 모멘트를, ω_n 는 선형고유진동수를 나타낸다. 이렇게 무차원화된 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{u}} + \bar{U}R_0\beta - \bar{U}\beta\dot{\bar{v}} + \bar{U}^2(-\bar{u} - \bar{v}') \\ + k(-\bar{u}'' + \bar{v}' - \bar{v}'\bar{v}'' - \bar{w}'\bar{w}'' \\ - \bar{u}\bar{v} - \bar{v}\bar{v}' - \bar{u}\bar{v}'') \\ - \bar{u}'' + \bar{v}''' = 0, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{v}} + \bar{U}R_0\beta(\bar{v}' + \bar{u}) \\ + 2\bar{U}\beta\left(\bar{v}' + \frac{\dot{\bar{u}}}{2}\right) + \bar{U}^2(\bar{v}'' + \bar{u}') \\ + k(\bar{v} - \bar{u}' - \bar{u}'\bar{v}'' - \bar{u}^2 + \bar{u}'\bar{v} - \bar{u}\bar{u}'' \\ + \bar{v}\bar{v}'' - \frac{(\bar{u}')^2}{2} + \frac{(\bar{v}')^2}{2} - \frac{(\bar{w}')^2}{2}) \\ + \bar{u}''' + \bar{v}''' = 0, \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{w}} + \bar{U}R_0\beta\bar{w}' + 2\bar{U}\beta\bar{w}' + \bar{U}^2\bar{w}'' \\ + k(-\bar{u}'\bar{w}'' - \bar{u}''\bar{w}' + \bar{v}\bar{w}'' + \bar{v}'\bar{w}') \\ + \gamma(-\bar{w}'' - \bar{\phi}'') + \bar{w}''' - \bar{\phi}'' = 0, \end{aligned} \quad (11c)$$

$$\ddot{\bar{\phi}} + \mu(\bar{\phi} - \bar{w}'') + \mu \cdot \gamma(-\bar{\phi}'' - \bar{w}'') = 0. \quad (11d)$$

여기서 $(\quad)' = \partial(\quad)/\partial\theta$, $(\quad)\dot{\quad} = \partial(\quad)/\partial t$ 이며, $\theta = 0, \theta_0$ 에서 경계조건도 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{v}'' = \bar{w} = \bar{w}'' = \bar{\phi} = 0 \quad (12)$$

이상의 무차원화된 방정식(11a-d)에 다음과 같이 해를 가정하여 대입하고, Galerkin 근사 방법을 적용한다.

$$\bar{u}(\theta, \bar{t}) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m(\theta) x_m(\bar{t}), \quad (13a)$$

$$\bar{v}(\theta, \bar{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\theta) y_n(\bar{t}), \quad (13b)$$

$$\bar{w}(\theta, \bar{t}) = \sum_{r=1}^{\infty} Z_r(\theta) z_r(\bar{t}), \quad (13c)$$

$$\bar{\phi}(\theta, \bar{t}) = \sum_{s=1}^{\infty} \Psi_s(\theta) \psi_s(\bar{t}), \quad (13d)$$

$$(m, n, r, s = 1, 2, 3, \dots, N).$$

즉, θ 에 관한 함수들을 각각 경계조건 식 (12)를 만족하는 유한개의 조화 급수로 가정하면, 직교성에 의하여 필요한 Galerkin 계수들을 비교적 수월하게 구할 수 있다.

복잡한 연산 과정을 거쳐 결국 이산화된 방정식은 다음과 같은 벡터-행렬 식으로 정리할 수 있다.

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (14)$$

여기서, $\mathbf{x} = \{x_m \mid y_n \mid z_r \mid \psi_s\}^T$, \mathbf{G} 는 자이로스콧행렬, \mathbf{K} 는 강성 및 원심력 행렬, $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ 은 \mathbf{x} 에 대한 비선형 열벡터이다. 각 행렬과 벡터 요소의 자세한 표현식은 지면 관계상 생략하였다.

4. 기본 해석 및 토의

우선 이산화된 방정식(14)의 타당성 검증을 위하여 비선형부분과 유체 유동에 의한 영향을 배제한 뒤 ($\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\bar{U} = \bar{U} = 0$), $\theta_0 = \pi/2$ 일 때, 기존의 곡선 보 이론에 의

한 고유진동수 수치 결과와 비교하였다. 무차원 고유진동수 비교 결과 (Table 1), 서로 잘 일치 함을 확인하였다. 일반적인 예측과 같이 면의 방향의 굽힘 고유진동수가 가장 낮게 나옴을 알 수 있다.

다음으로 선형 방정식에 대해서 무차원 유속 \bar{U} 에 따라 변화하는 고유진동수 결과는 Fig. 3 에 나타낸 것과 같다. Fig. 3 (a)는 면내 방향 굽힘 모드 선형 고유진동수 결과로 유속이 증가함에 따라 고유진동수는 점차 감소하는 경향을 보이고 있다. Fig. 3 (b)는 면외 방향 굽힘 모드의 고유진동수 결과로 역시 면내 방향의 결과와 비슷한 경향을 보이며, 임의의 유속 이상에서 고유진동수가 0 이 되어 불안정해지는 일종의 임계 고유진동수가 있음을 확인할 수 있다. 그러나, 이상의 해석은 선형 방정식에서 면내와 면외 방향이 서로 비연성되어 나타나므로 이를 따로 나누어 정식화 한 기존의 결과와 유사하다고 할 수 있다.

다음으로 면내 및 면외 방향의 비선형 연성 항의 영향을 추가하여 해석하였다. 유속에 따른 정상상태 평형 위치를 구하고, 여기에서 선형화 한 계에 대하여 구한 고유진동수 결과는 Fig. 4 와 같다. 이와 같은 비선형성을 고려한 해석 결과에서, 특히 면외 굽힘 고유진동수가 선형의 경우보다 유속에 대해 덜 감소하는 경향이 나타남을 알 수 있다. 이는 선형에서 구한 임계 고유진동수 이상에서도 고유진동수가 계속 존재하는 것으로 예측할 수 있다.

5. 결론 및 향후 계획

일반적인 선형 정식화에 의한 내부유동이 있는 파이프의 진동 해석에서는, 면내 방향과 면외 방향이 서로 비연성되어 독립적으로 나타나므로 면내·면외의 상호 작용에 의한 영향이 나타나지 않는다. 그러나, 파이프의 변형이 어느정도 크고, 파이프가 신장

가능하다는 가정을 도입하면, 식(9a-d)와 같은 비선형 방정식을 얻을 수 있고, 수치 해석 결과 유속에 따른 고유진동수 변화에서 선형과는 다소 차이가 있음을 확인할 수 있다.

향후에는 지금까지의 해석 결과를 바탕으로 좀 더 다양한 매개 변수 영역에서 해석을 진행하고자 한다. 또한 비선형성의 영향에 의한 안정성 해석을 위하여 전체 방정식을 저차원(low dimension) 모델로 이상화하고, 추가의 맥동(pulsating flow)에 의한 매개가진(parametric excitation)의 영향과 면내/면외 방향 진동 모드의 연성 및 분기 현상을 고찰할 예정이다.

후 기

이 논문은 2000년도 두뇌한국 21 (BK21) 사업에 의하여 지원되었음.

참 고 문 헌

1. 박철휘, 홍성철, 김태정, "조화진동유동을 포함한 곡선파이프 계의 혼돈 운동 연구," 한국소음진동공학회지, 제 7 권, 제 3 호, pp.489-498, 1997.
2. 홍성철, "조화진동유동을 포함한 곡선파이프 계의 외평면 혼돈운동 연구," 한국소음진동공학회지 (게재예정), 2000.
3. M. P. Paidoussis, *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, Academic Press, 1998.
4. C. Dupis, J. Rousselet, "The Equations of Motion of Curved Pipes Conveying Fluid," *J. of Sound and Vibration*, Vol.153, No.3, pp.473-489, 1992.
5. S. P. Maganty, W. B. Bickford, "Large Amplitude Oscillations of Thin Circular Rings," *ASME Trans., J. of Applied Mechanics*, Vol.54, pp.315-322, 1987.
6. R. D. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand, 1979.

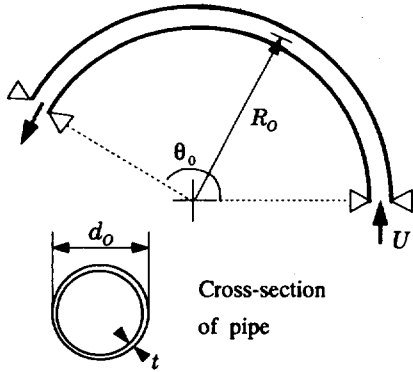


Fig. 1 Curved pipe conveying fluid.

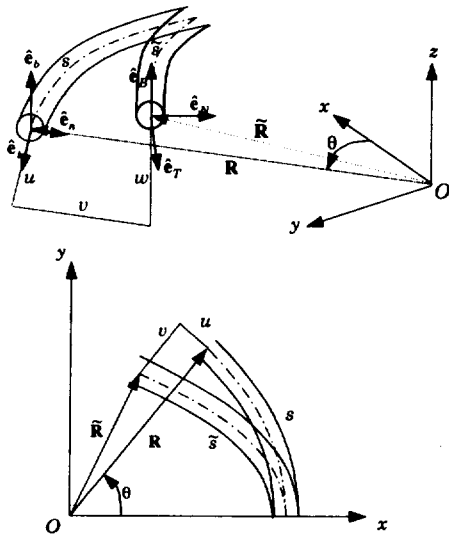


Fig. 2 Deformed and undeformed configurations of pipe.

Table 1 Dimensionless linear eigenfrequencies of simply-supported curved pipe when $\theta_0 = \pi/2, \beta = 0.03, k = 800$

Modes	This study	Ref.[6]
1st out-of-plane bending	2.612	2.606
1st in-plane bending	13.832	13.765
2nd in-plane bending	32.398	32.404
3rd in-plane bending	63.015	61.573
1st in-plane extension	118.206	116.678

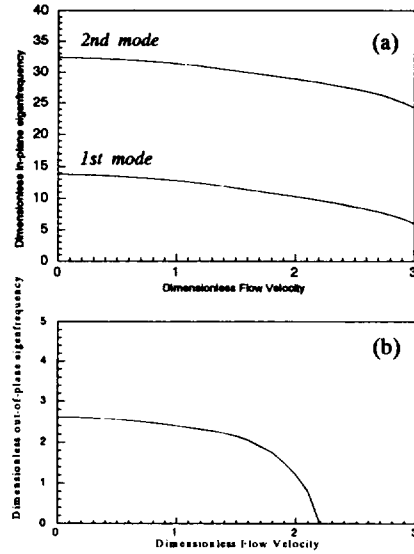


Fig. 3 Dimensionless linear eigenfrequencies for (a) in-plane mode and (b) out-of-plane mode when $\theta_0 = \pi/2, \beta = 0.03, k = 800$

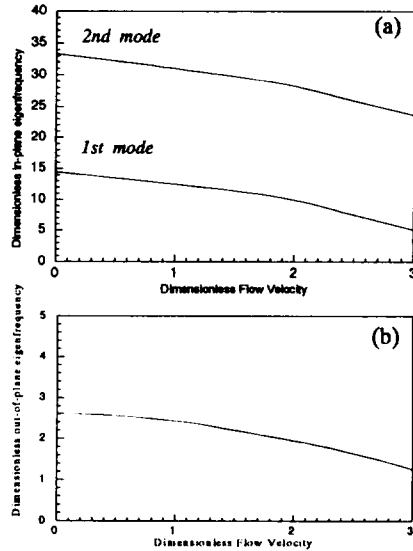


Fig. 4 Dimensionless eigenfrequencies considering non-linear effects for (a) in-plane mode and (b) out-of-plane mode when $\theta_0 = \pi/2, \beta = 0.03, k = 800$