

평면격자형 구조물의 동적응답 해석알고리즘에 관한 연구

문덕홍* · 강현석** · 최명수* · 김용복***

A Study on Dynamic Response Analysis Algorithm of Plane Lattice Structure

D. H. Moon · H. S. Kang · M. S. Choi and Y.B. Kim

Abstract

Recently it is increased by degrees to construct complex and large lattice structure such as bridge, tower and crane structures. It is very important problem to know dynamic properties of such structures.

Authors presented new dynamic response analysis algorithm for rectilinear structure already. This analysis algorithm is combined transfer stiffness coefficient method with Newmark method. Presented method improves the computational accuracy remarkably owing to advantage of the transfer stiffness coefficient method.

This paper formulates dynamic response analysis algorithm for plane lattice structure expanding rectilinear structures.

1. 서론

최근의 기계나 구조물은 점점 복잡화, 거대화, 정밀화되어 가고 있다. 따라서 지진등의 비상시에 구조물의 안정성을 확보하기 위해서는 구조물의 기초설계 단계시에 정확한 동특성을 파악해야 될 필요가 있다. 이런 동특성해석 중에서 한 부분을 차지하고 있는 것이 구조물의 동적응답해석 또는 과도응답해석이다.

대규모 구조물의 정확한 동적응답 해석을 위하여 지금까지는 워크스테이션 이상의 고가의 컴퓨터를 이용해 왔다.

이러한 해석기법중에 대표적인 것이 유한요소법(FEM ; finite element method)을 이용한 기법이다¹⁾.

현재, 퍼스널 컴퓨터(PC ; Personal computer)의 발달에 따라서 대형의 계산기에 의해 계산되었던 대형의 구조물 및 기계구조물의 동적응답해석에 PC를 적용하고 있다.

유한요소법을 이용하면 유한자유도를 갖는 이산화된 시스템으로 변환하여 해석하지만, 해석대상으로 하는 구조물이 대규모가 되고, 그리고 보다 엄밀한 계산을 하기 위해서는 해석에 필요한 전체 자유도가 증가되어 계산시간 및 계산용량이 커진다.

이러한 문제점을 해결하기 위해 해석대상을 이산화한후, 시간적분법과 전달매트릭스법(TMM ; transfer matrix method)을 이용한 기법이 보고되었다²⁾. 이 기법은 거대한 자유도의 시스템을 힉과 변위의 자유도만을 가진 이산시스템으로 변환하므로 계산시간 및 계산용량을 줄일 수 있다. 그렇지만 중간에 경탄성지지등이 존재하는 경우에 계산

* 부경대학교 기계공학부
** 부경대학교 대학원
*** 해양수산연수원

이 불안정해지는 단점이 있다.

저자들은 강성계수의 축차전달에 기본 개념을 두고 개발된 전달강성계수법(TSCM ; transfer stiffness coefficient method)에 시간적분법중의 하나인 Newmark 법을 적용하여 직선형 구조물에 대한 새로운 동적응답해석 알고리즘을 개발하여 FEM과 TMM과의 계산시간 및 계산정도의 비교를 통해서 유용성을 확인한 바 있다³⁾⁻⁵⁾.

본 연구는 교량과 크레인 구조물에서 자주 보이는 평면 격자형 구조물을 해석 대상으로 하여 종·굽힘 연성 강제진동에 대한 동적응답 해석알고리즘을 정식화하고, 간단한 계산모델에 대한 수치계산을 통해서 유용성을 확인한다.

2. 동적응답 해석알고리즘

2.1 해석대상의 모델링

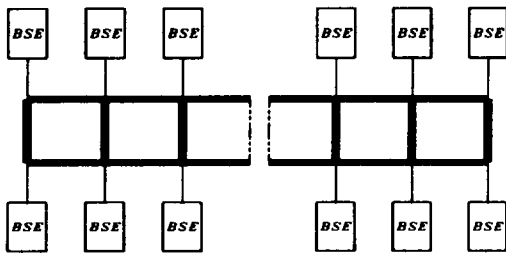


Fig. 1 Analytical model

Fig. 1은 본 연구의 해석 모델을 나타내는 그림으로서 계는 이산화하여 질량과 회전관성 및 보요소가 직렬결합되어 있는 집중질량계로 모델링한다. 해석 대상계는 강제력이 가해지는 부분, 기초지지요소(BSE ; base support element)가 존재하는 부분 등 힘벡터가 불연속이 되는 점은 반드시 절점이 되도록 분할하여 절점에 강제력이 작용하게 모델링하고, 편의상 계의 좌단을 절점 0, 계의 우단을 절점 n 으로 한다.

Fig. 2는 Fig. 1 해석모델의 부분계를 나타내는 그림으로 1층과 2층의 부재가 중간부재에 의해 연결되는 구조로 전체계는 부분계들의 직렬결합으로 구성되어있다.

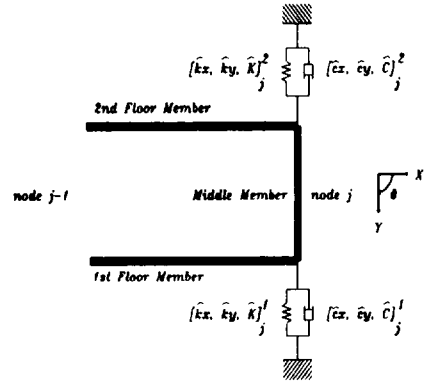


Fig. 2 Subsystem

Fig. 2에서 1층과 2층 및 중간부재의 보요소로는 종탄성계수, 횡탄성계수, 단면2차 모멘트, 길이 및 면적(E_j, G_j, I_j, l_j, A_j)이 있고, 기초지지요소는 종방향과 횡방향의 전단스프링 및 회전스프링($\hat{k}_x, \hat{k}_y, \hat{K}$)과 종방향과 횡방향의 감쇠기 및 회전 감쇠기($\hat{c}_x, \hat{c}_y, \hat{C}$)로 지지되고 있다.

본 연구에서 사용하고 있는 기호의 의미는 다음과 같다.

- (1) $[\hat{ }]$ 는 기초지지 요소에 대한 물리량을 나타낸다.
- (2) $[-]$ 가 붙은 기호는 절점 좌측의 물리량, 붙어 있지 않은 기호는 절점 우측의 물리량을 나타낸다.
- (3) 상첨자 $[1, 2]$ 는 1층 및 2층에 관한 물리량을 나타낸다.
- (4) 하첨자 $[j]$ 는 절점 j 또는 j 번째 부재에 관한 물리량을 나타낸다.

2.2 시간적분법

본 논문에서 적용한 시간적분법으로는 Newmark 법을 사용하였고, 임의의 시간간격 t_k 에서의 가속도 벡터 $\ddot{d}_j(t_k)$ 및 속도 벡터 $\dot{d}_j(t_k)$ 는 다음과 같다.

$$\ddot{d}_j(t_k) = \frac{1}{\beta \Delta t^2} d_j(t_k) - \frac{1}{\beta \Delta t^2} d_j(t_{k-1}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{d}_j(t_{k-1}) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{d}_j(t_{k-1})$$

$$\dot{d}_j(t_k) = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} d_j(t_k) - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} d_j(t_{k-1}) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \dot{d}_j(t_{k-1}) - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \ddot{d}_j(t_{k-1})$$

$$\begin{aligned}\ddot{d}_j(t_k) &= [\ddot{x}^1 \ \ddot{y}^1 \ \ddot{\theta}^1 \ \ddot{x}^2 \ \ddot{y}^2 \ \ddot{\theta}^2]_j^t; \\ \dot{d}_j(t_k) &= [\dot{x}^1 \ \dot{y}^1 \ \dot{\theta}^1 \ \dot{x}^2 \ \dot{y}^2 \ \dot{\theta}^2]_j^t; \\ d_j(t_k) &= [x^1 \ y^1 \ \theta^1 \ x^2 \ y^2 \ \theta^2]_j^t;\end{aligned}$$

(1)

2.3 강성계수 및 보정벡터의 전달식

임의의 시간간격 t_k 에서의 절점 j 의 변위벡터 및 힘벡터 사이의 관계는 다음식으로 정의한다.

$$\begin{aligned}\bar{f}_j(t_k) &= \bar{S}_j d_j(t_k) + \bar{e}_j(t_k) \\ f_j(t_k) &= S_j d_j(t_k) + e_j(t_k) \\ \bar{f}_j(t_k) &= [\bar{f}_x^1 \ \bar{f}_y^1 \ \bar{M}^1 \ \bar{f}_x^2 \ \bar{f}_y^2 \ \bar{M}^2]_j^t; \\ f_j(t_k) &= [f_x^1 \ f_y^1 \ M^1 \ f_x^2 \ f_y^2 \ M^2]_j^t;\end{aligned}$$

식(2)에서 \bar{S}_j , S_j 및 $\bar{e}_j(t_k)$, $e_j(t_k)$ 는 시간 스텝 t_k 에서의 강성계수 매트릭스 및 힘 보정벡터를 나타낸다.

절점 j 에서의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}M_j \ddot{d}_j(t_k) + C_j \dot{d}_j(t_k) + K_j d_j(t_k) + \bar{f}_j(t_k) - f_j(t_k) &= q_j(t_k)\end{aligned}$$

(3)

여기서

$$\begin{aligned}M_j &= \text{diag}[m^1 \ m^1 \ J^1 \ m^2 \ m^2 \ J^2]_j; \\ K_j &= \text{diag}[k_x^1 \ k_y^1 \ K^1 \ k_x^2 \ k_y^2 \ K^2]_j; \\ C_j &= \text{diag}[c_x^1 \ c_y^1 \ C^1 \ c_x^2 \ c_y^2 \ C^2]_j; \\ q_j(t_k) &= [q_x^1 \ q_y^1 \ Q^1 \ q_x^2 \ q_y^2 \ Q^2]_j^t;\end{aligned}$$

(4)

식(1)과 식(3)으로부터,

$$P_j d_j(t_k) = Q_j(t_k) + f_j(t_k) - \bar{f}_j(t_k) \quad (5)$$

여기서

$$P_j = \frac{1}{\beta \Delta t^2} M_j + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C_j + K_j \quad (6)$$

$$Q_j(t_k) = q_j(t_k) - M_j Ha_j(t_k) - C_j Hv_j(t_k)$$

식(6)에서 $Ha_j(t_k)$ 및 $Hv_j(t_k)$ 는 시간간격 t_{k-1} 에서의 변위, 속도, 가속도로 결정되는 벡터이고, 시간간격 t_k 에서는 이미 알고있는 양이다.

$$\begin{aligned}Ha_j(t_k) &= -\frac{1}{\beta \Delta t^2} \cdot \{ d_j(t_{k-1}) \\ &\quad + \Delta t \dot{d}_j(t_{k-1}) + (\frac{1}{2} - \beta) \Delta t^2 \ddot{d}_j(t_{k-1}) \}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}Hv_j(t_k) &= \dot{d}_j(t_{k-1}) + \Delta t \cdot \{ (1 - \gamma) \ddot{d}_j(t_{k-1}) \\ &\quad + \gamma Ha_j(t_k) \}\end{aligned}$$

절점 $j-1$ 의 좌측에서 절점 j 까지의 힘과 변위의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_j(t_k) \\ f_{j-1}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} d_j(t_k) \\ d_{j-1}(t_k) \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서

$$A_j = \text{diag}[A^1 \ A^2]_j, \quad B_j = \text{diag}[B^1 \ B^2]_j;$$

$$C_j = \text{diag}[C^1 \ C^2]_j, \quad D_j = \text{diag}[D^1 \ D^2]_j;$$

$$A_j^{1,2} = F_j, \quad B_j^{1,2} = -F_j L_j^t;$$

$$C_j^{1,2} = L_j F_j, \quad D_j^{1,2} = -L_j F_j L_j^t;$$

$$L_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{bmatrix}_j \quad (9)$$

$$F_j = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{xGA} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix}_j^{-1}$$

식(9)에서 x 는 단면형상계수를 나타낸다.

식(2)와 식(8)의 관계로부터 절점 $j-1$ 의 우측에서 절점 j 의 좌측으로 강성계수 및 보정벡터를 전달하는 필드 전달식을 구한다.

$$\begin{aligned} \bar{S}_j &= A_j + B_j V_j \\ \bar{e}_j(t_k) &= -B_j G_j^{-1} e_{j-1}(t_k) \\ (j &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned} G_j &= S_{j-1} - D_j \\ V_j &= G_j^{-1} C_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (11)$$

절점 j 의 좌측에서 절점 j 의 우측으로 강성계수 및 보정벡터를 전달하는 포인트 전달식을 구하기 위해 식(2)와 식(5)의 관계로부터

$$\begin{aligned} S_j &= \bar{S}_j + P_j \\ e_j(t_k) &= \bar{e}_j(t_k) - Q_j(t_k) \\ (j &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$P_j = \begin{bmatrix} P^1 + A^{mid} & B^{mid} \\ C^{mid} & P^2 + D^{mid} \end{bmatrix}_j \quad (13)$$

식(13)에서 A^{mid} , B^{mid} , C^{mid} , D^{mid} 는 주부재 좌표로 변환된 중간부재의 정적 강성매트릭스를 나타낸다.

계산량을 줄이기 위하여 필드 전달식과 포인트 전달식을 통합하면, 필드·포인트 전달식은 식(10)과 식(12)의 관계에 의해

$$\begin{aligned} S_j &= A_j + B_j V_j + P_j \\ e_j(t_k) &= -B_j G_j^{-1} e_{j-1}(t_k) - Q_j(t_k) \\ (j &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (14)$$

강성계수 매트릭스 및 보정 벡터의 식은 점화식의 형태로 정리되어 있기 때문에, 계산을 시작하는 절점 0에서의 S_0 와 $e_0(t_k)$ 를 구해야 한다.

Fig. 1에서와 같이 계의 좌단의 경계조건 ($\bar{f}_0 = 0$)과 식(2)와 식(5)의 관계로부터

$$\begin{aligned} S_0 &= P_0 \\ e_0(t_k) &= -Q_0(t_k) \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)을 시작으로 식(14)과 식(15)를 이용하여 계의 좌단에서 우단까지의 강성계수와 보정벡터를 연속적으로 계산할 수 있다.

2.4 상태량 벡터의 전달

계의 우단의 경계조건($f_n(t_k) = 0$)과 식(2)로부터 우단의 상태벡터는 다음과 같다.

$$d_n(t_k) = -S_n^{-1} e_n(t_k) \quad (16)$$

식(16)으로부터 구한 $d_n(t_k)$ 과 식(2), 식(5), 식(8)로부터

$$\begin{aligned} d_{j-1}(t_k) &= V_j d_j(t_k) - G_j^{-1} e_{j-1}(t_k) \\ (j &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (17)$$

식(16)에서 계의 우단의 상태벡터를 계산한 후 식(17)을 이용하여 계의 우단에서 좌단으로 모든 절점의 상태벡터를 연속적으로 계산할 수 있다.

3. 수치계산 결과

Fig. 4는 수치계산 모델을 나타낸다. 1층과 2층 및 중간부재의 외경이 0.05 m, 길이가 1 m인 4개의 격자로 이루어진 연강재질의 구조물(밀도=7860 kg/m³, 종탄성계수=2.06×10¹¹ N/m²)로서 1층 부재의 양단은 전단과 회전의 스프링($k_x = k_y = 10^{12}$ [N/m], $K = 10^{12}$ [Nm/rad])과 감쇠기($c_x = c_y = 1$ [Ns/m], $C = 1$ [Nms/rad])에 의해 기초로부터 지

지되고 있다. 강제력은 우단으로부터 1 m인 지점에 조화강제력이 작용하도록 모델링하였다.

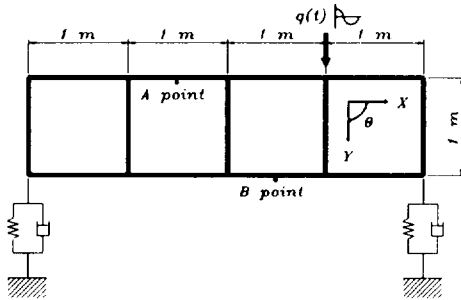
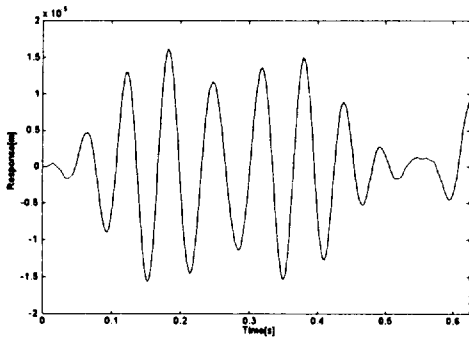
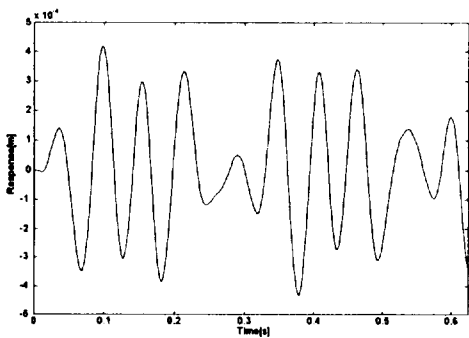


Fig. 4 Numerical model

그림에서 A점은 2층부재의 두 번째 요소의 중앙점이고, B점은 1층부재의 세 번째요소의 중앙점을 의미한다.



(a) X-direction



(b) Y-direction

Fig. 5 Time response of A point

Fig. 5는 Y축 방향의 강제력 $q_y(t) = q \cos \omega t$ ($q = 100 \text{ N}$, $\omega/2\pi = 15[\text{Hz}]$)이 작용하고 있을 경우, Fig. 4의 A점에서의 X축과 Y축의 시간응답을 구한 그림을 나타낸다. 이 경우, 시간분할수(NDT; number of division time)는 외력의 1주기를 32 등분할해서 계산을 하였다. 이후 모든계산에서 동일한 시간분할수를 사용하였다.

그림에서 알 수 있듯이 맥놀이(Beating)현상이 나타나는데, 이 결과는 강제력의 진동수가 고유진동수 부근이라는 것을 의미한다.

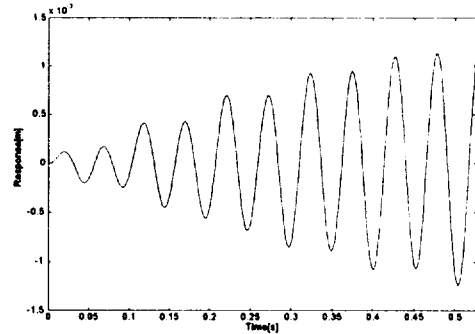


Fig. 6 Time response of B point(Y-dir.)

Fig. 6은 강제력의 진동수를 19 Hz 가진했을 경우에 대한 B점의 Y축의 응답을 나타낸다. 이 경우는 계의 응답이 시간에 따라 계속 증가하는 공진 현상을 나타내고 있다.

4. 결론

본 연구는 직선형 구조물의 동적응답 해석알고리즘을 확장하여, 페루프 구조물인 평면격자형 구조물에 적용을 시켰다.

이 기법은 진동해석기법으로는 전달강성계수법의 개념을 이용하였고, 시간적분법은 Newmark 법을 도입하여 각 시간간격마다의 동적응답을 구하는 알고리즘이다. 해석알고리즘을 정식화 한 후, 간단한 평면격자형 구조물을 수치계산을 한 결과, 수치적 안정성을 가진 원할한 계산을 수행할 수 있었다.

참고문헌

1. 浪田方郎, 川畑淳一, 市橋一郎, 福田俊彦, “彈塑性ダンパ支持配管系の耐震設計手法の開発”, 日本機械學會論文集(C編), 61卷, 590号, pp. 3881~3888, 1995
2. H. Yamakawa, T. Ohinishi, “Dynamic Response Analysis of Structure with Large Degrees of Freedom by Step-by-step Transfer Matrix Method”, Bull. of JSME, Vol. 26, No. 211, pp. 109~116, 1983
3. 문덕홍외 3인, “강성계수의 전달에 의한 격자형 구조물의 자유진동 해석”, 한국소음진동공학회춘계학술대회 논문집, pp. 169~175, 1997
4. 문덕홍외 2인, “전달강성계수법에 의한 분기형 구조물의 시간이력응답해석”, 한국소음진동공학회춘계학술대회논문집, pp. 426~431, 1998
5. 문덕홍외 2인, “전달강성계수법에 의한 직선형구조물의 시간 이력응답 해석알고리즘에 관한 연구”, 한국동력기계공학회지, Vol. 3, No. 1, pp. 74~79, 1999