한국소음진동공학회 2000년도 추계학술대회논문집, pp. 540~545.

복합재 티모센코 보의 엄밀한 동적 요소 유도 및 검증

°강병식*, 홍성욱**, 박중윤**

Derivation and verification of the exact dynamic element for composite Timoshenko beam

Kang, B.S.*, Hong, S.W.** and Park, J.Y.**

Keywords: Composite Timoshenko beam (복합재 티모센코 보), Exact dynamic element (엄밀한 동적 요소), Bending-torsion coupled vibration (굽힘-비틀림 연성 진동)

ABSTRACT

This paper presents the exact dynamic element for composite Timoshenko beam, which is inherently subject both to bending and torsional vibration. The coupling effect between bending and torsional vibrations is rigorouly considered in the derivation of the exact dynamic element. Two examples are provided to validate and illustrate the proposed exact dynamic element matrix for composite Timoshenko beam.

1. 서 론

오늘날 복합재는 상대적으로 가벼운 무게에 비해 높은 강성과 우수한 물리적인 특성을 가지므로 항공산업과 우주 항공산업 등에 많이 이용되고 있으며 그 응용이 점차 확대되고 있다. 복합재에 대한 응용이 다양해지면서 복합재가 활용되는 구조에 대한 동적 해석의 중요성이 증대되었고 많은 연구가 있어 왔다[1-9]. Abarcar와 Cunniff[1]가 전달행렬법에 기초한 이산모델을 사용하여 전단변형과 회전관성을 모두 포함하는 외팔보의 자유진동해석을 위한 계산적인 방법을 개발하여 적용한 후 보다 실제적인 복합재 구조물에 대한 모델링으로 발전되어 굽힘과 비틀림, 굽힘-비틀림 연성 특성 등에 대해 많은 저자들에 의해 연구되어져 왔다[2-9]. 특히, Teoh와 Huang[2-3]은 전단변형과 회전관성의 효과를 고려한 복합재 티모센코 보에 대해 굽힘 비틀림 연성을 포함하여 모델링함으로서 가장 엄밀한 해석을 수행한 바 있다. 그러나 대부분의 연구가 이산화된 모델에 근거한 근사해법으로서 엄밀한 해를 제공하는 해법에 대한 연구는 거의 없는 실정이다. 그렇지만 최근 Banerjee와 Williams는 기호에 대한 해석적 연산 도구를 이용한 균일 복합재 티모센코 보의 굽힘-비틀림에 대한 동강성 행렬을 이용하여 복합 보를 모델하는 방법을 제안 한 바 있다[8]. 그러나 모델링 과정에서 기호계산에 의존함으로 인해 실용적인 적용에 다소의 문제점이 있다. 한편 보나 보로 이루어진 프레임 등의 구조물에 대해 최근 그 엄밀 해를 구할 수 있도록 엄밀한 동적 요소를 유도하고 활용하는 연구가 활발히 진행되고 있다[9]. 그러나 복합재 티모센코 보 구조물은 전단변형과 회전관성의 효과를 포함하면서 또한 굽힘과 비틀림 변형

* 금오공과대학교 대학원
** 금오공과대학교 기계공학부

사이에서 재료적인 연성이 발생하므로 엄밀한 동적 요소를 유도하기 위해 매우 복잡한 과정을 필요로 한다.

본 연구에서는 기존의 단순 보에 대해 적용하였던 엄밀한 동적 요소 유도 과정을 굽힘과 비틀림의 연성 진동이 있는 복합재 티모센코 보에 적용하여 엄밀한 동적 요소를 유도하고 그 타당성을 검증함으로서 일반적인 복합재 티모센코 보 구조물에 대한 엄밀 해를 구하는 방법을 제안하였다. 두가지 수치 예제를 통하여 유도된 복합재 티모센코 보의 엄밀한 동적 요소를 검증하였다.

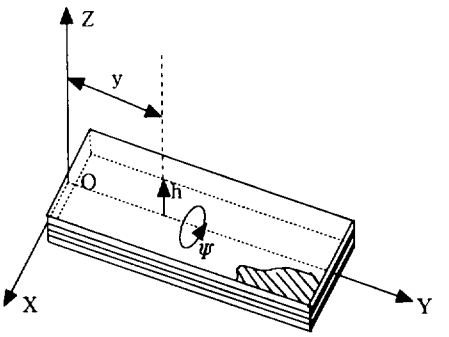

Fig. 1 Bending-torsion coupled vibration mode for composite Timoshenko beam.

2. 복합재 티모센코보의 모델링

2.1 운동방정식

Fig. 1과 같은 복합재 티모센코(Timoshenko)보의 운동 방정식은 전단변형과 회전관성의 효과, 그리고 굽힘과 비틀림 변형 사이의 재료적 연성(K)을 포함하면 다음과 같은 식으로 표현된다.[2]

$$EI\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+kAG(\frac{\partial h}{\partial y}-\theta)+K\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\rho I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \quad (1\text{-}1)$$

$$kAG(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}-\frac{\partial\theta}{\partial y})=m\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad (1\text{-}2)$$

$$GJ\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+K\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=I_a\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad (1\text{-}3)$$

여기서, ρ는 재료의 밀도, EI는 굽힘 강성, GJ는 비틀림 강성, K는 굽힘-비틀림 연성강성, kAG는 복합재의 전단강성, I 는 x축에 대한 보 횡단면의 2차 모멘트, m 은 단위 길이당 질량, I_a 는 y축에 대한 단위 길이당 극관성 모멘트, h, ϕ, ψ 는 각각 보의 횡 변위, 회전 변위 및 비틀림 변위이다. 운동 방정식을 공간좌표에 관한 상태공간 형식으로 다시 쓰면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial y}=\theta-\frac{F}{kAG} \quad (2\text{-}1)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{GJ\cdot EI-K^2}(\frac{GJ\cdot M}{EI}-K\cdot T) \quad (2\text{-}2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{1}{GJ\cdot EI-K^2}(-K\cdot M+EI\cdot T) \quad (2\text{-}3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-m\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad (2\text{-}4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=F+\rho I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \quad (2\text{-}5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=I_a\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad (2\text{-}6)$$

여기서, F, M, T는 각각 전단력, 굽힘 모멘트, 비틀림 모멘트를 나타낸다. 위 식을 시간에 대해 라플라스 변환하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\frac{\partial\Psi^*(y,s)}{\partial y}=B(s)\Psi^*(y,s) \quad (3)$$

여기서,

$$\Psi^*(y,s)=[\ h^*\quad\theta^*\quad\phi^*\quad F^*\quad M^*\quad T^*\ ]^T$$

$$B(s)=\begin{bmatrix}0&1&0&-a&0&0\\0&0&0&0&b&-c\\0&0&0&0&-d&e\\-f&0&0&0&0&0\\0&g&0&1&0&0\\0&0&h&0&0&0\end{bmatrix}$$

여기서

$$a=\frac{1}{kAG},\ b=qGJ,\ c=qK,\ d=qK,\ e=qEI,$$
$$f=ms^2,\ g=\rho Is^2,\ h=I_a s^2,\ q=\frac{1}{GJ\cdot EI-K^2}$$

로 정의되며, s는 시간에 관한 라플라스 변수, 상첨자 $*$는 해당 변수의 라플라스 변환 결과식이다. 식 (3)을 다시 공간 좌표 y에 대하여 라플라스 변

환하면 다음 식과 같다.

$$\tilde{\Psi}(\lambda, s) = [\lambda I - B]^{-1} \Psi(0, s) \tag{4}$$

여기서, λ는 공간 좌표에 관한 라플라스 변수이며, ($\tilde{}$)는 공간 좌표에 대한 라플라스 변환 결과를 의미한다.

한편 $[\lambda I - B]$의 행렬식(Determinant)을 정의하고 계수 비교하여 다음과 같이 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$의 값을 구할 수 있다.

$$det[\lambda I - B] = (\lambda^2 - \alpha^2)(\lambda^2 - \beta^2)(\lambda^2 - \gamma^2)$$

즉,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = bf + eh + bg$$

$$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = abfg + aefh + bf + begh - cdgh$$

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = abefgh + befh - acdfgh - cdfh$$

식 (4)를 공간 좌표에 대해 라플라스 역변환하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\Psi^*(x, s) = C(x, s)\, \Psi^*(0, s) \tag{5}$$

식 (5)에 Fig. 2와 같이 경계값을 부가하고 변수를 재배치하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\begin{bmatrix} F_1^* \\ M_1^* \\ T_1^* \\ F(\xi)^* \\ M(\xi)^* \\ T(\xi)^* \end{bmatrix} = D(s, \xi) \begin{bmatrix} h_1^* \\ \theta_1^* \\ \psi_1^* \\ h(\xi)^* \\ \theta(\xi)^* \\ \psi(\xi)^* \end{bmatrix} \tag{6}$$

식(6)에 엄밀한 동적 요소 행렬 $D(s, \xi)$는 부록에 첨부하였다. 식 (6)을 길이 l인 균일 보 요소에 대해 적용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} F_1^* \\ M_1^* \\ T_1^* \\ F_2^* \\ M_2^* \\ T_2^* \end{bmatrix} = D(s, l) \begin{bmatrix} h_1^* \\ \theta_1^* \\ \psi_1^* \\ h_2^* \\ \theta_2^* \\ \psi_2^* \end{bmatrix} \tag{7}$$

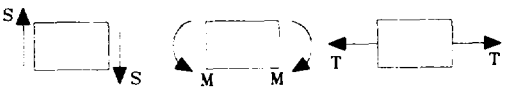

Fig. 2 Sign conventions for shear force (S), bending moment(M), and torque(T)

식(7)을 이용하면 일반적인 형상의 복합재 보를 요소로 구분한 후 이를 조합함으로서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$F^*(s) = D(s)\, q^*(s) \tag{8}$$

여기서, q^*는 전역 변위 좌표 벡터의 라플라스 변환이며 F^*는 이 좌표에 대응되는 힘벡터의 라플라스 변환이다. 식(8)은 주어진 시스템에 대한 라플라스 영역에서의 운동방정식을 나타내게 되며 $D(s)$는 시스템 동특성 행렬을 의미하게 된다.

3. 수치예제

3.1 예제 1 : 균일한 복합재 티모센코 보

본 예제에서는 유도된 엄밀한 동적 요소의 검증을 위하여 참고문헌[8]에서 취급되었던 균일한 복합재 티모센코 보를 고려한다. Fig 1에서와 같이 모든 섬유각이 15° 를 갖고, 횡단면이 직사각형인 평평한 유리섬유 복합재 보이다. Table 1에서 보의 물성치를 요약하였다. Table 2에서 제안된 방법의 검증을 위해 참고문헌[8]에서 제공된 고유진동수와 비교하였다.

Table 1 Specifications of numerical model 1

Property	Data
length, m	0.1905
width, m	0.0127
thickness, m	0.00318
EI, Nm²	0.2865
GJ, Nm²	0.1891
K, Nm²	0.1143
m, kg/m	0.0544
I_α, kgm	0.7770×10^-6
kAG, N	6343.3

Table 2 Comparison of natural frequencies from reference [8] and the proposed method.

Natural Frequencies (Hz)		
Mode	Reference[8]	Proposed method
1	30.75	30.75
2	189.8	189.8
3	518.8	518.8
4	648.3	648.3
5	986.1	986.2

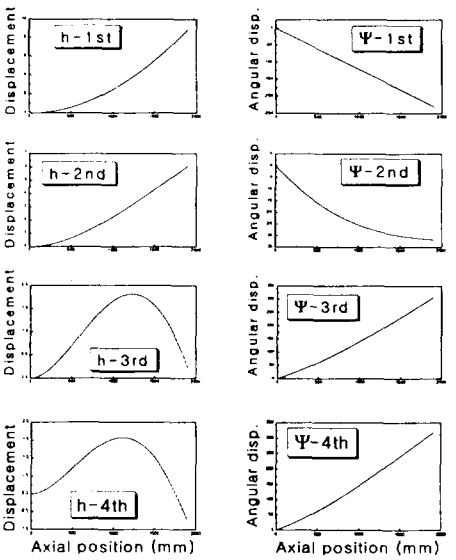

Fig. 3 Mode shapes of numerical model 1

결과에서 볼 수 있는 바와 같이 두 방법이 동일한 결과를 주고 있으므로 제안한 방법에 의해 얻어진 엄밀한 동적 요소 행렬이 올바르게 얻어졌음을 알 수 있다.

3.2 예제 2 : 일반적인 복합재 티모센코 보

본 예제에서는 일반적인 형상의 복합재 티모센코보의 엄밀한 해석을 위해 두께가 다른 세 개의 보를 연결하였다. Fig. 4는 본 예제에서 고려한 복합재 보를 보여주고 있다. 3단으로 이루어져 있으므로 3개의 요소를 결합해서 모델링을 하여야 한다. 한편 모델에 대한 세부 사양은 Table 3에 정리되어 있다. 식 (7)에서 표현된 동특성 행렬은 초월함수로 표현되므로 기존의 고유치 해법을 활

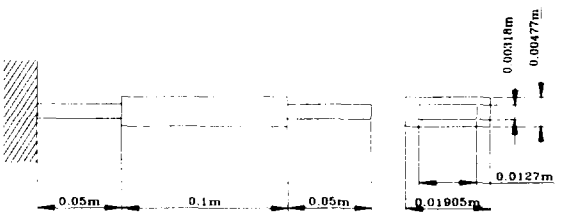

Fig. 4 Numerical model 2: three step composite Timoshenko beam

용할 수가 없어서 고유치를 결정하기 위해 일반적인 방정식 해법을 사용할 필요가 있으며, 초기치 결정을 위해 주파수 응답 해석이 선행되어야 한다. 주파수 응답행렬은 식 (8)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H(s)=D^{-1}(s) \tag{9}$$

위 (9)식을 이용하여 s 영역에서의 전달 함수를 구할 수 있고, 주파수 응답 행렬은 전달 함수 행렬에 $s=j\omega$를 대입하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H(j\omega)=D^{-1}(j\omega) \tag{10}$$

위의 식 (10)은 동특성 행렬에 $s=j\omega$를 대입하여 얻어지는 동강성 행렬에 대해 주파수를 변경시키면서 역행렬을 반복적으로 계산하는 직접 계산법을 활용하였는데, 유한요소법에 비교해서 행렬의 크기가 적어지게 되므로 계산 소요시간을 줄일 수 있는 이점이 있다.

식 (8)로부터 주어진 시스템에 대한 고유치 문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$D(s)q^{*}(s)=0 \tag{11}$$

고유치는 $D(s)$에 대한 행렬식이 0이 된다는 조건식으로부터 고유치를 구할수 있으며, 계산된 고유치를 위의 식 (11)에 대입하여 고유벡터를 구할 수 있고, 또한 모드형상을 구할 수 있다. 그런데 식 (11)이 s에 대한 초월함수를 포함하고 있으므로, 참고문헌[9]에서 사용하였던 수정된 축차이분법(Successive bisection method)을 복소근 문제로 일반화시켜 적용하였다.

Table 3 Specifications of numerical model 2

Property	Data	
	#1, #3	#2
length, m	0.05	0.1
width, m	0.0127	0.01905
thickness, m	0.00318	0.00477
EI, Nm'	0.2865	1.4504
GJ, Nm'	0.1891	0.9573
K, Nm'	0.1143	0.5786
m, kg/m	0.0544	0.1224
I_α, kg/m	0.7770×10^-6	3.9336×10^-6
kAG, N	6343.3	14273.6

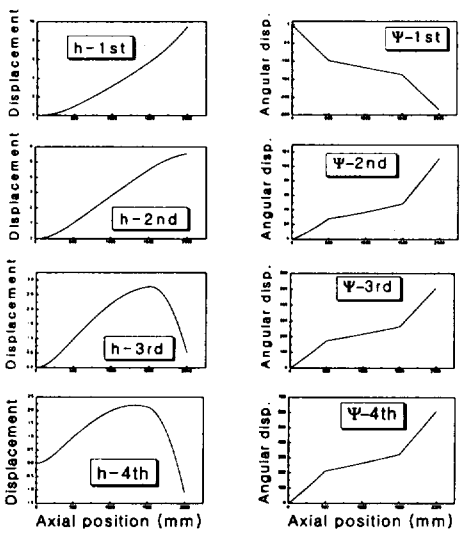

Fig. 5 Mode shapes of numerical model 2

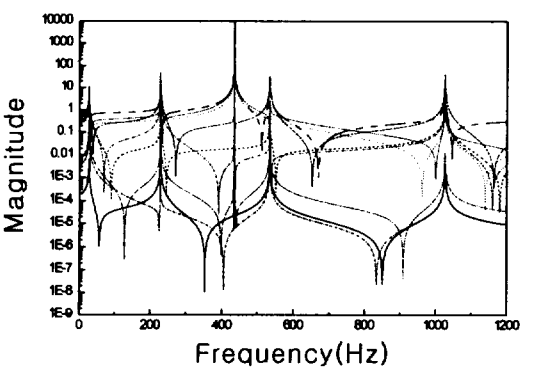

Fig. 6 Frequency response function of numerical model 2

4. 결 론

본 연구에서는 복합재 티모센코 보의 굽힘 비틀림 연성 진동에 관한 엄밀해를 구하는 방법을 제시하였다. 이를 위해 복합재 티모센코 보의 엄밀한 동적 요소를 유도하였으며 기존의 문헌 결과와의 비교를 통해 그 타당성을 검증하였다. 또한 다단 복합재 보에 제안된 방법을 적용하여 방법의 유용성을 입증하였다. 본 연구의 결과는 굽힘 비틀림 연성 진동이 발생하는 복잡한 계에 대해 엄밀한 해를 얻을 수 있도록 했다는 점뿐만 아니라 엄밀한 동적 요소가 갖는 특성을 이용하여 보다 복잡한 복합재 보에 대한 설계 등에도 폭넓게 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참고 문헌

(1) R. B. Abarcar and P. F. Cunnif 1972 Journal of Composite Materials 6, 504-517. The vibration of cantilever beams of fiber reinforced material.

(2) L. S. Teoh and C. C. Huang 1977 Journal of Sound and Vibration 51, 467-473. The vibration of beams of fibre reinforced material.

(3) K. K. Teoh and C. C. Huang 1979 Journal of Sound and Vibration 62, 195-206. The vibration of generally orthotropic beams, a finite element approach.

(4) J. K. Suresh, C. Venkatesan and V. Ramamurti 1990 Journal of Sound and Vibration 143, 503-519. Structural dynamic analysis of composite beams.

(5) K. Chandrashekhara, K. Krishanamurthy and S. Roy 1989 Composite Structures 14, 269-279. Free vibration of composite beams including rotatory inertia and shear deformation.

(6) D. H. Hodges, A. R. Atilgan, M. V. Fulton and L. W. Rehfield 1991 Journal of the American Helicopter Society 36, 36-47. Free vibration analysis of composite beams.

(7) H. Abramovich 1992 Composite Structures 20, 165-173. Shear deformation and rotatory

inertia effects of vibrating composite beams.

(8) J. R. Banerjee and F. W. Williams 1996 Journal of Sound and Vibration 194, 573-585. Exact dynamics stiffness matrix for composite Timoshenko beams with applications.

(9) S.-W. Hong and J.-W. Kim 1999 Journal of Sound and vibration 227, 787-806. Modal analysis of multi-span Timoshenko beams connected or supported by resilient joints with damping.

부 록: 엄밀한 동적 요소 행렬: D_{ij}

$$
\begin{aligned}
D_{11} &= q_5-(bg+eh)*q_3+(begh-cdgh)*q_1\\
D_{12} &= q_4-eh*q_2\\
D_{13} &= -ch*q_2\\
D_{14} &= -a*q_4+(abg+aeh+b)*q_2+(acdgh-abegh\\
&\quad +cdh-beh)*q_0\\
D_{15} &= b*q_3+(cdh-beh)*q_1\\
D_{16} &= -c*q_1\\
D_{21} &= -bf*q_2+(befh-cdfh)*q_0\\
D_{22} &= q_5-(af+eh)*q_3+aefh*q_1\\
D_{23} &= -ch*q_3+acfh*q_1\\
D_{24} &= b*q_3+(cdh-beh)*q_1\\
D_{25} &= b*q_4+(cdh-abf-beh)*q_2+(abefh-acdfh)*\\
&\quad q_0\\
D_{26} &= -c*q_4+acf*q_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{31} &= df*q_2\\
D_{32} &= -dg*q_3+(adfg+df)*q_1\\
D_{33} &= q_5-(af+bg)*q_3+(abfg+bf)*q_1\\
D_{34} &= -d*q_3\\
D_{35} &= -d*q_4+adf*q_2\\
D_{36} &= e*q_4+(cdg-aef-beg)*q_2+(abefg-acdfg+\\
&\quad bef-cdf)*q_0\\
D_{41} &= -f*q_4+(bfg+efh)*q_2+(cdfgh-befgh)*q_0\\
D_{42} &= -f*q_3+efh*q_1\\
D_{43} &= cfh*q_1\\
D_{44} &= q_5-(bg+eh)*q_3+(begh-cdeh)*q_1\\
D_{45} &= -bf*q_2+(befh-cdfh)*q_0\\
D_{46} &= cf*q_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{51} &= -f*q_3+efh*q_1\\
D_{52} &= g*q_4-(afg+f+egh)*q_2+(efh+aefgh)*q_0\\
D_{53} &= -cgh*q_2+(acfgh+cfh)*q_0\\
D_{54} &= q_4-eh*q_2\\
D_{55} &= q_5-(af+eh)*q_3+aefh*q_1\\
D_{56} &= -cg*q_3+(acfg+cf)*q_1\\
D_{61} &= dfh*q_1\\
D_{62} &= -dgh*q_2+(adfgh+dfh)*q_2\\
D_{63} &= h*q_4-(afh+bgh)*q_2+(abfgh+bfh)*q_0\\
D_{64} &= -dh*q_2\\
D_{65} &= -dh*q_3+adfh*q_1\\
D_{66} &= q_5-(af+bg)*q_3+(abfg+bf)*q_1
\end{aligned}
$$

여기서 $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)(\gamma^2-\alpha^2)}\times\\
&\quad \left\{-\frac{1}{\alpha}(\beta^2-\gamma^2)\sinh\alpha\xi-\frac{1}{\beta}(\gamma^2-\alpha^2)\sinh\beta\xi\right.\\
&\quad \left.-\frac{1}{\gamma}(\alpha^2-\beta^2)\sinh\gamma\xi\right\}\\
q_1 &= \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)(\gamma^2-\alpha^2)}\times\\
&\quad \{-(\beta^2-\gamma^2)\cosh\alpha\xi-(\gamma^2-\alpha^2)\cosh\beta\xi\\
&\quad -(\alpha^2-\beta^2)\cosh\gamma\xi\}\\
q_2 &= \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)(\gamma^2-\alpha^2)}\times\\
&\quad \{-\alpha(\beta^2-\gamma^2)\sinh\alpha\xi-\beta(\gamma^2-\alpha^2)\sinh\beta\xi\\
&\quad -\gamma(\alpha^2-\beta^2)\sinh\gamma\xi\}\\
q_3 &= \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)(\gamma^2-\alpha^2)}\times\\
&\quad \{-\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)\cosh\alpha\xi-\beta^2(\gamma^2-\alpha^2)\cosh\beta\xi\\
&\quad -\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)\cosh\gamma\xi\}\\
q_4 &= \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)(\gamma^2-\alpha^2)}\times\\
&\quad \{-\alpha^3(\beta^2-\gamma^2)\sinh\alpha\xi-\beta^3(\gamma^2-\alpha^2)\sinh\beta\xi\\
&\quad -\gamma^3(\alpha^2-\beta^2)\sinh\gamma\xi\}\\
q_5 &= \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)(\gamma^2-\alpha^2)}\times\\
&\quad \{-\alpha^4(\beta^2-\gamma^2)\cosh\alpha\xi-\beta^4(\gamma^2-\alpha^2)\cosh\beta\xi\\
&\quad -\gamma^4(\alpha^2-\beta^2)\cosh\gamma\xi\}
\end{aligned}
$$