

# 주기적으로 울통불통한 실린더에서 전파하는 비틀림 탄성파

김진오 (승실대학교 기계공학과)

## Torsional Elastic Waves Propagating in a Cylinder with a Periodically Corrugated Outer Surface

Jin Oh Kim (Soongsil University)

E-mail : jokim@saint.soongsil.ac.kr

### ABSTRACT

The paper describes a theoretical study on the speed of the torsional elastic waves propagating in a circular cylinder whose outer radius varies periodically as a harmonic function of the axial coordinate. The approximate solution for the phase speed has been obtained using the perturbation technique for sinusoidal modulation of small amplitude. It is shown that the wave speed in the cylinder with a corrugated outer surface is less than that in a smooth cylinder by the square of the amplitude of the surface perturbation. This theoretical prediction agrees reasonably with an experimental observation reported earlier. It is also shown that the wave speed reduction due to the surface corrugation becomes larger for a thinner cylinder and for a bigger density of corrugation.

### I. 서론

길이방향으로 조화함수 형태로 변화하는 반경을 가진 원형단면의 탄성막대에서 전파하는 비틀림 탄성파의 전파속도에 대한 이론적 및 실험적 결과가 제시된 바 있다[1]. 그 연구는 유체에 접해 있는 고체에서 전단운동을 하며 전파하는 탄성파의 전파특성에 미치는 인접 점성유체의 영향을 규명한 결과[2]로부터, 단면이 원형인 탄성막대에서 전파하는 비틀림 탄성파가 유체 점성 측정 센서로 활용될 가능성[3]에서 동기부여가 되었다. 도파관의 단위길이당 표면적이 클수록 유체점성의 영향이 커지고 결과적으로 센서의 감도가 향상되므로, 원형막대의 표면에 톱니처럼 나사면을 형성하였고, 이 경우의 비틀림 탄성파의 전파특성을 규명한 것이었다.

센서의 감도를 향상시키는 다른 방법은 막대 대신 속이 빈 실린더를 사용하는 것이다. 따라서 표면이 울통불통한 실린더를 센서로 사용하면 감도가 더욱 향상된다. 이 경우에는 매끈한 실린더의 경우와 달리 비틀림 탄성파의 전파특성이 이론적으로 규명되어 있지 않았다. 본 논문은 Fig. 1에 보인 바와 같이 길이방향으로 조화함수 형태로 변화하는 외경을 가진 원형 단면의 실린더에서 전파하는 비틀림 탄성파의 전파속도를 대상으로 한다. 주기적인 미소한 외경변화를 섭동(perturbation) 기법에 의해 다루어 전파속도의 이론적 근사해를 구한다. 그리고 앞선 보고[1]에서 제시된 실험결과와 비교하여 본 논문의 이론적 결과를 검증한다.

### II. 문제의 정식화

Fig. 1은 비틀림 탄성파가 전파하는 실린더를 보여준다. 단면의 외경  $r_0$ 가 Fig. 1(b)에 보인 바와 같이 길이방향 좌표  $z$ 의 함수로  $R_0(z) = r_0[1 + \epsilon \sin(2\pi z/\lambda)]$ 의 관계로 변화하는 원형 단면 실린더에서 전파하는 비틀림 탄성파를 대상으로 수학적 모델을 설정한다. 반경방향 좌표  $r$ , 길이방향 좌표  $z$ , 시간  $t$ 에 종속인 원주방향 변위  $u_\theta(r, z, t)$ 로써 비틀림파의 운동방정식이 다음과 같이 표현된다.[4]

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \quad (1)$$

여기서  $c_T = (G/\rho)^{1/2}$ 이고,  $G$ 와  $\rho$ 는 각각 막대 재료의 횡탄성계수와 밀도이다. 표면에서 응력이 없다는 조건과 굴곡진 표면에서의 전단응력이  $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} \cdot dr/dz$  [5]이므로부터 경계조건이 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = 0 \quad \text{at } r = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = \frac{dr}{dz} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \quad \text{at } r = R_0 \quad (3)$$

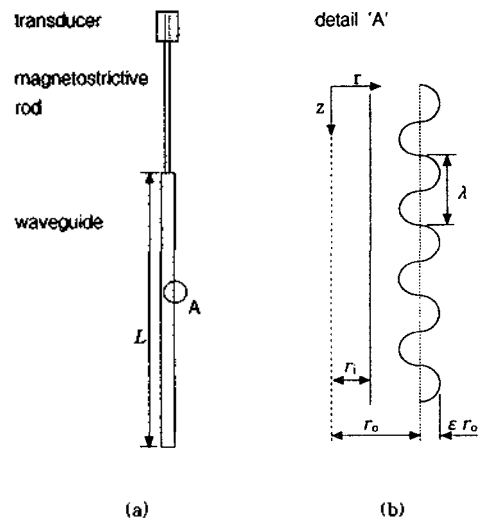


Fig.1 Schematic description of the experimental setup and the corrugated waveguide.

변위를  $u_\theta(r, z, t) = u(r, z) \exp(i\omega t)$  로 변수 분리하여 식 (1)에 대입한 후, 기준길이  $r_0$ 와 기준속도  $c_T$ 를 사용하여 식(1)-(3)을 무차원화하면 다음과 같다.

$$L(r, z)u = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \right) u = 0 \quad (1')$$

$$B(r)u = \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) u = 0 \quad \text{at } r = 0 \quad (2')$$

$$B(r)u = \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) u = \varepsilon k_w \cos k_w z \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{at } r = 1 + \varepsilon \sin k_w z \quad (3')$$

식(1')-(3')에서  $L(r, z)$ 와  $B(r)$ 은 각각 선형 미분연산자를 정의하며, 식(1')부터 모든 변수들은 무차원화된 양이다.

### III. 섭동법에 의한 근사해

식(1')-(3')으로 정의된 경계치 문제의 근사해를 구하기 위해 섭동기법[6]을 채택한다. 이를 위해 변위  $u$ 를 다음과 같이 섭동량  $\varepsilon$ 의 급수로 전개한다. (4)

$$u(r, z, \varepsilon) = u_0(r, z) + \varepsilon u_1(r, z) + \varepsilon^2 u_2(r, z) + O(\varepsilon^3)$$

식(4)를 식(1')-(3')에 대입하고  $\varepsilon$ 의 오름차순으로 정리하여,  $\varepsilon$ 의 차수별 운동방정식과 경계조건에 대해 다음과 같이 단계적으로 해를 구한다.

#### 3.1 $O(\varepsilon^0)$ 해

선도 차수  $O(\varepsilon^0)$ 에 대해서 고전적인 비틀 운동방정식,  $L(r, z)u_0 = 0$  과 경계조건  $B(r_1)u_0 = 0$  및  $B(1)u_0 = 0$  을 얻는다. 이 문제의 해는 잘 알려진 대로 다음과 같다.[4]

$$u_0 = U_0 F_n(r) \exp[i k_{n,0} z] \quad (5)$$

여기서  $i = (-1)^{1/2}$  이고,  $U_0$ 는 파동의 진폭으로서 초기 조건에 달려있는 양이다. 그리고  $k_{n,0}$ 은 다음과 같이  $\varepsilon$ 의 급수로 전개되는  $n$ 번째 모드 파수  $k_n$ 에 대한 선도 차수 항이다.

$$k_n = k_{n,0} + \varepsilon k_{n,1} + \varepsilon^2 k_{n,2} + O(\varepsilon^3) \quad (6)$$

식(5)의  $F_n$ 과  $k_{n,0}$ 은 기본 모드( $n=0$ )에 대해서

$$F_0(r) = 2(1-r_1^2)^{-1/2} r, \quad k_{0,0} = \omega \quad (7)$$

이고, 고차 모드( $n>0$ )에 대해서

$$F_n(r) = A_n \left[ \frac{I_1(q_n r)}{I_2(q_n r_1)} + \frac{K_1(q_n)}{K_2(q_n r_1)} \right],$$

$$k_{n,0} = (\omega^2 + q_n^2)^{1/2} \quad (8)$$

이다. 여기서  $I_k$ 와  $K_k$ 는 제1종과 제2종의 수정된  $k$ 차 Bessel 함수이고,  $q_n (\neq 0)$ 은 다음 식의 근이다.

$$\frac{I_2(q_n)}{I_2(q_n r_1)} - \frac{K_1(q_n r)}{K_2(q_n r_1)} = 0 \quad (9)$$

#### 3.2 $O(\varepsilon^1)$ 해

제1차수  $O(\varepsilon^1)$ 에 대한 경계치문제는  $u_1$ 에 대한 문제로서 다음과 같이 정리된다.

$$L(r, z)u_1 = 2k_{n,0}k_{n,1}U_0 F_n(r) \exp[i(k_{n,0} + \varepsilon k_{n,1})z]$$

$$B(r_1)u_1 = 0 \quad (10)(11)$$

$$B(1)u_1 = \frac{i}{2} U_0 [k_{n,0} k_w F_n(1) + F_n''(1)] \exp[i(k_{n,0} + k_w + \varepsilon k_{n,1})z]$$

$$+ \frac{i}{2} U_0 [k_{n,0} k_w F_n(1) - F_n''(1)] \exp[i(k_{n,0} - k_w + \varepsilon k_{n,1})z] \quad (12)$$

식(12)에서 (')은  $r$ 에 대한 미분을 나타낸다. 식(10)-(12)의 해를 구하기 위하여  $u_1$ 을 식(10),(12)의 우변에서 암시된 바대로 다음과 같이 세 개의 항으로 분해한다.

$$u_1(r, z) = G_a(r) \exp[i(k_{n,0} + \varepsilon k_{n,1})z] + G_b(r) \exp[i(k_{n,0} + k_w + \varepsilon k_{n,1})z] + G_c(r) \exp[i(k_{n,0} - k_w + \varepsilon k_{n,1})z] \quad (13)$$

이에 따라  $G_a, G_b, G_c$ 에 관한 경계치문제가 얻어진다.

이중  $G_a$ 에 관한 문제는 다음과 같다.

$$L_n(r)G_a = \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} + \omega^2 - k_{n,0}^2 \right) G_a = 2k_{n,0}k_{n,1}U_0 F_n(r) \quad (14a)$$

$$B(r_1)G_a = 0, \quad B(1)G_a = 0 \quad (14b,c)$$

식(14)는  $u_0$ 에 관한 경계치문제와 일치한다. 이에 해당하는 해결조건(solvability condition)[11]은 다음과 같다.

$$\langle L_n G_a(r), F_n(r) \rangle = B(1)G_a \cdot F_n(1) - B(r_1)G_a \cdot F_n(r_1) \quad (15)$$

$$\text{즉 } 2k_{n,0}k_{n,1}U_0 \langle F_n(r), F_n(r) \rangle = 0 \quad (16)$$

여기서  $\langle F_n, F_n \rangle \neq 0$  이므로,  $k_{n,1} = 0$  임을 알게 된다. 따라서 파수  $k_n$ 에 대한 섭동량을 구하기 위해서는 제2차수  $O(\varepsilon^2)$ 으로 진전해야 한다.

그에 앞서,  $u_1$ 에 관한 해를 구하기 위하여  $G_a, G_b, G_c$ 에 관한 해를 각각 구하면 다음과 같다.

$$G_a = U_1 F_n(r) \quad (17a)$$

$$G_b(r) = i\xi_{b,n} U_0 \left[ \frac{I_1(a_{b,n} r)}{I_2(a_{b,n} r_1)} + \frac{K_1(a_{b,n} r)}{K_2(a_{b,n} r_1)} \right] \quad (17b)$$

$$G_c(r) = i\xi_{c,n} U_0 \left[ \frac{I_1(a_{c,n} r)}{I_2(a_{c,n} r_1)} + \frac{K_1(a_{c,n} r)}{K_2(a_{c,n} r_1)} \right] \quad (17c)$$

여기서  $U_1$ 은 미지의 상수이고,  $\alpha$ 와  $\xi$ 는  $k_{n,0}, k_w, \omega, r_1$ 으로 표현되는 상수이다.

#### 3.3 $O(\varepsilon^2)$ 해

제2차수  $O(\varepsilon^2)$ 에 대한 경계치문제는  $u_2$ 에 관한 문제로서 다음과 같이 정리된다.

$$L(r, z)u_2 = 2k_{n,0}k_{n,2}U_0 F_n(r) \exp[i(k_{n,0} + \varepsilon^2 k_{n,2})z]$$

$$B(r_1)u_2 = 0 \quad (18)(19)$$

$$B(1)u_2 = \xi_{a,n} U_0 \exp[i(k_{n,0} + \varepsilon^2 k_{n,2})z] + i\xi_{b,n} U_1 \exp[i(k_{n,0} + k_w + \varepsilon^2 k_{n,2})z] + i\xi_{c,n} U_1 \exp[i(k_{n,0} - k_w + \varepsilon^2 k_{n,2})z] + \xi_{d,n} U_0 \exp[i(k_{n,0} + 2k_w + \varepsilon^2 k_{n,2})z] + \xi_{e,n} U_0 \exp[i(k_{n,0} - 2k_w + \varepsilon^2 k_{n,2})z]$$

여기서  $\xi_{a,n} =$

$$\left\{ -\xi_{b,n} k_w (k_{n,0} + k_w) \left[ \frac{I_1(a_{b,n})}{I_2(a_{b,n} r_1)} + \frac{K_1(a_{b,n})}{K_2(a_{b,n} r_1)} \right] - \xi_{c,n} k_w (k_{n,0} - k_w) \left[ \frac{I_1(a_{c,n})}{I_2(a_{c,n} r_1)} + \frac{K_1(a_{c,n})}{K_2(a_{c,n} r_1)} \right] + \xi_{d,n} \left[ \frac{(a_{b,n}^2 + 4)I_1(a_{b,n}) - 2a_{b,n}I_0(a_{b,n})}{I_2(a_{b,n} r_1)} + \frac{(a_{b,n}^2 + 4)K_1(a_{b,n}) + 2a_{b,n}K_0(a_{b,n})}{K_2(a_{b,n} r_1)} \right] - \xi_{e,n} \left[ \frac{(a_{c,n}^2 + 4)I_1(a_{c,n}) - 2a_{c,n}I_0(a_{c,n})}{I_2(a_{c,n} r_1)} + \frac{(a_{c,n}^2 + 4)K_1(a_{c,n}) + 2a_{c,n}K_0(a_{c,n})}{K_2(a_{c,n} r_1)} \right] - \frac{1}{2} [F_n^{(3)}(1) - F_n''(1)] \right\} / 2 \quad (21)$$

#### IV. 결과 및 고찰

이고, 다른  $\epsilon$  들은 생략한다.

식(18),(20)의 형태는  $u_2$ 의 해가 다음과 같은 형태임을 암시한다.

$$u_2 = H_a(r) \exp[i(k_{n,0} + \epsilon^2 k_{n,2})z] + H_b(r) \exp[i(k_{n,0} + k_w + \epsilon^2 k_{n,2})z] + H_c(r) \exp[i(k_{n,0} - k_w + \epsilon^2 k_{n,2})z] + H_d(r) \exp[i(k_{n,0} + 2k_w + \epsilon^2 k_{n,2})z] + H_e(r) \exp[i(k_{n,0} - 2k_w + \epsilon^2 k_{n,2})z] \quad (22)$$

이에 따라  $H_a, H_b, H_c, H_d, H_e$ 에 관한 경계치문제 다섯개를 얻게된다.

이중  $H_a$ 에 관한 경계치문제는 다음과 같다.

$$L_n(r)H_a = 2k_{n,0}k_{n,2}U_0F_n(r) \quad (23a)$$

$$B(r_1)H_a = 0, \quad B(1)H_a = \zeta_{a,n}U_0 \quad (23b,c)$$

이에 대한 해결조건

$$\langle L_n(r)H_a(r), F_n(r) \rangle = B(1)H_a \cdot F_n(1) - B(r_1)H_a \cdot F_n(r_1) \quad (24)$$

로부터

$$2k_{n,0}k_{n,2} \langle F_n(r), F_n(r) \rangle = \xi_{a,n}F_n(1) \quad (25)$$

을 얻으므로 파수  $k_n$ 에 대한 보정치  $k_{n,2}$ 을 다음과 같이 얻게된다.

$$k_{n,2} = \xi_{a,n}F_n(1)/(2k_{n,0}) \quad (26)$$

함수들  $H_x(r)$  ( $x = a, b, c, d, e$ )이 위와 같은 방법으로 계산되지만 생략한다.

#### 3. 4 전파 속도

지금까지 얻은 결과로부터 비틀림 전파속도에 대한 근사해를 구성한다.  $n$ 번째 모드의 전파속도  $c_n$ 은  $\omega/k_n$ 이므로 다음 식을 얻는다.

$$c_n = \frac{\omega}{k_{n,0}} \left( 1 - \epsilon^2 \frac{k_{n,2}}{k_{n,0}} \right) + O(\epsilon^3) \quad (27)$$

식(27)을 살펴보면 실린더 표면의 주기적 굴곡으로 인해 비틀림 전파속도가 매끈한 실린더의 경우에 비해 줄어들음을 알 수 있다.

기본 모드( $n=0$ )의 경우에 식(7)로부터  $k_{0,0} = \omega$  이고  $F_0(1) = 2/(1-r_1^4)^{1/2}$ 이므로, 표면 굴곡으로 인한 전파속도 차이를 계산하기 위하여 식(27)에 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$1 - c_0 \approx \epsilon^2 \frac{1}{\sqrt{1-r_1^4}} \frac{\xi_{a,0}}{\omega^2} \quad (28)$$

식(28)에서  $\xi_{a,0}$ 는 식(21)로부터 계산되는 양으로서, 무차원 주파수  $\omega$ 와 표면굴곡 주기  $k_w$  및 내외경의 비  $r_1$ 의 함수이다.

Table 1 Speed corrections for the torsional elastic waves along the corrugated waveguides. The theoretically predicted results are compared with the experimental observations.

radius ratio, $r_1$	thread		nondim. freq. $\omega$	1-c <sub>0</sub> (%)	
	$\epsilon$	$k_w$		calculated	measured
0.68	0.087	15.8	0.269	16.8	8.5
0	0.087	15.8	0.269	13.3	10.6
0	0.087	13.6	0.269	11.6	12.8

실린더 표면의 주기적 변화로 인한 전파속도 변화를 앞절에서 유도한 식으로부터 몇 가지 경우에 대해 계산하였다. 이론적 결과의 일반적인 경향을 실험결과와 비교하였다.

#### 4.1 실험과 비교

앞서 보고된 바 있는 실험결과[1]와 비교하기 위하여,  $1-c_0$ 의 값을  $\epsilon = 0.087$ ,  $\omega = 0.269$ ,  $k_w = 15.8$ 과  $13.6$ , 그리고  $r_1 = 0.68$ 과  $0$ 에 대하여 계산하였다. 계산 결과는 Table 1에 기재되어 있다.

비틀림 탄성파를 발생시키고 수신하는 방법으로 'Wiedemann 효과'[8]라는 자왜(magnetostriction)현상에 근거한 트랜스듀서를 사용하였다. 비틀림과 송수신 원리는 자장(magnetism)과 변형(strain) 간의 상호변환 현상을 이용한 것[9]으로서 압전(piezoelectricity)현상에 대응한다. Joule 효과에 의해서는 종파를 송수신하게 되는데, 길이방향으로 영구자장을 추가함으로써 Wiedemann 효과를 갖게되어 비틀림파를 송수신하게 된다. 전기적 펄스 신호가 Fig. 1(a)에 보인 바와 같은 장치에서 자왜막대의 한쪽에 비틀림탄성파로 변환되어 전파하고, 도파관(waveguide)으로 전달되어 전파하고 되돌아와 트랜스듀서에서 다시 전기신호로 변환된다.

이와 같은 과정에서 수신된 신호를 오실로스코프에서 관찰한 예가 Fig. 2에 보여있다. 자왜막대에서 도파관으로 파동이 전달될 때, 일부는 경계면에서 반사되어 트랜스듀서로 바로 돌아간다. 이 신호는 그림에서 'A'로 표시한 부분이다. 도파관으로 전달된 파동이 도파관 끝에서 반사되어 트랜스듀서로 돌아가 변환된 신호는 'B'로 표시되어 있다. 두 신호간의 시간 간격을 측정하고 도파관의 길이와 연관시켜, 파동의 전파속도를 얻는다.

사용된 실린더 도파관은 길이  $L = 306$  mm이고 단면 평균반지름  $r_0 = 1.14$  mm인 알루미늄으로서, 재질의 물성치는 밀도  $\rho = 2.70 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>이고 횡탄성계수  $G = 2.59 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>이다. 실린더 내경  $r_i$ 는 0.78 mm로서, 내외경 비  $r_1$ 은 0.68이다. 매끈한 원형단면 실린더에서 측정된 비틀림 전파속도  $c_T$ 는 3009 m/s와 3015 m/s로서, 물성치를  $(G/\rho)^{1/2}$ 에 대입하여 얻는 수치 3097 m/s와 3% 오차범위 이내로 잘 일치한다.

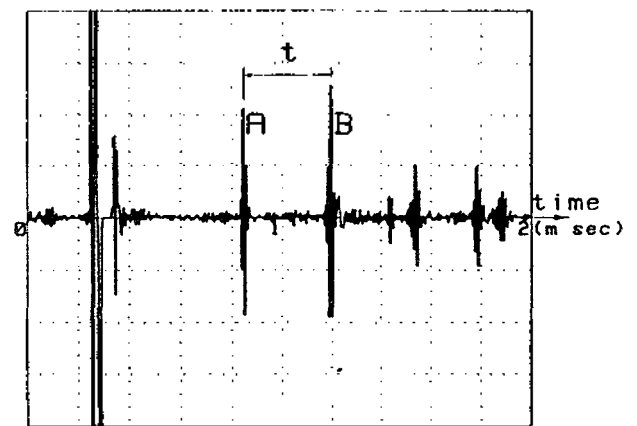


Fig.2 Signal trace of the waves reflected at the front and the end of the waveguide.

실린더 표면에 표준 나사 다이(die)를 이용하여 나사면을 형성하였다. 표준 나사는 NC-UNC 3-48과 NF-UNF 3-56으로서, 이에 대응하는  $k_w$ 값은 각각 13.6과 15.8이다. 그리고  $\epsilon$ 의 크기는 공통적으로  $0.087 \pm 0.002$ 이다. 사용한 펄스신호의 중심주파수는 90 kHz이므로, 무차원 주파수는  $\omega = 0.269$ 이다. 이때  $k_w \gg \omega$ 이다. 이와 같이 표면에 나사면이 형성된 실린더 도파관에서 비틀과 전파속도를 측정된 결과를 Table 1에 기재하였다.

표면에 주기적 굴곡을 가진 실린더에서의 비틀과 전파속도는 매끈한 실린더에서의 전파속도에 비해 느린 것으로 나타났다. 이는 이론적 결과와 같은 경향이다. 다만 전파속도 차이는 이론적 결과와 실험 결과가 잘 일치하지는 않는데, 이는 실험에 사용된 실린더의 나사면이 이론적 모델과 다소 차이가 있기 때문으로 추정된다.

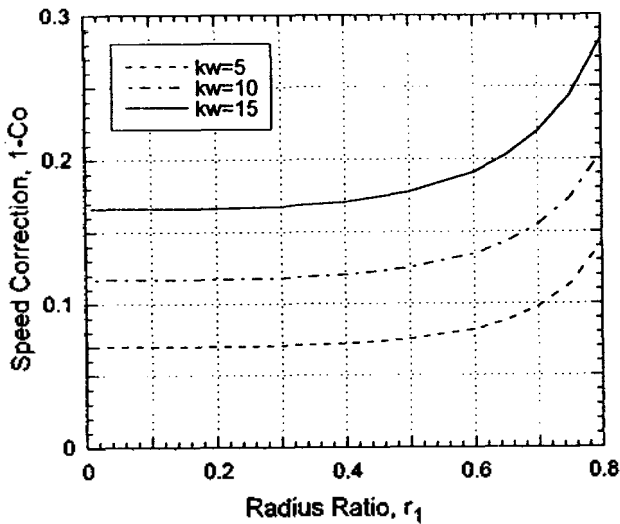


Fig.3 Correction of the fundamental-mode wave speed  $1-c_0$  depicted as a function of  $r_1$  for  $\omega = 0.3$ ,  $\epsilon = 0.1$ , and various values of  $k_w$ .

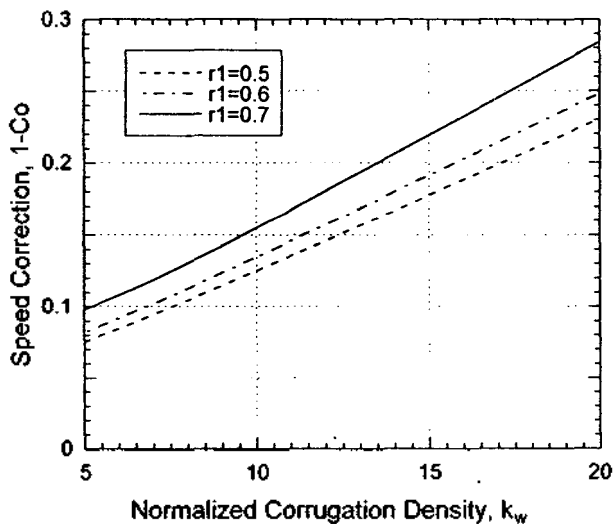


Fig.4 Correction of the fundamental-mode wave speed  $1-c_0$  depicted as a function of  $k_w$  for  $\omega = 0.3$ ,  $\epsilon = 0.1$ , and various values of  $r_1$ .

#### 4.2 실린더 형상과 전파속도

비틀 탄성파의 기본모드의 전파속도 변화량  $1-c_0$ 를 식(30)으로부터 내외경 비  $r_1$ 의 함수로 계산할 수 있다.  $\omega = 0.3$ ,  $\epsilon = 0.1$ , 그리고  $k_w = 5, 10, 15$ 에 대해 계산한 결과를 Fig. 3에 나타내었다. 이 그래프는  $r_1$ 이 작을수록, 즉 실린더가 얇을수록 실린더 표면굴곡으로 인한 전파속도 감소량이 커지는 경향을 보여준다.

또 하나의 사항은 전파속도 변화량  $1-c_0$ 를  $k_w$ 의 함수로 계산하여 얻어진다.  $\omega = 0.3$ ,  $\epsilon = 0.1$ , 그리고  $r_1 = 0.5, 0.6, 0.7$ 에 대해 계산한 결과를 Fig. 4에 나타내었다. 이 그래프는  $k_w \gg \omega$ 인 범위에서  $k_w$ 가 클수록, 즉 단위길이당 표면굴곡 횟수가 많을수록 전파속도 감소량이 커지는 경향을 보여준다.

### V. 결론

원형단면의 실린더에서 전파하는 비틀 탄성파를 다룸에 있어서, 표면이 길이방향으로 주기적인 굴곡을 갖는 실린더에서의 전파속도를 근사이론으로 구하였다. 도파관 역할을 하는 실린더의 주기적인 미소한 외경 변화를 섭동법에 의해 다루어 해석하였다. 근사해로 구한 이론적 경향은 자왜 트랜스듀서로 비틀파를 전파시키고 나사면을 가진 탄성 도파관에서 전파속도를 측정하는 실험으로 검증하였다.

표면이 주기적으로 울퉁불퉁한 실린더에서 전파하는 비틀 탄성파의 전파속도는 외경변화량의 제곱에 비례하는 양만큼 감소하는 경향이 나타났다. 또한 실린더의 두께가 얇을수록, 그리고 외경변화 빈도가 클수록 외경변화로 인한 전파속도 감소효과가 커지는 경향이 나타났다.

### 참고 문헌

1. 김진오, "주기적으로 불균일한 원형막대에서 전파하는 비틀 탄성파", 한국음향학회지, 제17권, 제5호, pp. 79-84, 1998.
2. 김진오, "초음파 점도계용 고체 매질의 탄성파와 인접 점성유체 간의 상호작용", 한국음향학회지, 제18권, 제5호, 게재예정, 1999.
3. H. H. Bau, J. O. Kim, L. C. Lynnworth, T. H. Nguyen, "Torsional wave fluid sensor and system", United States Patent 4,893,496, 1990.
4. J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam, 1975, p. 241.
5. S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970, pp. 341-343.
6. A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley and Sons, New York, 1981, pp. 418-426.
7. I. Stakgold, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, New York, 1979, pp. 207-209.
8. N. S. Tzannes, "Joule and Wiedemann effects - The simultaneous generation of longitudinal and torsional stress pulses in magnetostrictive materials", IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-13, No. 2, pp. 33-41, 1966.
9. J. O. Kim, H. H. Bau, "On-line, real-time densimeter - Theory and optimization", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 85, pp. 432-439, 1989.