

고차스펙트럼의 정규화 방법과 이차 위상결합 해석

이준서*, 김봉각(충청대학 메카트로닉스학부 기계설계과)
이원평(인덕전문대학 기계공학과), 차경옥(명지대학교 기계공학과)

Normalization of Higher Order Spectrum and Analysis of Quadratic Phase Coupling

J.S.Lee*, B.G.Kim, W.P.Lee, K.O.Cha

ABSTRACT

This thesis is concerned with the development of useful engineering techniques to detect and analyze nonlinearities in mechanical systems. The methods developed are based on the concepts of higher order spectra, in particular the bispectrum. The study of higher order statistics has been dominated by work on the bispectrum. The bispectrum can be viewed as a decomposition of the third moment(skewness) of a signal over frequency and as such is blind to symmetric nonlinearities. Initially auto higher order spectra are studied in detail with particular attention being paid to normalization method. Traditional method based on the bicoherence are studied. Under certain conditions, notably narrow band signals, the above normalization method is shown to fail and so a new technique based on prewhitening the signal in the time domain is developed.

1. 서론

비선형적인 문제를 다루기 위한 가장

널리 쓰이는 방법 중의 하나는 이것을 선형화 하는 것이다. 입력과 출력의 관계가 비선형인데도 불구하고 선형화 하여 해석하는 이유는 비교적 간단히 시스템의 특성을 알아볼 수 있기 때문이다. 하지만 보다 정확하고 엄격한 검사를 요하는 입·출력 관계를 해석하기에는 이러한 방법이 충분하지 않고, 나아가서 비선형 문제에서 생기는 여러 가지 새로운 현상들을 설명할 수 없을 것이다. 또한, 시스템의 비선형성이 무시할 수 없을 정도로 크면 선형화 기법을 적용하는 데에는 무리가 있다. 따라서, 이러한 경우에는 시스템의 비선형성을 확인하고 적당한 방법으로 비선형 시스템을 모델화(modelling)하여야 한다. 본 논문에서는 비선형 시스템 해석에 이용되는 고차스펙트럼 중 현재 공학분야에 많이 응용되고 있는 바이스펙트럼^[1]의 정규화 방법 가운데 하나인 바이코헤런스 함수와 간단한 시스템을 이용한 2차 위상결합 신호(QPC signal)의 검출(detection) 방법을 연구하고자 하였다.

2. 고차스펙트럼의 정규화 방법

바이스펙트럼은 계산될 때 신호의 파워스펙트럼^[2] 특성에 종속된 분산을 갖는다. 이러한

효과를 없애기 위하여 두 가지 방법을 사용함으로써 바이스펙트럼을 정규화 할 수 있다. 비대칭도 함수(skewness function)와 바이코헤런스(bicoherence)에 기반을 둔 두 가지 개발된 방법들이 사용된다. 비대칭도 함수는 신호의 대칭, 앨리어싱(aliasing), 선형성에 관한 통계학적 특성을 결정하는 데 반해 바이코헤런스는 신호의 2차위상결합(quadratic phase coupling)의 존재를 확인하기 위하여 사용된다.

2.1 비대칭도 함수

자기 바이스펙트럼(auto bispectrum)의 분산에 대한 식은 식(1)과 같이 파워스펙트럼 항들의 곱 $S_{xx}(f_1)S_{xx}(f_2)S_{xx}(f_1+f_2)$ 를 포함하고 있다.

$$\begin{aligned} \text{var}(S_{xxx}(f_1, f_2)) \\ = \frac{1}{M} [1 + \delta_k(f_1 - f_2)] S_{xx}(f_1) S_{xx}(f_2) S_{xx}(f_1 + f_2) \end{aligned} \quad (1)$$

만약에 이러한 항들이 제거되지 않는다면, 바이스펙트럼은 파워스펙트럼 효과에 영향을 받을 수도 있다. 이러한 항들을 제거하기 위한 방법으로 비대칭도 함수(skewness function)가 사용된다. 비대칭도 함수는 다음식으로 나타낸다. 즉

$$s^2(f_1, f_2) = \frac{|S_{xxx}(f_1, f_2)|^2}{S_{xx}(f_1)S_{xx}(f_2)S_{xx}(f_1+f_2)} \quad (2)$$

이러한 비대칭도 함수는 통계학적인 성질들을 잘 이해할 수 있기 때문에 통계 문제에서 정규화 방법으로 가장 널리 사용된다.^[3]

2.2 바이코헤런스 함수

바이스펙트럼을 정규화 시키기 위한 또 다른 방법이 바이코헤런스이며, 다음식과 같이 나타낸다.^{[4]-[5]}

$$b^2(f_1, f_2) = \frac{|S_{xxx}(f_1, f_2)|^2}{E[|X(f_1)X(f_2)|^2]E[|X(f_1+f_2)|^2]} \quad (3)$$

$E[X(f_1)X(f_2)X(f_1+f_2)] = S_{xx}(f_1)S_{xx}(f_2)S_{xx}(f_1+f_2)$ 라고 가정한다면 다음식을 만족한다.

$$\text{var}(b^2(f_1, f_2)) \approx \frac{1}{M} [1 - b^2(f_1, f_2)] \quad (4)$$

여기서, M 은 계산에 사용된 세분화의 수이다. 윗식을 식(1)과 비교하면 파워스펙트럼 효과에 기인된 어떠한 항도 나타나지 않고 있다. 그러므로 바이코헤런스 함수는 단지 신호의 3차 특성에만 종속되어질 수 있다. 바이코헤런스 함수에서 유용한 부분은 0과 1사이이다. 식(3)에 $Z(f_1, f_2) = X(f_1)X(f_2)$ 를 대입하고 코쉬 부등식(Cauchy inequality)^[6]을 사용하여 간단히 증명될 수 있다. 즉

$$b^2(f_1, f_2) = \frac{|E[Z(f_1, f_2)X^*(f_1+f_2)]|^2}{E[|Z(f_1, f_2)|^2]E[|X(f_1+f_2)|^2]} \quad (5)$$

윗식을 코쉬 부등식의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} |E[Z(f_1, f_2)X^*(f_1+f_2)]|^2 \\ \leq E[|Z(f_1, f_2)|^2]E[|X(f_1+f_2)|^2] \end{aligned} \quad (6)$$

따라서 바이코헤런스의 값은 $0 \leq b^2(f_1, f_2) \leq 1$ 가 된다. 본 논문에서는 정규화 방법으로 바이코헤런스를 사용하였다. 바이코헤런스의 효과를 살펴보기 위하여 가우스성 랜덤백색잡음을 입력신호 $x(t)$ 로 취하고 $x(t)$ 를 Fig.1와 같이 차단 주파수(cut-off)가 0.1인 저역통과필터(low pass filter)를 통해서 필터링하여 신호 $y(t)$ 를 얻는다. 그 다음 신호 $y(t)$ 를 저주파의 비대칭된 성분을 갖도록 제공한다. 또한 입력신호 $x(t)$ 를 차단 주파수(cut-on)가 0.25인 고역통과필터(high pass filter)를 통과시킨 후에 필터링된 신호 $z(t)$ 를 구해서 두 신호를 합하여 출력신호 $w(t)$ 를 만든다.

결과적으로 신호 $w(t)$ 는 저주파에서는 비대칭된 성분을 고주파에서는 가우스성 성분을 갖게 된다. 이렇게 만들어진 신호 $w(t)$ 를 비대칭 혼합신호(skewed mixed signal)라고 칭하고, Fig.2에 나타내었다. 또한 Fig.3에 나타낸 혼합신호 $w(t)$ 의 파워스펙트럼은 노치(notch)통과 필터로 필터링된 것과 같이 두 군데의 개별적 구역으로 나타난다. 그러나 파워스펙트럼을 통해서만은 가우스성 성분으로부터 비대칭된 성분을 구별해 낼 수 없다. Fig.4의 혼합신호 $w(t)$ 의 정규화 되지 않은 바이스펙트럼의 값은 고주파 영역에서도 저주파 영역에서와 같이 크게 나타난다. 이것은 혼합신호 $w(t)$ 의 파워스펙트럼 효과에 기인된 항들을 포함하고 있는 비정규 바이스펙트럼의 분산 때문이다. 이로 인하여 비대칭된 저역통과 성분과 가우스성 고역통과 성분이 나타나는 것이다. 이러한 분산을 줄이는 방법은 매우 긴 데이터에 대한 비정규 바이스펙트럼을 평균하는 것인데 이것은 실용적이지 못하다. Fig.5에서 바이코헤런스는 파워스펙트럼 효과를 제거하여 비정규 바이스펙트럼을 정규화 시킨다. 그러므로 저주파 영역의 비대칭된 성분만을 정확하게 분리해 낼 수 있다. 이때 바이스펙트럼은 4096개의 데이터 개수를 윈도우 사이즈 64로 64구간에 걸쳐 평균하여 계산하였다.

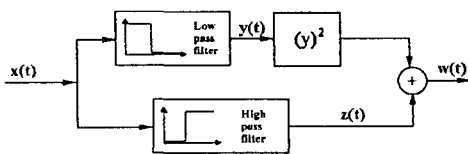


Fig.1 The diagram of the generation of skewed mixed signal

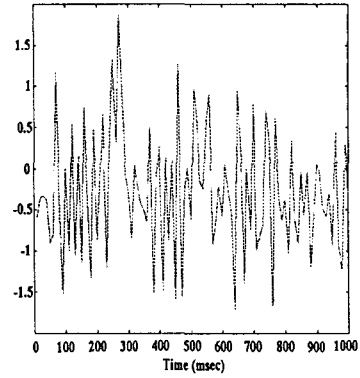


Fig.2 The skewed mixed signal

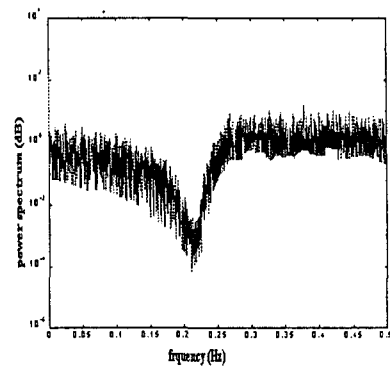


Fig.3 Power spectrum of skewed mixed signal

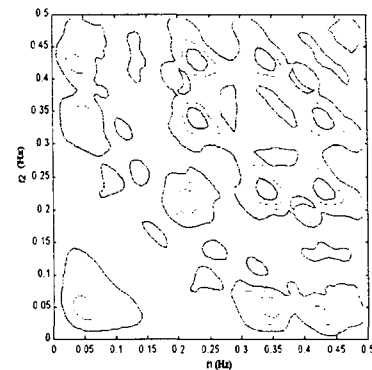


Fig.4 Bispectrum of mixed signal

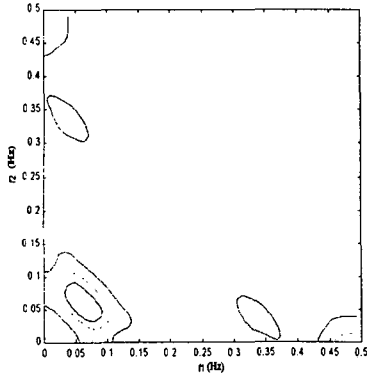


Fig.5 Bicoherence of mixed signal

3. 이차 위상결합 해석

바이코헤런스는 2차 위상결합(QPC)을 해석하는데 자주 사용된다. 파워스펙트럼을 통해서 위상정보를 알 수 없다. 즉, 위상결합의 존재 여부를 확인할 수 없다. 이러한 현상을 위상 눈가림(phase blind)이라 한다. 그러나, 바이코헤런스의 크기는 f_1 과 f_2 에서 주파수 성분의 위상들 사이의 상관을 나타낼 수 있다. 2차 위상결합은 2차 비선형 성분을 갖는 신호에서 발생하는 것이다. 이러한 바이코헤런스의 유용성을 알아보기 위하여 Fig.6과 같이 가우스성 백색잡음 $x(t)$ 를 주파수 0.1과 0.2사이의 협대역 필터(narrow band filter)로 필터링하여 신호 $z(t)$ 를 구하고, 비선형 형태의 2차의 z^2 으로 통과시켜 $w(t)$ 를 구한다. $w(t)$ 와 유사한 스펙트럼을 갖는 신호 $y(t)$ 를 발생시키기 위하여 두 번째 필터는 $w(t)$ 의 스펙트럼과 같은 특성을 갖도록 한다. 그러나 이 신호는 어떠한 비선형 성분도 포함하고 있지 않다. Fig.7와 Fig.8에서 보여지는 것처럼 두 신호의 파워스펙트럼이 거의 같아 보여도 $w(t)$ 는 2승연산에 의하여 발생된 2차 위상결합된 성분들을 포함하고 있다. Fig.9에서 처럼 신호 $w(t)$ 의 바이코헤런스는 주파수 영역 0.1과 0.2에 걸쳐서 피크를 나타내고 있다. 그러나, 신호 $y(t)$ 는 어떠한 위상결합도 없는 가우스성 잡음을 포함한다. $y(t)$ 의 바이코헤런스는 영(zero)이 될 것이다.

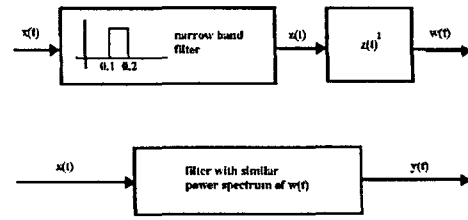


Fig.6 The diagram of the generation of signal with QPC

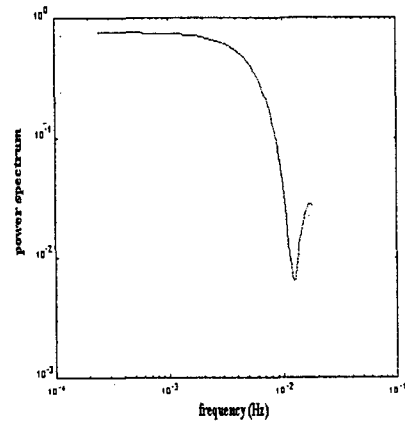


Fig.7 Power spectrum of signal with QPC

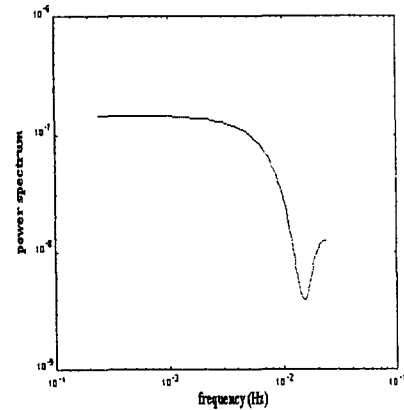


Fig.8 Power spectrum of signal with no QPC

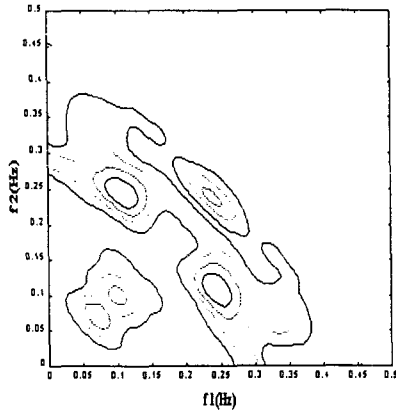


Fig.9 Bicoherence of signal
with QPC

4. 결론

간단한 입·출력 시스템 모델을 사용하여 고차스펙트럼 가운데 하나인 바이스펙트럼의 정규화와 2차 위상결합 해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 비대칭도 함수와 바이코헤런스 함수는 바이스펙트럼을 정규화하는 데 사용되어진다.
- (2) 기존의 파워스펙트럼 해석으로는 2차의 비선형 위상결합 정보를 확인할 수 없다.
- (3) 바이코헤런스는 바이스펙트럼을 정규화 하는 하나의 방법이며, 2차 위상결합(quadratic phase coupling)을 해석하는 데 상용될 수 있다.

참고문헌

- [1] M B Priestley, 'Spectral Analysis and Time Series', Academic Press, (1981)
- [2] M L Williams, 'The use of the Bispectrum and Other Higher

Order Statistics in the Analysis of One Dimensional Signals', PhD thesis, Dept of Physics, Imperial College, (July 1992)

- [3] Joon Seo Lee, 'A Study on the Characteristics of Nonlinear Pulsating Pressure Waves using Higher Order Spectra in Exhaust Systems of IC Engines' pp36, PhD thesis, Dept. of Mechanical Engineering, Myongji Univ., (1997)
- [4] Y. C. Kim, J. M. Beall, E. J. Powers and R. W. Miksad, 'Bispectrum and Nonlinear Wave Coupling', Physics of Fluids, Vol. 23, No.2, p.258-263, Feb. 1980
- [5] D. Choi, J. Chang, R. O. Stearman and E. J. Powers, 'Bispectral Identification of Nonlinear Mode Interactions', 2nd International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, p.602-609, 1984
- [6] J. W. A. Fackrell, 'Higher Order Spectral Content of Mechanical System' ISVR Contract Report, (Sep. 1993)