

클래딩 자유단의 열응력 해석

Thermal Stresses near the Edge in a Clad

김형남, 최성남, 장기상

한전 전력연구원, 대전시 유성구 문지동 103-16

ABSTRACT Based on the principle of complementary energy, an analytical method is developed which focused on the end effects for determining thermal stress distributions in the clad beam. This method gives the stress distributions which completely satisfy the stress-free boundary condition at the edge. Numerical result shows that shear stress and peeling stress at the interface between the substrate and clad are significant near the edge and become negligible in the interior region. Even though the relative location where the maximum or minimum stresses take place moves to interior as the length of the beam become smaller, the absolute location from the free end and the value of these stresses are the same in spite of the variation of the length of beam.

1. 서론

하나의 기계 부품에서 필요로 하는 물리적 성질이 한가지 물질로부터 얻을 수 없을 때 모재에 클래딩을 하여 서로 다른 재료의 유리한 성질을 이용하게 된다. 예를 들면, 원자력발전소의 증기발생기 관지지대는 가격이 저렴하고 제작이 용이한 탄소강을 사용하나 세관 재질인 인코넬 합금과의 용접성 때문에 인코넬 합금을 클래딩을 하여 사용한다. 발전소의 티타늄 전열관 복수기에서도 같은 이유로 탄소강에 티타늄을 클래딩한 관지지대를 사용하고 있다.

그러나 온도 변화가 있는 경우 서로 다른 열팽창계수로 인하여 서로 늘어나거나 줄어드는 길이 차이가 생기는 데, 이 차이가 경계면을 따라 분포된 힘으로 작용한다. 이 힘으로 인하여 자유단에서 가까운 경계면에서 응력의 변화가 커지고, 이는 미세 균열이나 박리의 원인이 되어 부품의 신뢰도에 영향을 미친다는 것은 잘 알려진 사실이다. 그러므로 경계면에서의 응력상태를 안다는 것은 부품의 신뢰성 제고를 위하여 매우 중요한 일이다.

접층 구조물에 대한 열응력 문제는 Grimado⁽¹⁾ 이후 Electronic Packaging, 표면처리 등 여러분야에서 널리 연구되고 있으나 자유단에서의 응력조건을 만족시키는 연구 결과를 찾기는 매우 어렵다. Suhir^(2, 3)는 Timoshenko⁽⁴⁾의 바이메탈 이론을 발전시켜 유한 길이의 바이메탈을 두 개의 독립된 보로 취급하여 경계에서 응력과 변위를 일치시키는 방법으로 경계면에서의 응력을 구하였다. Razaqpur⁽⁵⁾와 Suhir⁽⁶⁾ 자신에 의해 지적된 것처럼 그의 첫 번째 연구는 자유단에서의 응력조건을 만족시키지 못했지만 두 번째 연구에서는 이를 보완한 연구 결과를 내놓았다.

접층보의 경계면을 따라 작용하는 열응력을 구하기 위하여 Yin^(7, 8)은 Stress Function을 이용한 변분법을 이용하였다. 그의 연구는 끝단 효과(End-Effects)에 중점을 두어 접층보의 자유단에서 경계조건을 만족하는 응력을 구하는데 중점을 두었다.

본 논문에서는 클래딩의 자유단에서 경계조건을 완전히 만족하는 열응력 분포를 구할 수 있는 방법을 소개하고 이를 이용하여 탄소강에 티타늄을 클래딩한 2차원 빔에 대하여 빔의 길이가 열응력에 미치는 영향을 분석하였다.

2. 지배방정식

Figure 1은 양쪽 끝이 자유단이고 폭이 1(unit)인 접층보의 기하학적 크기 및 물리적 성질을 보여준다. 경계조건은 Fig. 2에 표시되어 있다. 편의를 위하여 온도 변화가 ΔT_k (k 는 k -번째 ($k = 1, 2$) 층을 의미)인 경우 2-차원 등방성 탄성체에 대하여 다음과 같은 관계식을 도입하자.

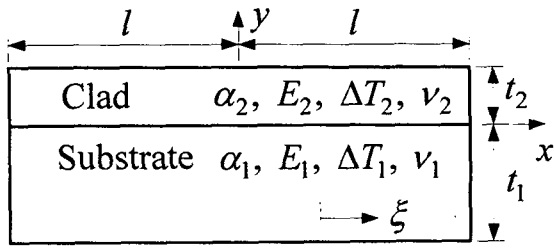


Fig. 1 Material properties of each layer

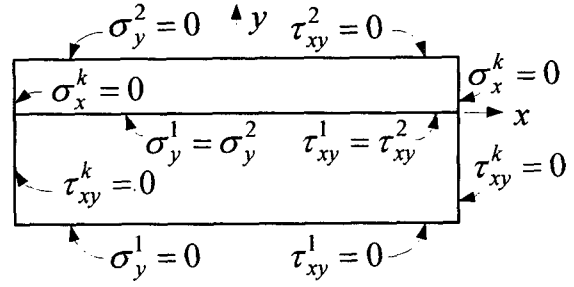


Fig. 2 Boundary conditions

$$\sigma_x^k = \hat{\sigma}_x^k - \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1 - \nu_k}, \quad \sigma_y^k = \hat{\sigma}_y^k - \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1 - \nu_k}, \quad \tau_{xy}^k = \hat{\tau}_{xy}^k \quad (1)$$

각 층의 물리적 성질이 일정하다고 가정 하면 새로운 응력 성분에 대한 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}_y^k}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

위 식에 대해서 자유단($x = \pm l$)에서 실제 응력이 "0"이 되기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_x^k = \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1 - \nu_k}, \quad \hat{\tau}_{xy}^k = 0. \quad (3)$$

3. 지배방정식의 변환

각층에 생기는 x -축 방향의 응력을 다음과 같이 가정하자.

$$\hat{\sigma}_x^k(x, y) = \sum_{i=1}^{n_k+1} \sigma_{(i-1)}^k(x) \left(\frac{y}{t_k} \right)^{i-1} \quad (4)$$

여기서, n_k ($k=1, 2$)는 임의로 선택된 다항식의 최대 차수이고 $\sigma_{(i-1)}^k(x)$ 는 (n_k+1) 개의 결정해야 되는 함수이다. 각 층의 자유단($x = \pm l$)에서의 경계조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma_0^k = \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1 - \nu_k}, \quad \sigma_m^k = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots, n_k) \quad (5)$$

식 (2)에 의해서 각 층에서 미지의 함수 $\sigma_{(i-1)}^k(x)$ 와 $\hat{\tau}_{xy}^k(x, y)$ 및 $\hat{\sigma}_y^k(x, y)$ 의 관계가 구해지며 식 (3)에 의해서 추가적인 경계조건이 다음과 같이 얻어진다.

$$\left. \frac{d\sigma_m^k}{dx} \right|_{x=\pm l} = 0 \quad (m=1, 2, 3, \dots, n_k) \quad (6)$$

경계면에서 첫 번째 층과 두 번째 층의 수직응력(σ_y), 전단응력(τ_{xy})이 같다는 조건을 이용하면 미지 함수($\sigma_0^1, \sigma_1^1, \dots, \sigma_{n_1}^1, \sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{n_2}^2$) 중 2개가 결정되어 응력분포를 알기 위해서 구해야 하는 미지 함수의 수는 $(n_1 + n_2)$ 개 이다.

4. 에너지법

평형 방정식과 경계조건을 이용하여 구한 응력장(Auxiliary Stress Field)이 유일해가 되기 위해서는 다음과 같은 기하학적 적합조건에 관한 식을 만족해야 한다. 기하학적 적합조건은 실제 상태의 응력을 구하기 위한 필요 조건이며 Complementary 에너지법에 근거한 변분법에 의해서 우회적으로 만족시킬 수 있다. Principle of Complementary Energy는 다음과 같이 설명이 된다. 물체의 내부와 힘이 작용하는 일부 표면에서 평형 조건을 만족하는 모든 응력 중에서 기하학적 적합조건을 만족하는 응력은 Complementary 에너지 변분을 0으로 만든다.

2차원 응력 문제에서 Complementary Energy는 다음과 같다.

$$V^* = \int_{-l}^l \int_t \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2E_k} \{ (\hat{\sigma}_x^k)^2 + (\hat{\sigma}_y^k)^2 - 2\nu_k \hat{\sigma}_x^k \hat{\sigma}_y^k + 2(1 + \nu_k) (\hat{\tau}_{xy}^k)^2 \} dy dx \quad (7)$$

위식을 적분하여 에너지법(Principle of Stationary Complementary Energy)을 적용하면 함수 $\sigma_{m_1}^1(x)$ ($m_1=0, 1, 2, \dots, n_1$), $\sigma_{m_2}^2(x)$ ($m_2=0, 1, 2, \dots, (n_2-2)$)를 미지함수로 하는 다음과 같은 연립 상미분 방정식이 얻어진다.

$$\left[A \frac{d^4}{dx^4} + B \frac{d^2}{dx^2} + C \right] [\sigma_0^1, \sigma_1^1, \dots, \sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{n_2-1}^2, \sigma_{n_2}^2]^T = \{a\} \quad (8)$$

여기서, 상수 A, B, C 는 변분을 취하는 과정에서 결정되는 상수이다(Column Matrix $\{a\}$ 의 성분도 이 과정에서 결정됨). 경계조건과 함께 식 (8)에 의해 주어진 지배방정식을 풀고 이를 식 (1)에 대입 하므로써 실제의 응력분포가 구해진다.

5. 수치예

지면 관계상 본 논문에서는 소개하지 않았으나 앞 절에서 개발된 방법으로 구한 응력분포는 다른 연구자들의 연구결과와 매우 잘 일치함을 알 수 있었다. 본 절에서는 탄소강에 티타늄을 클래딩한 2차원 빔에 대하여 빔의 길이가 열응력에 미치는 영향을 검토하기 위하여 다음과 같은 물리적 성질을 사용하였다. 식 (4)의 n_k 는 모재에 대하여 3, 상대적으로 얇은 클래드에 대하여 1을 선택하였다. 온도 변화는 전체적으로 $10^\circ C$ 상승한 것으로 보았다. Fig. 3, 4는 경계면에서 모재, 클래드에 각각 작용하는 x -축방향 열응력 분포도이다. 전체적으로 모재에는 압축응력, 클래드에는 인장응력이 작용하며 자유단에서 어느 정도 떨어지면 일정한 응력이 작용함을 알 수 있다. 클래드의 접착력 및 박리와 직접 관련이 있는 y -축방향의 열응력 분포가 Fig. 5에 주어져 있다.

Table 1 Material properties of each layer

Material	$t(mm)$	$E(GPa)$	ν	$\alpha(/^\circ C)$
Steel	10	200	0.28	11.0×10^{-6}
Ti	0.5	110	0.34	8.82×10^{-6}

자유단 근처에서 응력이 현저히 크기 때문에 자유단 근처가 쉽게 박리될 것이다. 모재에 비해서 클래드의 두께가 커질수록 최대 y -축방향 응력이 작용하는 위치가 자유단으로 접근하고 어느 한계를 넘어서면 자유단($x=\pm l$)에서 발생하나 본 논문에서는 이의 소개를 생략하였다. Fig. 6은 경계면에서의 전단응력 분포이다. Fig. 3~5에서 보는 바와 같이 최대 및 최소응력은 빔의 길이에 무관하며 길이가 길수록 전체 길이에 대하여 상대적으로 자유단에 가까운 곳에서 최대(최소) 응력이 발생한다. 그러나 Fig. 6에서 보는 바와 같이 절대좌표계(ξ -좌표)를 사용하면 정확히 일치함을 알 수 있다.

6. 결론

경계조건을 완전히 만족하는 응력분포를 구하는 방법을 제시하였다. 또한 최대(최소) 응력의 크기는 클래딩된 빔의 길이에 무관하며, 길이가 길수록 전체 길이에 대하여 상대적으로 자유단에 가까운 곳에서 최대(최소) 응력이 작용하나 자유단으로부터의 절대 위치는 항상 일정함을 밝혔다.

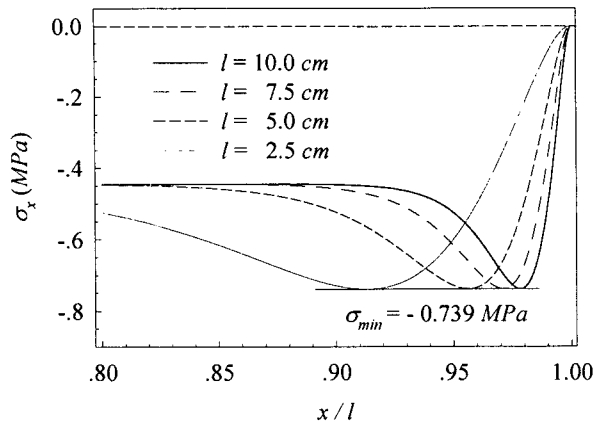


Fig. 3 Axial stresses in the substrate along the interface

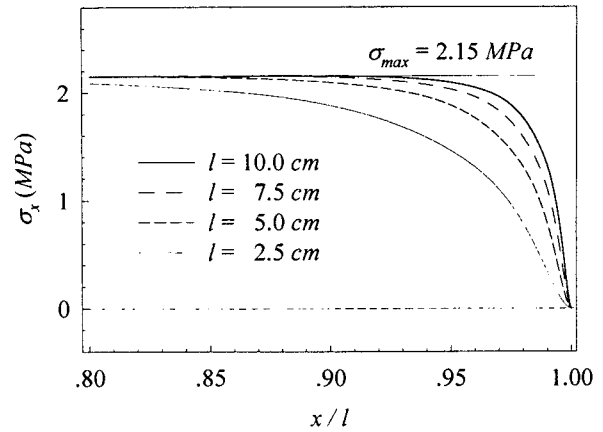


Fig. 4 Axial stresses in the clad along the substrate

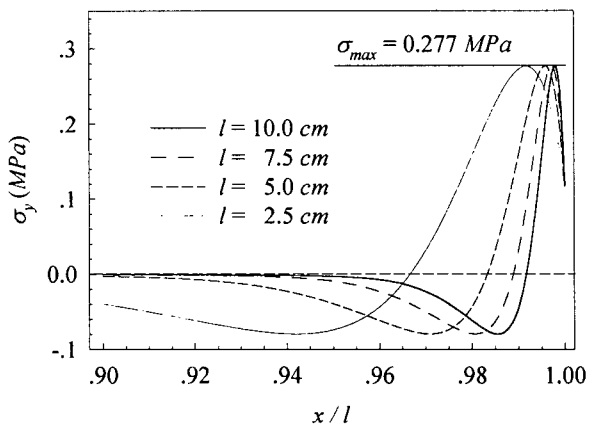


Fig. 5 Normal stresses along the interface

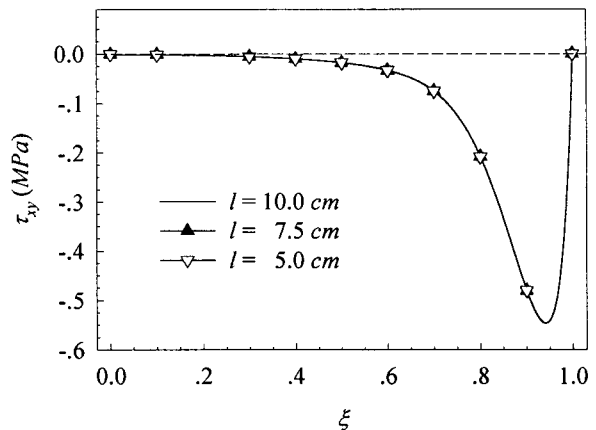


Fig. 6 Shear stresses along the interface

7. 참고문헌

- Grimado, P. B.: "Interlaminar Thermoelastic Stresses in Layered Beams", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 1, 1974, pp. 75~86
- Suhir, E.: "Stresses in Bi-Metal Thermostats", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, 1986, pp. 657~660
- Suhir, E.: "Interfacial Stresses in Bimetal Thermostats", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, 1989, pp. 595~600
- Timoshenko, S. P.: "Analysis of Bi-Metal Thermostats", *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 11, 1925, pp. 233~255
- Razaqpur, A. G.: "Discussion on Stresses in Bi-Metal Thermostats", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, 1987, pp. 479
- Suhir, E.: "Discussion on Stresses in Bi-Metal Thermostats", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, 1987, pp. 479
- Yin, W.-L.: "Thermal Stresses and Free-Edge Effects in Laminated Beams: A Variational Approach Using Stress Functions", *ASME Journal of Electronic Packaging*, Vol. 113, 1991, pp. 68~75
- Yin, W.-L.: "Refined Variational Solutions of the Interfacial Thermal Stresses in a Laminated Beam", *ASME Journal of Electronic Packaging*, Vol. 114, 1992, pp. 193~198