

## 수치해석에 의한 다층토 압밀의 경계요소면 해석 Layer Interface Analysis of Multi-Layered Soils by Numerical Methods

김팔규<sup>1)</sup>, Pal-Kyu Kim, 류권일<sup>2)</sup>, Kwon-Il Ryu, 구기욱<sup>3)</sup>, Gi-Wuk Koo, 남상규<sup>4)</sup>, Sang-Kyu Nam

<sup>1)</sup> 충남대학교 토목공학과 교수, Professor, Dept. of Civil Engineering, Chungnam Univ.

<sup>2)</sup> 충남대학교 토목공학과 박사과정, Graduate Student, Dept. of Civil Engineering, Chungnam Univ.

<sup>3)</sup> (재)한국철도기술공사 부장, General manager, Korea Railroad Technical Corporation

<sup>4)</sup> (주)한국구조안전기술원 부장, General manager, Korea Structural Analysis & Diagnosis Eng.

**SYNOPSIS** : In general, the term soft ground includes clayey soils, which have large compressibility and small shear resistance due to the external load. All process of consolidation in compressible soils can be explained in terms of a transfer of load from an incompressible pore-water to a compressible soil structure. Therefore, one of the most important subjects about the characteristics of the time-dependent consolidation of the clay foundation by the change of load may be the presumption of the final settlement caused by consolidation and the degree of consolidation according to the time.

The problems of discontinuous layer interface are very important in the algorithm and programming for the analysis of multi-layered soils using a numerical analysis, finite difference method. Better results can be obtained by the process for discontinuous layer interface, since it can help consolidation analysis to model the actual ground.

The purpose of this paper provides an efficient computer algorithm based on numerical analysis using finite difference method(F.D.M.) which account for multi-layered soils to determine the degree of consolidation and excess pore pressures relative to time and positions more realistically.

**Key Words** : Numerical Method, Multi-layered Soil, Finite Difference Method, Layer Interface, Explicit Scheme, Implicit Scheme

### 1. 서 론

연약지반의 토질은 주로 점성토로 구성되어 있다. 이 연약점토는 외부 하중변화에 의해 큰 압축성과 작은 전단저항 특성을 나타낸다. 또한, 점성토에서의 압밀은 사질토와는 달리 간극수압의 소산에 따라 장시간에 걸쳐서 발생하게 된다. 따라서, 하중 변화에 의한 연약점토지반의 시간의존적인 압밀 특성에서 가장 큰 주제는 최종 압밀침하량과 시간에 따른 압밀도 추정이다(R.F. Craig, 1992).

실제의 압밀침하 해석은 지반의 비균질성, 시간의존성, 응력-변형율의 비선형성, 자중의 영향, 시간 종속적인 경계조건, 2차압밀 등의 여러 요소들을 고려해야 하므로 정확한 압밀해석은 어렵다. 또한, 계산상의 단순화 과정도 해석결과의 오차를 유발하는 이유가 된다.

최근, 컴퓨터의 발달과 더불어 수치해법의 개발과 함께 물리적 특성의 정확한 이해에 따르는 압밀해석 방법의 연구가 활발히 진행되고 있다. F.D.M은 많은 parameter가 필요하지 않고, 경제적이며 실용성이 크다. F.D.M은 Explicit 방법과 Implicit 방법으로 대별될 수 있다(Joe D. Hoffman, 1993). 본 연구에서는 안정조건만 제외한다면 값에는 거의 차이가 없으며 경제적인 Explicit scheme를 이용한 1차원 다층토 압밀해석의 경계요소면 해석 및 알고리즘 개발에 중점을 두었다.

다층토의 압밀 해석은 투수계수, 층두께, 압밀계수 등 여러 변수들이 포함되어있다. 특히, 상이한 층으로 구성 되어 있는 연속한 층의 layer interface에서의 해석은 중요한 요소이다. 각 토층에서의 간극수의 유출량과 시간에 따른 토층의 체적변화율이 같다는 조건 외에 경계층에서의 흐름은 연속으로 처리하여 layer interface에서의 압밀을 해석한다.

배수조건은 압밀해석시 시간 변화율에 상당한 영향을 미치는 요소이다. 불투수층일 경우 경계층의  $t + \Delta t$  단계의 간극수압 계산시 불투수 경계층은  $u_{j+1,n} = u_{j-1,n}$ 의 조건을 만족하도록 하는 가상의 경계면을 이용하였다.

## 2. Explicit Scheme

### 2.1 유한차분식

토층의 단위요소로부터 간극수의 유출량과 시간에 따르는 토층의 체적변화량이 같다고 가정하면 Terzaghi의 1차원 압밀 방정식은 다음과 같다(Braja M. Das, 1997, Manuel Casteleiro, 1981).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

식(1)을 유한차분식으로 변환하면 다음과 같은 회귀방정식으로 된다. 이 식은 3각대각행렬의 연립방정식 Matrix를 구성한다.

$$u_j^{n+1} = r \cdot u_{j+1}^n + (1-2r)u_j^n + r \cdot u_{j-1}^n \quad (2)$$

여기서 operator 'r'는 다음과 같이 식(3)으로 나타낼 수 있으며 이를 그림 1.과 같이 나타낼 수 있다.

$$r = \frac{\Delta t \cdot C_v}{\Delta z^2} \quad (3)$$

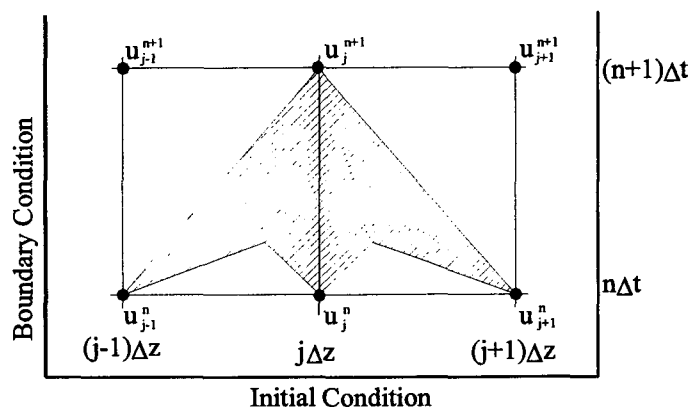


그림 1. Explicit Scheme Operator

## 2.2 안정 및 수렴

### 2.2.1 안정도

수치해법의 기본형태는 미분형태의 방정식을 차분형태로 대체시키는 것이므로 안정과 수렴의 조건을 만족해야 한다. 안정도는 Round-off등으로 생긴 오차가 시간에 따라 확장되지 않는 것을 나타내며 수렴도는 유한차분으로 나누어 계산함에 따른 오차의 크기를 나타낸다.

Taylor 급수를 적용하면 차분식은 다음과 같이 전개된다.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\Delta t^2}{3!} + \text{etc.} \quad (4)$$

$$\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \frac{\Delta z^2}{4!} + 2 \frac{\partial^6 u}{\partial z^6} \frac{\Delta z^4}{6!} + \text{etc.} \quad (5)$$

따라서, 식(1)은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + O(\Delta t, \Delta z^2) \quad (6)$$

이때,  $O(\Delta t, \Delta z^2)$ 는 절단오차(Truncation error)를 나타낸다. 선형안정성(Linear Stability)을 구명하기 위해, 해  $u_j^n$ 은 Fourier 급수로 구할 수 있는데 이중 가장 큰 항만 택하면 다음과 같다.

$$u_j^n = \xi^n e^{imj\Delta z} \quad (7)$$

식(7)을 식(2)에 대입하면 다음과 같다.

$$\xi^{n+1} e^{imj\Delta z} = \xi^n (r e^{im(j+1)\Delta z} + (1-2r)e^{imj\Delta z} + r e^{im(j-1)\Delta z}) \quad (8)$$

이때, Amplification factor 'A'를 적용하기 위해서,

$$\xi^{n+1} = A \xi^n \quad (9)$$

라고 하면, A는 다음과 같다.

$$A = \left[ 1 - 4r \sin^2 \frac{m\Delta z}{2} \right] \quad (10)$$

식(10)에서  $4r \sin^2 \frac{m\Delta z}{2}$ 는 항상 (+)이고  $|A| \leq 1$ 의 조건을 갖는다. 따라서,

$$4r \sin^2 \frac{m\Delta z}{2} \leq 2 \quad (11)$$

$$r \leq \frac{1}{2} \quad (12)$$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta z^2}{2C_v} \quad (13)$$

따라서, 식(2)는 조건적인 안정성을 갖고있다고 할 수 있다(E. F. Nogotov, 1978).

### 2.2.2 수렴도

식(14)를 식(6)에 대입하면 식(15)에서 절단오차는  $r=1/6$ 일 때  $O(\Delta t, \Delta z^2)$ 가 되어 유한차분식의 계

산 결과가 참값에 더 빨리 수렴하게 된다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = C_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = C_v^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \cdot \frac{C_v \Delta z^2}{2} \left( \frac{1}{6} - r \right) + C_v \left[ 2 \frac{\partial^6 u}{\partial z^6} \frac{\Delta z^4}{6!} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\Delta t^2}{3!} + \dots \right] \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \cdot \frac{C_v \Delta z^2}{2} \left( \frac{1}{6} - r \right) + O[\Delta z^4, \Delta t^2] \quad (16)$$

또한, 안정성 검토에 따른 Amplification factor는 수치해법에 따른 분산도의 측정이 된다.

### 3. 경계면의 해석

#### 3.1 Layer Interface의 해석

다층토 압밀의 closed-form 해를 구하는 것이 항상 가능한 것은 아니다. 다층토 해석시 다른 투수계수, 층 두께, 다른 압밀계수와 같은 여러 변수들을 포함하고 있다. 만일 둘 이상의 층이 존재하는 경우, 경계면에서 간극수압의 계산은 단일층의 압밀해석과는 달리 수정되어야 한다(Braja M. Das, 1997).

layer-interface에서는 토성의 변화에 따른 간극수압의 분포에 대하여 불연속성을 초래함으로 다음과 같은 연속식에 의하여 처리한다.

$$K_p \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]_p = K_q \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]_q \quad (17)$$

해를 구하기 위하여 interface의 면적범위를 고려하면 그림 2와 같이 dt와 dz로 분할된 직사각형의 Grid로 된다. 이때, layer interface 내의 계산은 식(2)로 적용이 가능하나 layer interface상에서는 흐름방정식의 연속성을 응용하여 유한차분 표현을 사용해야된다(Jingde. Z., 1996).

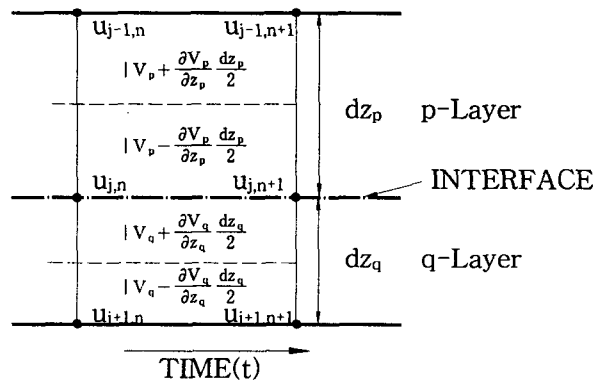


그림 2. Layer interface에서 유한차분

토층 P에서,

$$V_{j-\frac{1}{2}} - V_j = m_{vp} \frac{\Delta z_p}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (18)$$

$$V_j - V_{j+\frac{1}{2}} = m_{vq} \frac{\Delta z_q}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (19)$$

여기서, V는 단위유량으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_{j-\frac{1}{2}} = -k_p \frac{\partial u}{\partial z} = k_p \frac{u_{j-1} - u_j}{\Delta z_p} \quad (20)$$

$$V_{j+\frac{1}{2}} = -k_q \frac{\partial u}{\partial z} = k_q \frac{u_j - u_{j+1}}{\Delta z_q}$$

식(18)과 식(19)를 결합하여 식(20)에 대입하고 Explicit scheme을 적용하면 다음과 같이 정리된다.

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{2\left(\frac{1}{\gamma_w}\right)\Delta t}{M_{v,p}\Delta z_p + M_{v,q}\Delta z_q} \cdot \left\{ \frac{K_p}{\Delta z_p}(u_{j-1}^n - u_j^n) + \frac{K_q}{\Delta z_q}(u_{j+1}^n - u_j^n) \right\} \quad (21)$$

$M_v = \frac{K}{\gamma_w C_v}$ 을 위 식에 대입하여 다시 정리하면 다음과 같다.

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{2\Delta t}{\left[ \frac{K_p}{C_{v,p}} \Delta z_p + \frac{K_q}{C_{v,q}} \Delta z_q \right]} \cdot \left\{ \frac{K_p}{\Delta z_p}(u_{j-1}^n - u_j^n) + \frac{K_q}{\Delta z_q}(u_{j+1}^n - u_j^n) \right\} \quad (22)$$

따라서, layer interface에서의 해석은 식(22)를 적용한다.

### 3.2 가상의 경계면

불투수층이 존재하는 경우 식(2)의 적용은 곤란하다. 불투수층이 존재할 경우에 경계조건은 식(23)과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (23)$$

위 식을 유한차분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{u_{jj-1}^n - u_{jj+1}^n}{2\Delta z} = 0 \quad (24)$$

불투수 경계면 j로 표시되는 깊이에서의 유한차분식은 다음과 같이 정리되며 그림 3.과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_{jj-1}^n = u_{jj+1}^n$$

따라서, 불투수경계면에서 식(2)는 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$u_{jj}^{n+1} = u_{jj}^n + r(2u_{jj-1}^n - 2u_{jj}^n) \quad (25)$$

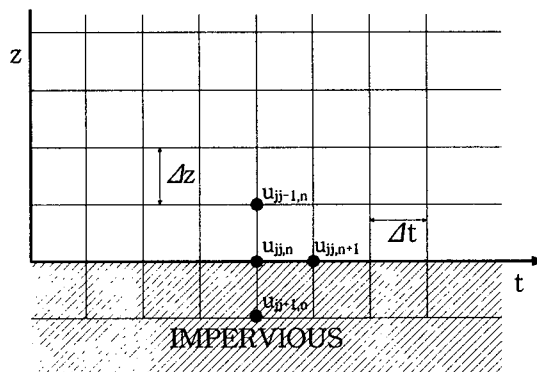


그림 3. 가상의 경계면

## 4. 수치해석의 적용

### 4.1 프로그램의 설계

현장에 적합한 다층토의 압밀해석을 위해 Explicit Scheme을 이용한 프로그램을 설계하였다. 프로그램은 Operator 값이 안정조건에 부합하도록 time step 및  $\Delta z$ 의 크기를 설정한다. 또한, layer interface 및 가상의 경계면 조건을 적용한 프로그램을 설계하였다. 그림 4.는 프로그램의 흐름도를 보여준다.

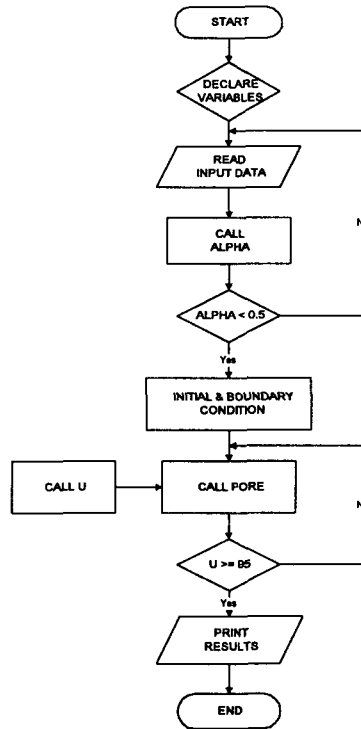


그림 4. 프로그램 흐름도

#### 4.1 Operator

Operator값의 영향을 알아보기 위해서 무차원의 time step을 적용하였다. 단면배수의 경우와 양면배수의 경우로 나누어 각각의 경우에 간극수압분포도를 알아보았다. 그림 5. (a),(b),(c)는 양면배수일 경우  $\gamma$ 가 각각 1/2, 1/6, 0.6일 때의 간극수압 소산도를 보여준다. 또한, 그림 6. (a),(b),(c)은 단면배수일 경우 각각의 간극수압의 소산을 보여 준다.

그림 5. 및 그림 6.에서 알 수 있듯이 양면배수 및 단면배수 공통적으로  $\gamma=1/2$ 일때보다는  $\gamma=1/6$ 일 때 더욱 정밀한 값으로 수렴함을 알 수 있다. 또한, 양면배수보다 단면배수가 계산량이 많고 프로그램 작동시간이 길다. ' $\gamma$ '값이 0.6일 경우는 불규칙한 형상으로 발산하여 신뢰할 수 없는 값이 된다.

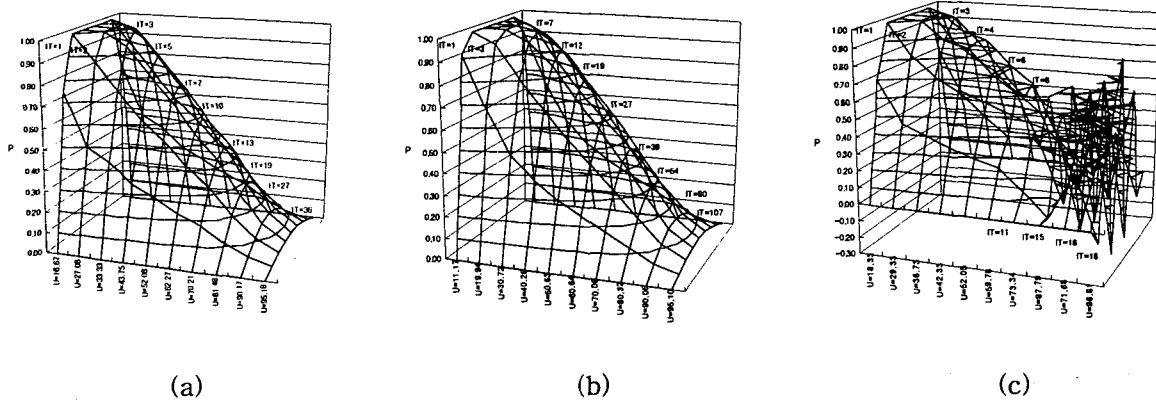


그림 5. 양면배수의 간극수압소산 (a)  $\gamma=1/2$ , (b)  $\gamma=1/6$ , (c)  $\gamma=0.6$

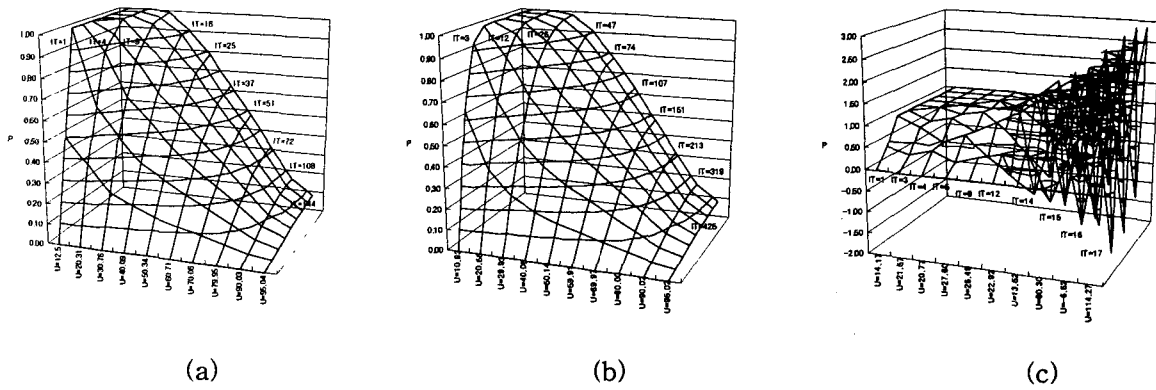


그림 6. 단면배수의 간극수압소산 (a)  $\gamma=1/2$ , (b)  $\gamma=1/6$ , (c)  $\gamma=0.6$

## 4.2 다층토의 압밀해석

프로그램의 적용성을 알아보기 위하여 영국의 Avonmouth 교차로 지역의 시험성토구간을 해석해 보았다. 이 지역의 지층은 포화된 4개의 지층으로 구성되어 있으며 각각 Brown clay(2.1m), Blue clay(2m), Peat(1.1m), Blue grey silt clay(6.7m)로 구성된 연약지반이다. 이 지반에 1:2의 경사로 저폭 67m, 높이 9m의 흙쌓기를 하였다. 또한, 흙쌓기 저폭에는 하층토에 대한 간극수의 배수를 위하여 약 50cm 두께의 사층배수대를 포설하여 양면배수가 되도록 시공하였다.

시험에 사용된 입력 자료는 표 1.과 같다. 그리고, 입력 자료로 프로그램을 해석해 본 결과는 그림 7.과 같다.

표 1. 해석에 입력된 자료

층 번호	두께(cm)	$C_v(m^2/yr)$	$k(cm/s)$
1	210	20	$2 \times 10^{-5}$
2	200	30	$1.5 \times 10^{-4}$
3	110	3.9	$1.6 \times 10^{-5}$
4	670	450	$1.6 \times 10^{-4}$

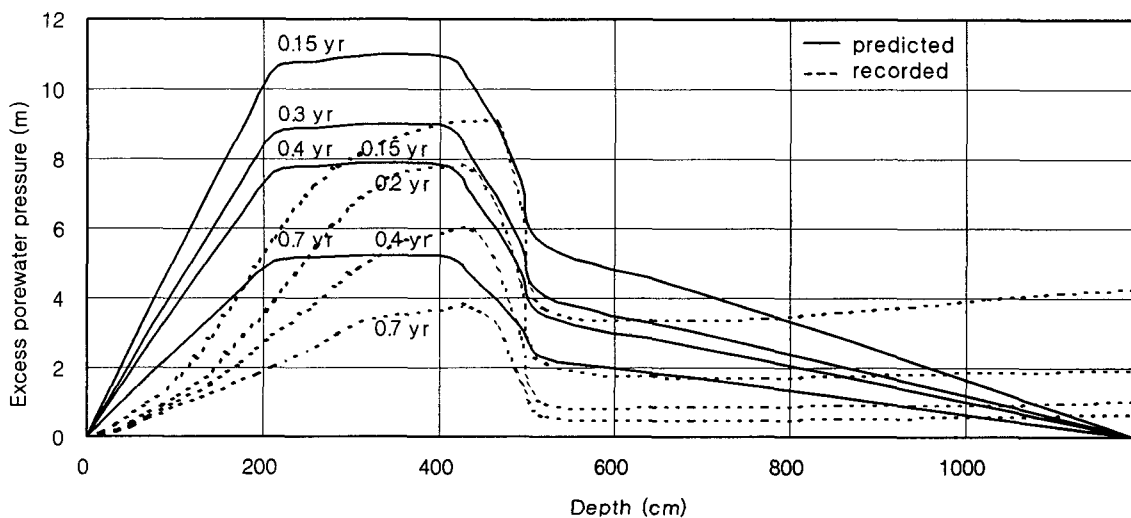


그림 7. 간극수압분포의 계산값과 실측값의 비교

실제 현장조건을 입력하여 실측된 자료와 비교해 본 결과, 경계조건 문제, 선정된 투수계수 및 압밀계수의 오차와 시간에 따른 비선형변화 등을 감안하면 상당히 일치하는 결과를 얻을 수 있었다.

## 5. 결론

본 논문은 다층토 압밀해석을 위해 Explicit Scheme을 이용하였다. layer interface에서의 해석은 각 토층으로부터 간극수의 유출량과 시간에 따른 체적변화율이 같다는 조건으로부터 차분식을 유도하였다. 그리고, 불투수경계층은 가상경계면의 조건을 이용한 차분식으로부터 algorithm을 개발하였고, 실제 현장 자료를 이용하여 프로그램을 실행해 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. Operator ' $\gamma$ '가 0.5이상이면 값은 발산하여 신뢰할 수 없는 값이 된다. 따라서, Operator의 제약으로 time step을 길게하거나  $\Delta z$ 를 크게 할 수 없다. 그러나,  $\gamma=1/6$ 일 경우에는 참값에 빨리 수렴하고 값의 정도(accuracy)가 좋음을 알 수 있다.
2. 실제 현장조건을 입력하여 실측된 자료와 비교해 본 결과, 선정된 투수계수 및 압밀계수의 오차와 시간에 따른 비선형변화 등을 감안하면 상당히 일치하는 결과를 얻을 수 있었다.
3. 본 Scheme은 algorithm이 간단하고 많은 입력 parameter가 필요하지 않기 때문에 현장조건을 쉽게 모델링 할 수 있어 간편하며 실용성 및 경제성이 우수하다. 따라서, 현장조건을 고려한 압밀해석시 매우 효과적인 방법이 될 것이다.

## 참고문헌

1. Braja M. Das(1997), Advanced Soil Mechanics, Taylor & Francis, pp.258-267
2. E. F. Nogotov and B. M Berkovsky(1978), Applications of Numerical Heat Transfer, McGraw-Hill, pp. 22-30
3. Jingde Z., Zhiyoung A. and Huming Z.(1996), "Analytic Solutions of Two-Dimensional and Three-Dimensional Consolidation Problem by Using the Method of Weighted Residuals," Proceeding of second International Conference on Soft Soil Engineering, Vol. 1, pp.193-198
4. Joe D. Hoffman(1993), Numerical Methods for Engineers and Scientists, McGraw-Hill, pp.520-5674.
5. Manuel Casteleiro, Raymond J. Krizek and Tuncer B. Edil(1981), "Mathematical model for one-dimensional desiccation and consolidation of sedimented soils," Int. Jour. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 5, pp.195-215
6. R. F. Craig(1992), Soil Mechanics, Chapman & Hall, pp.243-289