

EFG방법을 이용한 적응적 해석

Adaptive Analysis with the Element-Free Galerkin Method

최창근¹⁾

이계희²⁾

정흥진³⁾

Choi, Chang-Koon

Lee, Gye-Hee

Chung, Heung-Jin

ABSTRACT

In this study, error estimates using the stress projecting scheme and adaptive nodal generation procedure in the element-free Galerkin(EFG) method are proposed. The essence of proposed error estimates is to use the difference between the values of the projected stress and these given directly by the EFG solution. The stress projection can be obtained simply by taking product of shape function based on a different domain of influence with the stresses at nodes. An adaptive procedure based on error estimates is discussed in this paper. By use of background integration cell, adding node scheme at high error norm area is proposed. To demonstrate the performance of proposed scheme, the convergence behavior is investigated for several examples

1. 서론

무요소법(meshless method)은 절점의 추가, 삭제가 용이하기 때문에 h -Type의 적응적 해석으로의 적용에 적합한 방법으로 알려져 있다. 무요소법에서는 절점의 추가 및 삭제에 따른 부가적인 요소망의 구성 및 수정이 필요없기 때문에 유한요소법에 비하여 간편하게 오차가 큰 부분의 정밀도를 높일 수 있다.

무요소법을 이용한 적응적해석법은 여러 연구자들에 의해서 제안되어왔다. Durate와 Oden(1996)은 내부와 Neumann경계에서의 residual을 이용한 오차평가법을 제안하였다. Liu 등(1996)은 wavelet 함수를 이용한 Reproducing Kernel Particle Methods(RKPM)으로 경계탐색

1) 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수

2) 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

3) 전주대학교 토목환경공학과 조교수

(edge detection) 및 오차의 집중점을 찾는 방법을 제시하였다. Haussler-Combe와 Korn(1998)은 형상함수의 2차 미분항을 이용하여 보간시 발생하는 오차를 산정하였다.

본 연구의 목적은 EFG방법을 이용하여 국부 및 전체오차의 산정법을 제안하고 이를 이용하여 EFG문제의 적응적해석을 수행하는데 있다. 오차의 산정은 원 형상함수보다 작은 영향범위를 갖는 형상함수를 이용하여 절점의 응력을 보간하여 임의점의 응력을 산정하고 이 투영응력과 EFG방법에 의하여 계산된 응력간의 에너지norm(energy norm)을 산정하여 수행하였다. 이러한 에너지norm을 이용한 오차평가방법은 기본적으로 Zienkiewicz와 Zhu(1987)가 제안한 오차평가법과 동일하다. 또한 이와 같은 오차평가를 통해 얻어진 오차분포를 이용한 간단한 적응적 해석알고리즘이 제안되었다. 이 적응적해석 알고리즘에서는 수치적분을 위해 작성된 적분cell을 이용하여 고오차 영역에 추가적인 절점을 삽입하므로써 해석의 정밀도를 높이게 된다. 이 과정에서 적분cell과 절점과의 관계는 적분cell과 절점간의 연결정보가 없다는 점을 무시한다면 유한요소의 h -type의 적응법해석법과 유사하게 된다.

2. EFG 근사와 오차평가

EFG방법에서는 임의의 함수 $u(x)$ 를 근사함수 $u^h(x)$ 로 다음과 같이 나타낸다.

$$u^h(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \mathbf{u} = \sum_I \sum_J p_J(x) (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x))_{JI} u_I \equiv \sum_I \phi_I(x) u_I \quad (1)$$

여기서

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{A}^{-1}(x, a) \mathbf{B}(x, a) \mathbf{u} \quad (2a)$$

$$\mathbf{A}(x, a) = \mathbf{p}^T(x_I) w_I(x, a) \mathbf{p}(x_I) \quad (2b)$$

$$\mathbf{B}(x, a) = \mathbf{p}^T(x_I) w_I(x, a) \quad (2c)$$

위의 식에서 n 은 영역 Ω 에서의 절점수이며 $w_I(x, a) = w(x - x_I, a)$ 는 a 값을 변수로 취하는 양의 가중함수이다.

선형탄성문제에 대하여 지배방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{L} \mathbf{u} \equiv \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

여기서 \mathbf{D} 는 재료행렬, \mathbf{S} 는 변형률을 정의하는 미분연산자이다. 이 때 변형률은 다음과 같이 나타낸다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) \quad (4)$$

따라서 EFG방법에 의하여 직접 계산된 응력은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \sum_I^n \mathbf{S}\phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I \quad (5)$$

무요소법에서 형상함수의 도함수는 원 형상함수보다 더 높은 진동수 성분을 가지게 된다. 따라서 위의 식에서 얻어진 응력은 형상함수의 도함수에 의해서 정의되기 때문에 변위보다 높은 진동수 성분을 포함하고 있다. 이러한 가상의 진동수 성분은 특히 응력이 집중되거나 불연속이 발생하는 부분에서 크게 나타난다. 따라서 이러한 응력의 가상진동을 줄여주면 보다 정확한 응력분포를 산정할 수 있으며 이를 위하여 위에서 얻어진 절점응력을 다음과 같이 투영한다.

$$\boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) = \sum_K^l \left\{ \psi_K(\mathbf{x}) \mathbf{D} \sum_I^n \mathbf{S}\phi_I(\mathbf{x}_K)\mathbf{u}_I \right\} = \sum_K^l \psi_K(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}_K) \quad (6)$$

여기서 $\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}_K)$ 는 절점에서의 응력이며 l 은 투영응력의 영향영역내에 있는 절점의 수이다. 위 식에서 각 형상함수는 다음과 같이 나타낸다.

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) \left(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}, a_1) \mathbf{B}(\mathbf{x}, a_1) \right)_{jI} \quad (7)$$

$$\psi_K(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(x) \left(\mathbf{A}_p^{-1}(\mathbf{x}, a_2) \mathbf{B}_p(\mathbf{x}, a_2) \right)_{jK} \quad (8)$$

여기서 (7)식은 EFG의 형상함수이며 (8)식은 투영응력의 형상함수이다. 이 때 투영응력의 형상함수는 EFG형상함수에 비하여 작은 영향영역을 사용한다. 결과적으로 보면 위에서 얻어진 투영응력은 절점의 응력을 원래의 형상함수보다 작은 영향영역을 갖는 또 다른 형상함수로 보간하는 것이다. 따라서 기존의 계산 루틴을 그대로 이용할 수 있으므로 추가적인 많은 노력없이 간단하게 구현할 수 있다. 이후의 오차 평가에 있어서는 이 투영응력을 정확해로 가정한다. 따라서 임의의 점에서의 오차는 다음과 같이 나타낸다.

$$\sigma^e(\mathbf{x}) = \sigma^p(\mathbf{x}) - \sigma^h(\mathbf{x}) \quad (9)$$

임의의 영역에 있어서 오차의 절대량을 평가하기 위하여 에너지norm을 사용한다. 따라서 적분점에서의 에너지 norm은 다음과 같다.

$$\|e(\mathbf{x}_e)\| = \left\{ \frac{1}{2} \sigma^{eT}(\mathbf{x}_e) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}_e) \right\}^{1/2} \quad (10)$$

전체 영역에서의 오차의 에너지 norm은 다음과 같다.

$$\|E\| = \left\{ \frac{1}{2} \int \sigma^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (11)$$

따라서 전체 해석의 상대오차는 다음과 같다.

$$R = \frac{\|E\|}{\|U\|} \quad (12)$$

여기서 전체 해석영역의 에너지 norm은 다음과 같다.

$$\|U\| = \left\{ \frac{1}{2} \int \sigma^T(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (13)$$

각 적분 cell의 오차에너지 norm은 다음과 같다.

$$\|E\|_i = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \sigma^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (14)$$

각 적분 cell당 동일한 오차를 분포시키는 것은 적응적 해석의 목표로 삼으면 각 cell의 오차지수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

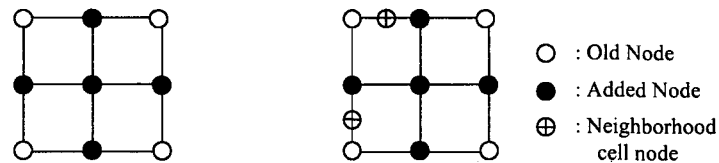
$$\eta_i = \left\{ \frac{\|E\|_i^2}{\|E\| / n_{cell}} \right\}^{1/2} \quad (15)$$

3. 세분화 알고리즘

본 연구에서는 다음과 같은 h -type의 세분화알고리즘을 사용하였다.

- 1) 전체 해석영역에 대하여 식 (12)를 계산하여 상대 오차를 평가한다. 만일 계산된 상대오차가 미리 정한 한계값보다 작다면 해석을 끝낸다.
- 2) (15)식에 의해 각 적분 cell에 대한 국부 오차 지수를 구한다. 이 값이 미리 정한 값에 비해 크다면 이 cell은 세분화대상이 된다.
- 3) 세분화가 수행되어야 할 적분cell은 다음과 같은 과정을 거친다.
 - a) 그림 1. (a)와 같이 절점을 추가한다.
 - b) 추가된 절점에 대하여 이웃 cell의 절점과 중복되지 않는 지를 검사한다.
 - c) 중복되지 않는 절점에 대하여 경계조건을 부여한다.

유한요소를 이용한 해석에 있어서는 각 요소의 절점수는 미리 정해져 있다. 따라서 h -type의 적응적 해석시 요소의 발생은 이러한 요소의 절점수에 제약을 받게된다. 전이요소를 이용한 해석에 있어서는 좀 더 유연한 요소망을 구성할 수 있지만 이러한 요소망을 구성하는 제약이 없어지는 것은 아니다. 그러나 무요소법에 있어서 적분cell은 오직 수치적분만을 위해 사용되므로 임의의 절점배치도 모두 허용된다. 그림 1. (b)에서 볼 수 있는 절점의 배치는 유한요소의 경우 허용되지 않는 요소망이다.



(a) 절점의 추가 방법 (b) 임의의 절점배치

그림 1. 적응적 해석을 위한 세분화

4. 수치에제

본 연구에서 제안된 오차평가 방법과 세분화 알고리즘의 효율성을 보이기 위해 2개의 선형탄성 수치에제를 해석하였다.

4.1 Near-tip crack

이 예제는 균열의 주위에서 발생하는 응력 및 변형에 대한 문제로 다음과 같은 정확해가 알려져 있다.

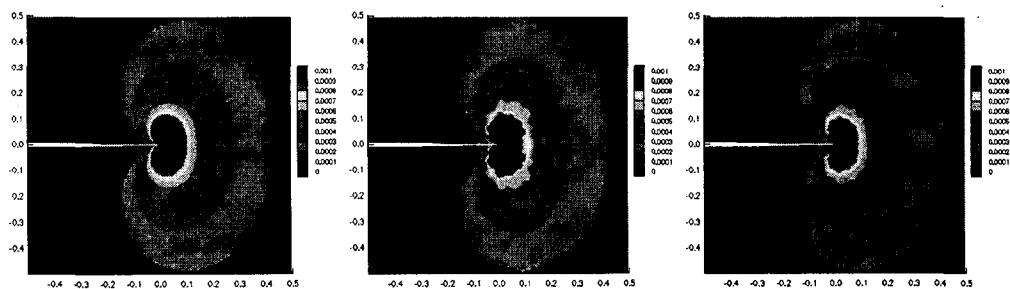
$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (16)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (17)$$

본 연구에서는 위의 정확해에 의해서 구해진 변위를 균열선단을 중심으로한 1x1의 정사각형 영역의 경계를 따라서 변위하중으로 부여하였다. 위 식에서 K_I 값은 1.0을 사용하였다.

영향영역의 크기는 절점으로부터 가장 가까운 인접절점의 거리를 기준으로하여 산정하였으며 EFG해석의 경우에는 최소거리의 2.5배, 응력의 투영시에는 최소거리의 1.5배를 영향영역의 반경으로 하였다. 이 때 얻어진 에너지 놈의 분포는 그림 2에서 보이는 바와 같다.

본 연구에서 제안된 적응적해석방법의 효율성을 보이기 위해 동일한 문제에 대해 적응적 절점 분포를 가진 모델과 균일한 절점분포를 가진 모델에 해석을 수행하여 그 결과를 비교하였다. 이 때 적응적해석을 수행하기 위해 사용된 목표 상대오차는 5%이며 cell세분화의 기준이 cell의 오차 지수는 10%를 사용하였다. 이상과 같은 조건에서 단계별 세분화된 해석모델은 그림 3에서 보는 바와 같다. 이 때 세분화는 응력이 집중되는 균열의 선단에서 집중적으로 일어난다. 균일한 절점 분포를 가진 모델과의 수렴도는 그림 5(a)에서 비교하였다. 이 그림에서 보는 바와 같이 세분화 단계가 계속될 수록 적응적해석의 효율성이 두드러지게 나타남을 볼 수 있다. 이 수렴도 곡선에서 처음의 2단계 수렴곡선은 동일하게 나타나는데 이는 그림 3에서 보는 바와 같이 첫 번째 세분화 단계에서 모든 cell이 세분화되었기 때문이다.



(a) 정확해

(b) EFG에 의한 해

(c) 투영에 의한 해

그림 2. 에너지 놈의 분포

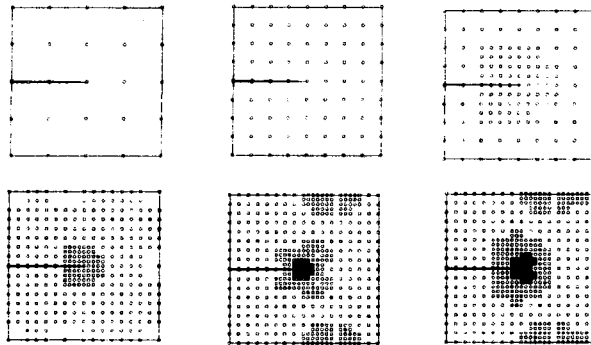


그림 3. Near-tip Crack예제의 세분화과정

4.3 Edge 균열문제

이 예제는 Edge 균열문제로 영향영역의 크기는 EFG해석의 경우에는 최소거리의 2.5배, 응력의 투영시에는 최소거리의 1.8배를 영향영역의 반경으로 하였다. 이 때 사용된 목표상대오차는 10%이다. cell의 오차지수는 15%이다. 단계별 세분화 과정은 그림 4에서 보는 바와 같다. 이 그림에서는 적분cell의 세분화과정을 보였다. 이 예제의 수렴곡선은 그림 5(b)에서 보는 바와 같다.

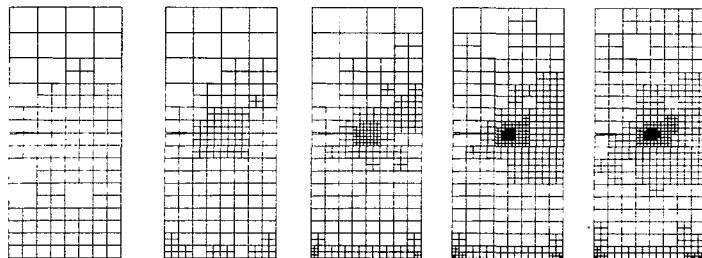


그림 4. Edge Crack의 세분화과정(적분cell)

5. 결론

본 연구에서는 EFG방법을 이용한 국부 및 전체 오차 평가방법과 이를 이용한 적응적해석알고리즘을 제시하였다. 본 연구에서 제안된 오차 평가 방법은 원 EFG해석에서 사용된 형상함수보다 작은 영향영역을 갖는 또다른 형상함수를 이용하여 절점의 응력을 보간하여 정확해에 가까운 응력분포를 얻고 이를 이용하여 오차를 산정하는 것이다. 적응적 해석알고리즘은 적분cell을 이용하여 절점을 배치하는 과정으로 세분화가 진행됨에 따라 cell도 따라서 세분화되며 이 때 cell의 꼬지점에 절점을 배치하는 것이다.

2가지 수치예제를 통해 제시된 방법의 효율성을 입증하였다. 균일한 절점분포를 가진 해석모델과 비교한 결과 제시된 방법에 의한 적응적해석은 모델의 크기가 커질수록 그 효율성이 증대되는 것을 알 수 있었다.

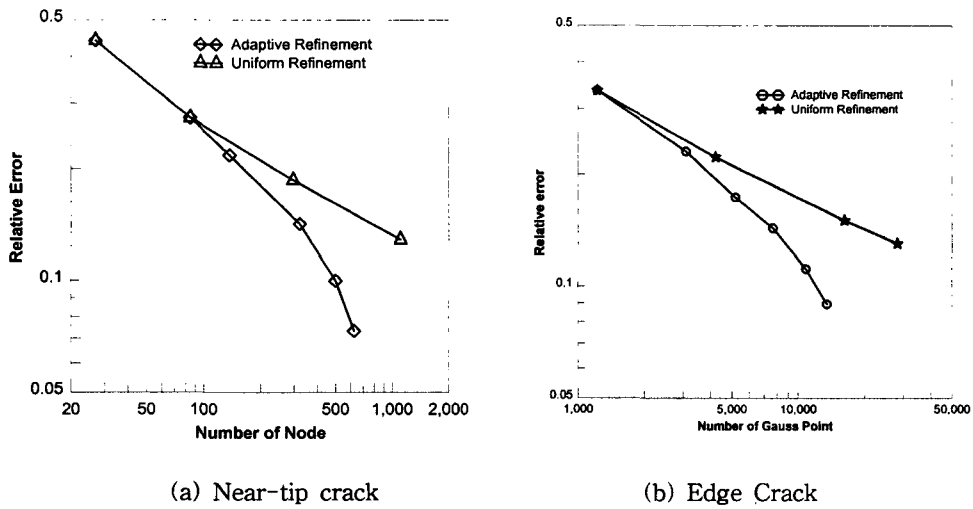


그림 5. 수치예제의 수렴곡선

참고문헌

1. Choi, C. K. and Park, Y.M.(1989), Nonconforming transition element plate bending elements with variable mid-side nodes, *Comp. and Struct.*, **32**(2), 295-304
2. Belytschko, T., Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming and P. Krysl (1996b). Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139**, 3-47.
3. Duarte, C. A. and J. T. Oden (1996). An hp Adaptive Method Using Clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139**, 237-262.
4. Hausser-Combe, U. and Korn, C. (1998), An adaptive approach with the EFG method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **162**, 203-222.
5. Chung,, H. J. and Belytschko, T.(1998). An error estimate in the EFG method. *Computational Mechanics* **21**, 91-110.