

래티스 돔의 다분기 해석을 위한 알고리즘에 관한 연구

A Study on the Algorithm for Multiple Bifurcation of Lattice Domes

윤 한 흠* 이 갑 수* 한 상 을**
Yoon, Han-Heum Lee, Kap-Soo Han, Sang-Eul

ABSTRACT

This paper discusses the theoretical researches subject to elastic buckling problems of the structures. The purpose is to ensure the characteristic of buckling be true by arc-length method and the finite element method. The difficulties in processes calculating the equilibrium curve after buckling is to get the equilibrium curve near singular point at which the determinant of stiffness matrix is zero. The purpose of the load-displacement curve is to determine the buckling load of the structure, and further to get the information about the characteristic after buckling.

Here, this paper expresses the incremental solution at particular point by the linear combination of both homogeneous mode and particular mode, then uses the method which gets the unknown parameter including this function, through trial-and-error method including modified N-R convergence process. Finally, this paper describes the multiple bifurcation of truss dome as the numerical examples according to this algorithm.

1. 서 론

본 논문은 보존계에 있는 탄성 래티스 돔 구조물의 좌굴점과 좌굴 후의 평형 경로, 특히 다분기 경로를 기하학적 비선형 해석을 통해 탐색하는 것을 그 목적으로 하고 있다. 래티스 돔의 안정해석을 위한 기하학적 비선형 수치 계산을 위해서는 일반적으로 N-R 법이나 수정 N-R 법이 사용되었다. 이 방법들은 극한점 이전의 평형경로에서는 정확한 수렴성을 보이고 있지만, 극한점을 지나 하중이 감소하는 즉, 동적 스냅(dynamic snap) 거동이 발생할 경우 위의 해석법은 그 한계를 나타내고 있다. 따라서, 새로운 해석법의 적용이 요구되고 있으며, 이러한 의미에서 선형 호장법은 안정 문제의 해석에 매우 유용하며, 어떠한 경로의 추적도 가능한 방법으로 알려져 있다. 또한, 근래에 세계적인 추세도 N-R 법이 아닌 호장법에 의해 평형경로를 추적하며, 호장법이 없이는 좌굴 이후의 다양한 경로를 추적하는 것이 매우 어려운 실정이다.

본 논문에서는 호장법을 이용하여 좌굴 이전의 기본경로 및 극한 좌굴점, 좌굴 이후의 평형경로를 계산하는 수치해석 알고리즘을 정립하고, 더 나아가 극한 좌굴점 이전에 일어나는 분기 특히 다분기점(multiple bifurcation points)의 탐색 및 좌굴 후의 거동특성을 규명하고자 한다.

2. 수렴 판정(Convergence Criterion)

비선형문제를 해석하기 위해서는 반드시 반복과정(iteration process)을 사용하여 예측자-수정자 법

* 인하대학교 건축공학과 석사과정

** 인하대학교 건축공학과 교수

(predictor-corrector method)에서 수정자 단계(corrector step)의 해를 구해야 한다. 앞에서 언급한 바와 같이, 이 논문에서는 수정자 단계를 수정 N-R 법에 의해 수행한다. 이 반복과정을 수행하기 위해서는 임의의 허용오차(tolerance)를 이용한 수렴을 판단하는 규정이 있어야만 한다. 여기에서는 판정식으로 크리스펠드¹⁾의 제안식을 사용한다.

$$\|g\| < \beta \|a_e\| \quad (1)$$

$\|g\|$ = 불평형력의 놈(norm)

$\|a_e\|$ = 초기 입력 데이터에서의 하중모드

식(1)은 평형경로 상에서 정확한 해에 어느 정도의 오차를 가지고 근접하느냐를 의미하며, 그 오차한계(β)를 0.01 ~ 0.001로 주는 것이 일반적이다. 이 β 의 값을 얼마로 주느냐에 따라 반복과정에서의 수렴시간을 조절할 수 있다. 래티스 등의 경우, 이 값을 크게 주면 반복과정이 1 ~ 2회 정도로 수치해석 시간에 있어서 유리하지만 정해와는 많은 오차가 필연적으로 발생하며, 반대로, 너무 작게 주면 정해와 아주 가까운 해를 얻을 수 있으나 반복회수가 10 ~ 20회가 되어 해석 시간이 증가하게 된다. 따라서, 이 논문에서는 β 를 0.05로 하여 양쪽을 모두 만족할 수 있게 하였다.

3. 분기점(bifurcation point)의 판단기준

기본경로를 추적해 나가는 과정에서 극한점 이전에 하나 이상의 임계점이 발생하는 경우가 있다. 따라서, 이 경우에는 극한점 이전의 특이현상을 판단할 수 있는 판단기준이 필요하게 된다.

다음의 식은 비선형 방정식을 나타낸다.

$$K d - p a_e = 0 \quad (2)$$

d 는 증분변위이고, p 는 하중 매개변수이며 a_e 는 입력 데이터에서 주어진 하중모드이다. 위 식의 양변에 임계점에서의 고유벡터 ϕ_1 을 곱하고, $K \phi_1 = 0$ 이라는 것을 고려하면, 식(2)는 다음과 같이 된다.

$$p \phi_1^T a_e = 0 \quad (3)$$

식(3)으로 다음의 두 가지 가능성을 예상할 수 있다.

$$\phi_1^T a_e \neq 0, \quad p = 0 \quad (4)$$

$$\phi_1^T a_e = 0 \quad (5)$$

위의 두 식은 각각 극한점과 분기점이 일어남을 의미하며, 호장법에서의 또 다른 분기 판정식은 다음과 같다.

$$|K_{N+1}| = 0 \quad (6)$$

$$|K_N| \neq 0 \quad (7)$$

1) 참고문헌 6

위의 식에서 K_{N+1} 은 호장강성을 의미하며, K_N 은 일반강성을 의미한다.

4. 분기점에서의 증분 평형방정식의 해

3장에서 언급된 증분평형방정식 (2)를 행렬식으로 나타내면 다음과 같으며,

$$[K]\{d\} - p\{a_e\} = \{0\} \quad (8)$$

또한, 식(8)은 첫 번째 임계점에서 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \overline{K}^T \\ \overline{K} & \widehat{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \overline{d} \end{bmatrix} - p \begin{bmatrix} a_{e1} \\ \overline{a_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{0} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기에서, $\overline{}$ 는 1행 또는 1열을 삭제한 벡터를 나타내며, $\widehat{}$ 은 1행과 1열을 삭제한 매트릭스를 나타낸다.

식(8)의 해는 강성 매트릭스가 정칙(non-singular)이나 특이(singular)냐에 따라 다음의 두 가지 경우를 갖는다.

[1] 강성 매트릭스가 정칙인 경우
이 경우에 행렬식은 다음과 같이 된다.

$$Det[K] \neq 0 \quad (10)$$

따라서, 증분평형방정식의 해는 식(8)에 의해 다음과 같이 된다.

$$\{d\} = [K]^{-1}p\{a_e\} \quad (11)$$

[2] 강성 매트릭스가 특이인 경우
식(9)에 의해 다음과 같이 된다.

$$K_{11} d_1 + \{\overline{K}\}^T \{\overline{d}\} - p a_{e1} = 0 \quad (12)$$

$$\{\overline{K}\} d_1 + [\widehat{K}]\{\overline{d}\} - p\{\overline{a_e}\} = \{\overline{0}\} \quad (13)$$

위의 두 경우에서, 본 논문에서 필요로 하는 특해모드를 구할 수 있고 이 특해모드와 동차모드(고유벡터)의 선형조합으로 임계점에서 분기방향으로의 증분해를 구할 수 있다.

5. 분기경로의 추적

4장에서 언급한 것과 같이 동차모드와 특해모드의 선형조합에 의해 분기경로의 추적 방향은 다음과 같다.

$$x_{II} = \phi_1 + \alpha x_I \quad (14)$$

x_I 과 x_{II} 는 정규화된 벡터이기 때문에 다음의 식(15)와 같이 된다.

$$\|x_I\| = \|x_{II}\| = 1 \quad (15)$$

그리고, 직교조건을 이용하면 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{x}_I^T \mathbf{x}_{II} = 0 \quad (16)$$

식(14)의 양변에 \mathbf{x}_I^T 를 곱하면 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{x}_I^T \mathbf{x}_{II} = \mathbf{x}_I^T \boldsymbol{\phi}_I + \alpha \mathbf{x}_I^T \mathbf{x}_I \quad (17)$$

위 식의 좌변은 0이 된다. 따라서, α 는 다음과 같이 된다.

$$\alpha = - \frac{\mathbf{x}_I^T \boldsymbol{\phi}_I}{\mathbf{x}_I^T \mathbf{x}_I} \quad (18)$$

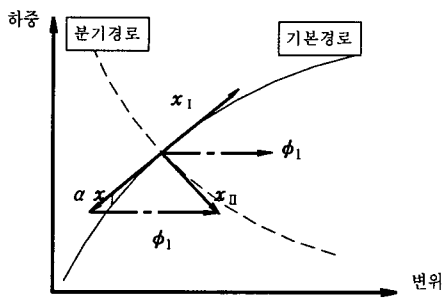


그림 1. 분기방향의 추적

그림 1은 이 장에서 설명한 수식들을 간단히 보여준다. 이 방법 외에도 Riks가 제안한 분기추적 방향이 있으나 이 논문에서는 다루지 않으며, 다만, 같은 결과가 나오음을 확인했다. 고유벡터인 $\boldsymbol{\phi}_I$ 의 방향은 변위 방향과 평행하게 진행하므로 대칭분기에서 분기추적 방향은 두 모드의 선형조합 과정이 필요없이 고유벡터를 이용하면 쉽게 분기방향을 추적할 수 있다.

6. 구형 호장법 (Spherical Arc-Length Method)

본 논문에서는 또한 구형 호장법과의 비교를 통해 해석결과의 타당성을 확인한다. 다음은 불평형력에 의한 평형방정식을 나타낸다.

$$\mathbf{g}(\mathbf{d}, p) = \mathbf{q}_i(\mathbf{d}) - p \mathbf{q}_e = 0 \quad (19)$$

위 식은 평형경로 상에서 불평형력이 0이 되어야만 수렴이 된다는 것을 의미하며, 여기서 \mathbf{q}_i 는 내력을 나타낸다.

$$s = \int ds \quad (20)$$

$$ds = \sqrt{(\mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{d} \mathbf{d} + dp^2 \mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_e)} \quad (21)$$

그리고, 식(21)의 양변을 제곱하면 다음과 같이 된다.

$$ds^2 = \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{d} \mathbf{d} + dp^2 \mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_e \quad (22)$$

위 식에서 ds 를 Δl 로 놓으면 이것은 얻고자하는 교차점의 고정된 반경이 된다. 식(22)를 a 로 표현하면 다음의 식이 된다.

$$a = \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{d} \mathbf{d} + dp^2 \mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_e - \Delta l^2 \quad (23)$$

식(19)는 d 와 p 의 함수이므로 테일러 급수의 선형항만을 고려하여 다시 쓰면 다음의 식이 된다.

$$g_n = g_0 + \frac{\partial g}{\partial d} \delta d + \frac{\partial g}{\partial p} \delta p \quad (24)$$

그리고, 마찬가지로 식(23)도 테일러 전개하면 다음과 같다.

$$a_n = a_0 + 2\Delta d^T \delta d + 2\Delta \lambda \delta \lambda q_e^T q_e \quad (25)$$

따라서, 식(24)와 (25)를 행렬형태로 쓰면, 다음의 호장강성이 만들어 진다.

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K & -q_e \\ 2\Delta d^T & 2\Delta p q_e^T q_e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta d \\ \delta p \end{pmatrix} \quad (26)$$

여기서 아래 첨자 0 은 전 단계의 값을 의미한다. 이 구형 호장법을 이용하여 얻은 결과는 8 장의 수치해석 예제에서 선형 호장법과 비교될 것이다.

7. 다분기경로 탐색을 위한 수치해석 알고리즘

래티스 돔은 하중 조건이나 지점 조건 등에 따라 다르겠지만 일반적으로 스냅스루(snap-through)현상이 발생한다. 따라서, 하중 변위 곡선에는 극한점이 존재하게 되며, 이 극한점에서의 하중이 대개 좌굴하중이 된다. 그러나, 이 경우는 극한점 이전에 임계점이 존재하지 않을 경우 가능한 것이며, 대개의 래티스 돔은 극한점 이전에 이미 하나 이상의 임계점이 존재하게 된다. 본 장에서는 극한점 이전에 임계점이 하나 이상 존재할 경우 이 임계점들을 탐색하고, 또한 임계점에서의 분기방향을 추적한다. 이렇게 임계점이 하나 이상 존재하는 경우를 다분기 현상이라 하며, 해석방법은 다음과 같다.

다분기 해석을 수행하기 위해서는 먼저 임계점의 위치와 개수를 확인해야 하며, 본 논문에서는 이를 위해 고유값의 변화를 추적한다. 그리고, 그 위치가 확인된 후에는 다시 기본경로를 추적하면서 임계점에 도달했을 때 식(9)를 다음 식과 같이 변형시켜 강성 매트릭스를 축약한다.

$$\begin{bmatrix} K_n & \bar{K}^T \\ \bar{K} & \hat{K} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_n \\ d \end{pmatrix} - p \begin{pmatrix} q_{en} \\ q_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

여기서 첨자 n 은 부정차수(negative pivot)의 개수이며, 만약 첫 번째 임계점에서 하나의 분기경로가 나온다면 이 부정차수의 개수는 1 이고, 두 번째 임계점에서 2개의 분기경로가 나온다면, 첫 번째 경로에서 부정차수는 2, 두 번째는 3이 되는 것이다. 그리고, 임계점에서 축약된 강성 매트릭스에서 특해모드를 구해 동차모드와 선형조합을 통해 증분해를 얻는다.

8. 수치적 예제

지금까지 설명된 이론을 근거로 본 장에서는 간단한 트러스 돔을 해석모델로 하여 그 결과를 비교한다. 먼저, 본 논문의 신뢰성을 확인하기 위해 후지(Fuji)²⁾의 논문에 제시된 스타돔(star dome)의 다분기 형상을 그림 4에서 비교하기로 한다. 그림 4에서는 또한 선형 호장법과 구형 호장법에 의해 해석한 결과를 비

2) 참고문헌 1

교하고 있다. 후자의 논문결과와 거의 일치하였고, 선형 호장법과 구형 호장법의 비교 결과, 세 번째 분기 경로에서 약간 오차를 보이고 있지만 다른 분기경로는 오차가 거의 없음을 확인하였다.

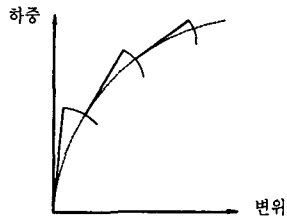


그림 2. 구형 호장법

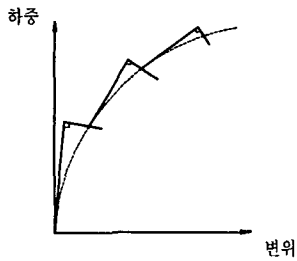


그림 3. 선형 호장법

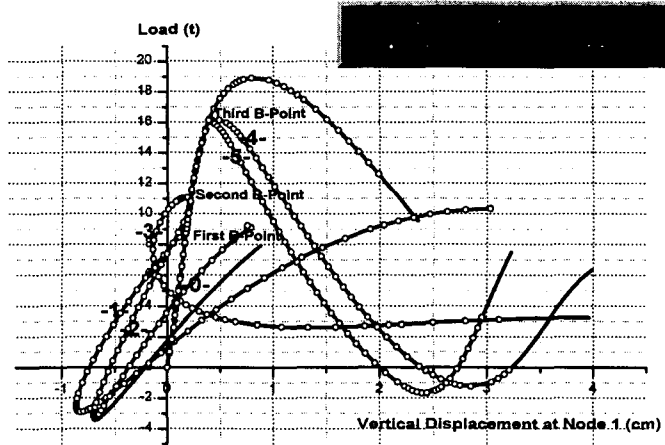
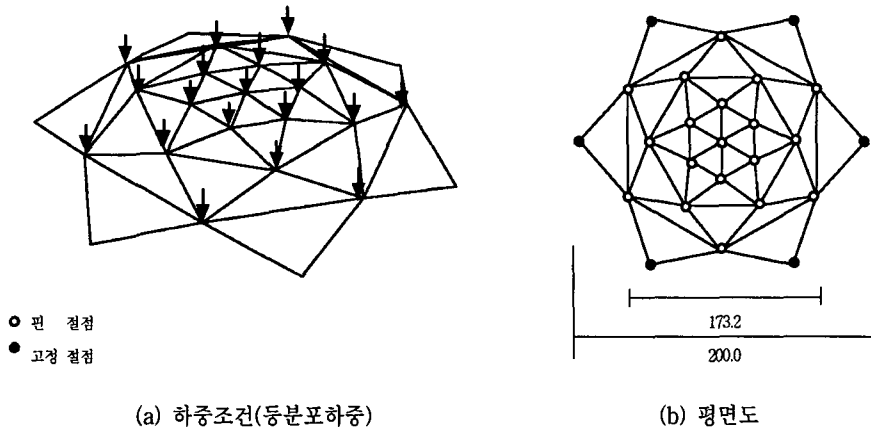


그림 4. 스타 돔의 다분기 형상 및 선형 호장법과 구형 호장법의 비교

그림 4 에서 분기경로 위에 쓰여진 숫자는 부정차수(negative pivot)의 개수를 나타낸다. 따라서, 위의 해석결과로부터 본 논문에서 제안한 수치해석 알고리즘인 선형 호장법의 유효성이 입증되었다.

그림 5는 본 논문에서 사용되고 있는 수치해석 모델을 보여주고 있다.



(a) 하중조건(등분포하중)

(b) 평면도

그림 5. 해석 모델

그림 5에서 보여진 하중 모델에서 하중모드는 각각의 자유도에서 단위 하중인 $-1(t)$ 이다.

그림 6은 그림 5에서 보여진 수치적 예제를 해석한 결과를 보여준다. 선형 호장법으로 해석한 결과로 임계점은 총 3개가 나왔으며 세 번째 임계점에서는 동시에 두 개의 분기가 일어났음을 보여주고 있다. 그림 7은 3차원 다분기 형상을 나타낸다.

그림 9는 선형 호장법과 구형 호장법의 해석결과를 비교한 것이다. 스타 돔의 경우는 두 번째 분기경로에

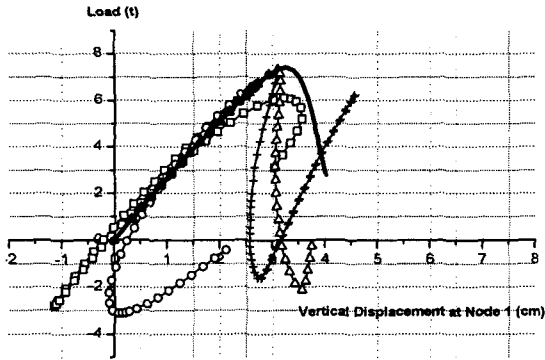


그림 6. 다분기 형상

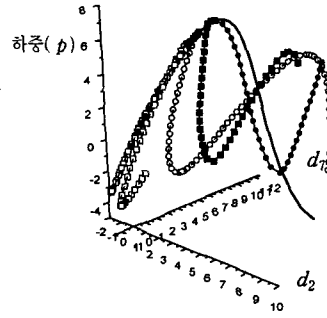


그림 7. 3차원 다분기 형상

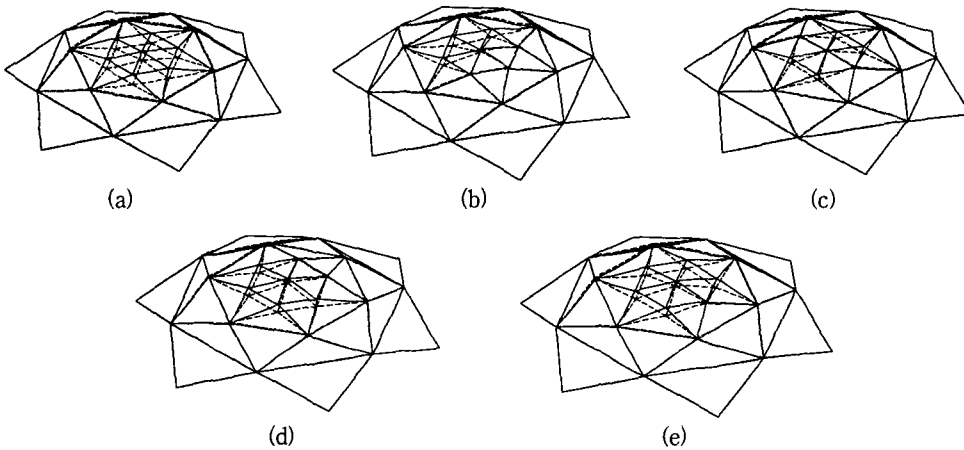


그림 8. 기본경로 및 분기경로에서의 모델형상 ; (a) 기본경로 (b) 첫 번째 분기경로 (c) 두 번째 분기경로 (d) 세 번째 분기경로 (e) 네 번째 분기경로

서 약간의 차이가 있었으나 본 모델에 대해서는 첫 번째 분기경로에서 약간의 차이를 보였다. 그러나, 전체적으로 거의 오차없이 매우 유사하게 나타나고 있음을 확인할 수 있었다.

그림 10은 지점 중 하나의 절점을 5cm 만큼 높게 하여 기하학적인 불완전을 가했을 때의 분기를 나타내는 형상이며, 이 때는 기본경로가 완전한 스냅스루 현상을 보이지 않고 그림 6의 1차 분기방향과 거의 유사한 형태로 나타났다.

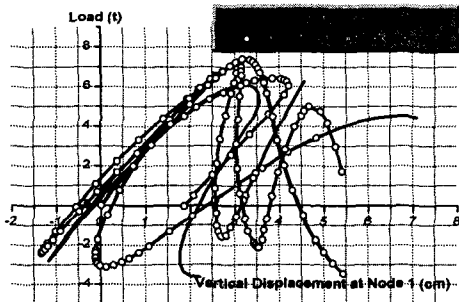


그림 9. 구형 호장법과의 비교

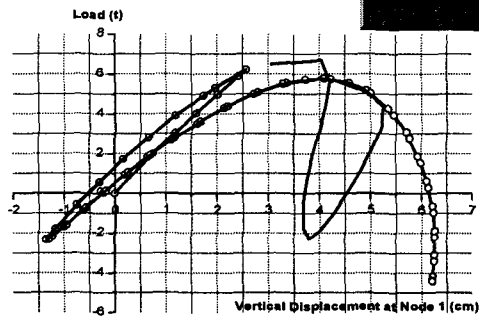


그림 10. 초기불완전을 갖는 돔의 다분기 형상

9. 결 론

극한점 이전에 일어날 수 있는 임계점을 탐색하고 그 임계점에서의 분기경로를 찾기 위해서는 정확한 수렴 판단조건과 분기 판단조건이 필요하다. 올바른 판단조건은 단지 정확한 해를 찾는 것도 중요하지만 수렴의 속도나 시간의 절약적인 측면에서도 대단히 중요한 문제이다. 또한 제어 매개변수의 올바른 선택과 적용은 시간의 절약과 정해에 더 가까운 해를 찾는 데 중요한 요소로 부각될 것이다. 본 논문에서는 가능한 정확도와 시간을 모두 고려하여 비교적 짧은 시간 안에 해석을 수행할 수 있었다. 그리고, 단지 분기경로 만이 아니라 분기 후 모델의 형상을 검토하여 실제 시공상 이를 해결할 수 있는 자료를 제공하였다고 사료된다.

10. 참고문헌

1. Fujii, F. and K.K. Choong, "Branch-Switching in Bifurcation of Structures", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 118, No. 8, 1992, pp. 1578-1596.
2. Hosono, T. (1976 a). "Analysis of elastic buckling problem by arc-length method (Part 1 : The nature of incremental solution at the buckling point)." *Trans., Architectural Institute of Japan*, 242, 41-49.
3. Fujii F. and Asada K. "Branch-Switching in Simple Spatial Bifurcation Models", *SEIKEN-IASS Symposium on Non-Linear Analysis and Design for Shell and Spatial Structures*, Oct. 19-22, 1993, Tokyo, Japan.
4. Thompson J.M.T. and Hunt G.W. "A General Theory of Elastic Stability", 1973, Chapter 3, John Wiley & Sons.
5. Riks E. "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", *Int. journal. Solids Structures*, 1979, Vol. 15, 529-551
6. Crisfield M.A. "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", 1997, Vol. 1, Chapter. 2 and 9, John Wiley & Sons.
7. Fujikake M.A. "A Simple Approach to Bifurcation and Limit Point Calculations", *Int. J. for Numerical Mechanics in Engineering.*, 1985, Vol. 21, 183-191.
8. Crisfield M.A., "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-through", *Comp. Struct.* 13, 55-62(1981).
9. Ramm E., "Strategies for Tracing Non-linear Responses near Limit Points", in *Non-Linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics* (Eds. W. Wunderlich, E. Stein and K. J. Bathe), Springer-Verlag, New York, 1981, pp.68-89.