

## 제한조건을 갖는 케이블-네트 구조물의 형상결정에 관한 연구

### A Study on Shape Determination of Cable-Net Structures with Restrained Conditions

이 장 복<sup>1)</sup>      권 택 진<sup>2)</sup>      하 창 우<sup>3)</sup>  
Lee, Jang-Bog      Kwun, Taek-Jin      Ha, Chang-Woo

#### ABSTRACT

As part of the conceptual design of cable and membrane structures, the adequate shape is decisive with respect to load bearing behaviour and aesthetic expression of the structure. The force densities which are the force-length ratio are very useful parameters for the description of equilibrium state of any general cable-net structures. Because equilibrium states are obtained by solving linear equations the force density method has a advantage compared with other solution strategies. But if there are further restrained conditions in force density the linear method will be extended to nonlinear one. The numerical methods are based upon least square and general inverse method for solving nonlinear equations. In this paper, the results from two methods is compared through several examples.

#### 1. 서    론

구조엔지니어가 구조 설계를 하기 위해서는 건축가가 제안한 형태를 이용하는 것이 일반적인 방법이다. 그러나 막이나 케이블 구조물에서는 휨이나 압축에 저항하지 못하는 재료를 사용하기 때문에 형상해석이라는 특별한 과정을 수행하여야 한다. 이러한 형상해석은 구조물의 초기평형 형상을 찾는 것으로서 지금까지 다양한 방법들이 제안되어 왔으며 대표적인 것들은 유한요소법, 내력밀도법(Force density method), 동적이완법(Dynamic relaxation method) 등이 있다.<sup>1) 2) 3)</sup> 그 중에서 Schek에 의해 제안된 내력밀도법은 하중을 길이로 나누어 내력밀도라 정의하고 변형도-변위에 관한 비선형방정식을 선형방정식으로 변환함으로써 간편하게 초기평형 형상을 구할 수 있는 장점이 있다. 이것은 기하비선형을 고려한 유한요소법에 비해 선형방정식을 사용하여 평형상태를 구하기 때문에 수렴성이 보장되고 빠른 시간에 설계자에게 케이블이나 막구조물의 형상개념을 설명하는 유용한 방법이 되고 있다. 그러나 형상해석시 경우에 따라 일정한 부재의 길이나 하중을 제한함으로써 설계자가 원하는 형상에 근접한 형태를 보다 쉽게 얻을 수 있고 응력-변형해석 시에는 외력에 대한 압축부재를 없애기 위한 방법으로 이용할 수 있기 때문에 제한 조건을 고려한 내력밀도법을 사용해야 하는 경우가 발생하게 된다.<sup>4)</sup>

따라서 본 논문에서는 내력밀도에 관한 수학적 배경을 살펴보고 제한조건을 고려한 내력밀도법의 이론을 정식화 해본다. 정식화 방법으로 라그랑지 인수(Lagrange multiplier)를 이용하는 경우와 일반역행렬(Generalized

1) 정회원, 성균관대학교 건축공학과, 박사과정  
2) 정회원, 성균관대학교 건축공학과 교수, 공학박사  
3) 성균관대학교 건축공학과, 석사과정

invers matrix)을 이용한 두 가지 방법을 사용하여 해석을 수행하며, 예제를 통해 내력밀도에 관한 물리적 의미와 제한조건에 따른 형상의 변화를 비교·고찰하고자 한다.

- $l^0 = (l_1^0, l_2^0, \dots, l_n^0)$  : 초기 부재길이 벡터
- $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  : 부재의 인장력 벡터
- $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  : 하중  $s$ 에 의해 발생하는 변형도 벡터
- $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$  : 변형 후 두절점 사이의 거리 벡터
- $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  : 절점력 벡터
- $x = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_h, y_h, z_h)$  : 절점 좌표벡터
- $h = (E_1 A_1, E_2 A_2, \dots, E_n A_n) = (h_1, h_2, \dots, h_n)$  : 탄성계수 벡터
- $L^0, L, H, \dots, S$  :  $l^0, l, h, \dots, s$  등의 대각 매트릭스

1.1. 수학적 배경

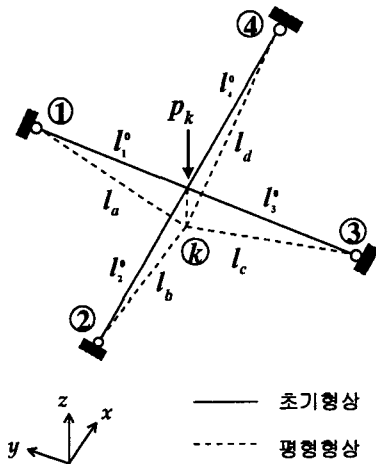


그림 1. 평형형상에 관한 예

그림 1을 참조하여 형상해석에 필요한 기본 방정식을 살펴보면 다음과 같은 3개로 표현할 수 있다.

(1) 응력-변형도 관계식

$$e_i = \frac{l_i^0}{E_i A_i} s_i, \quad e = L^0 H^{-1} s \quad \text{또는} \quad s = H L^{0^{-1}} e \quad (1)$$

(2) 변형도-변위 관계식(절점변위)

$$l_a = \sqrt{(x_1 - x_k)^2 + (y_1 - y_k)^2 + (z_1 - z_k)^2}$$

$$l_b = \sqrt{(x_2 - x_k)^2 + (y_2 - y_k)^2 + (z_2 - z_k)^2}$$

$$l_c = \sqrt{(x_3 - x_k)^2 + (y_3 - y_k)^2 + (z_3 - z_k)^2}$$

$$l_d = \sqrt{(x_4 - x_k)^2 + (y_4 - y_k)^2 + (z_4 - z_k)^2}$$

$$(l^0 + e) = l^1 = f(x) \quad (2)$$

(3) 평형 방정식(절점-하중)

$$\frac{x_1 - x_k}{l_a} s_a + \frac{x_2 - x_k}{l_b} s_b + \frac{x_3 - x_k}{l_c} s_c + \frac{x_4 - x_k}{l_d} s_d = P_x$$

$$\frac{y_1 - y_k}{l_a} s_a + \frac{y_2 - y_k}{l_b} s_b + \frac{y_3 - y_k}{l_c} s_c + \frac{y_4 - y_k}{l_d} s_d = P_y \quad (3)$$

$$\frac{z_1 - z_k}{l_a} s_a + \frac{z_2 - z_k}{l_b} s_b + \frac{z_3 - z_k}{l_c} s_c + \frac{z_4 - z_k}{l_d} s_d = P_z$$

윗 식을  $f(x)$ 에 관한 야코비안 매트릭스를 이용하여 표현하면 (3)식과 같이 된다.

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T s = p \quad (4)$$

(4)식에 (1),(2)식을 대입하면 새로운 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathbf{H} \mathbf{L}^0{}^{-1} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^0] = \mathbf{p} \quad (5)$$

(5)식은 변형 후 절점좌표  $\mathbf{x}$ 에 관한 방정식으로 내력하중( $\mathbf{s}$ )가 형상에 의존하게 되어 비선형 방정식이 된다. 따라서  $\mathbf{x}$ 에 관한 초기값  $\mathbf{x}_0$ 를 설정하여 Newton-Raphson 법과 같은 수치해석 기법을 이용하여 평형 형상을 구해야 한다. 이러한 방법은 유한요소법의 기하비선형을 이용한 법과 마찬가지로 수렴에 대한 보장이 없기 때문에 많은 시간과 노력을 필요로 하게 되며 평형형상을 구하지 못하는 경우가 종종 발생하게 된다.

## 2. 내력밀도의 정식화

케이블 넷 구조물에 관한 연결정보를 표현하기 위해 절점-부재 행렬  $\mathbf{C}$  (Incidence Matrix)를 사용하면 야코비안 식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T = \mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1} \quad (6)$$

따라서 변형 후 평형방정식 (4)는 (7)식과 같이 된다.

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1}) \mathbf{s} = \mathbf{p} \quad \mathbf{U} : \text{절점변위에 관한 대각행렬} \quad (7)$$

여기서 내력밀도( $\mathbf{q}$ )에 관한 정의를 (8)식과 같이 한다.

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{l}} = \frac{\text{하중}}{\text{변형후 길이}} \quad (8)$$

(8)식을 이용하여 (7)식을 다시 표현하면 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} (x_1 - x_k)q_a + (x_2 - x_k)q_b + (x_3 - x_k)q_c + (x_4 - x_k)q_d &= P_x \\ (y_1 - y_k)q_a + (y_2 - y_k)q_b + (y_3 - y_k)q_c + (y_4 - y_k)q_d &= P_y \\ (z_1 - z_k)q_a + (z_2 - z_k)q_b + (z_3 - z_k)q_c + (z_4 - z_k)q_d &= P_z \\ q_a = \frac{s_a}{l_a}, \quad q_b = \frac{s_b}{l_b}, \quad q_c = \frac{s_c}{l_c}, \quad q_d = \frac{l_d}{l_d} \end{aligned} \quad (9)$$

(9)식을 매트릭스 형태로 표현하면 (10)식과 같다.

$$\mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{q} = \mathbf{p} \quad (10)$$

대각행렬의 특성을 이용하면  $\mathbf{U} \mathbf{q} = \mathbf{Q} \mathbf{u}$ 의 관계가 성립하기 때문에 (10)식을 (11)식과 같이 바꿀 수 있다.

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}) \mathbf{x} = \mathbf{p}, \text{ 또는 } \mathbf{C}_f^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f + \mathbf{C}_r^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r = \mathbf{p} \quad (11)$$

$\mathbf{C}_f$  : 자유절점에 관한 계수매트릭스,  $\mathbf{C}_r$  : 고정절점에 관한 계수매트릭스

(11)식은 내력밀도를 변수로 하여 변형후의 좌표  $\mathbf{x}$ 에 관한 선형방정식이 되기 때문에 항상 해가 존재한다.

### 3. 제한조건의 도입

내력밀도를 정의함으로써 기존의 비선형 방정식을 선형화 하였으나 만약에 변위가 내력밀도  $q$  에 종속되어 임의의 부재에 하중이나 길이의 제한 조건이 발생한다면 더 이상 선형방정식이 되지 않는다.

#### 3.1. 일반사항

다음과 같이  $r$ 개의 구속조건을 다음과 같이 나타낸다고 가정하자.

$$g_1(x, y, z, q) = 0, \quad g_2(x, y, z, q) = 0, \quad \dots, \quad g_r(x, y, z, q) = 0 \quad (12)$$

여기서, 제한조건을 갖는 부재는 변위가 내력 밀도의 함수로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g^*(q) = g(x(q), y(q), z(q), q) = 0 \quad (13)$$

위 식은 (5)식과 같이 비선형 방정식이 되며, 선형해석에 의한 초기평형형상에 대한 내력밀도  $q^{(0)}$  에서는 만족하지 않는다. 비선형 방정식을 풀기 위해 테일러 전개를 이용하여  $q^{(1)} = q^{(0)} + \Delta q$  를 결정하여야 한다. 우선,  $g^*(q^{(1)}) = 0$  대신에  $\Delta q$  를 만족하는 선형식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g^*(q^{(0)}) + \frac{\partial g^*(q^{(0)})}{\partial q} \Delta q = 0 \quad (14)$$

식(14)의 각 항을 다음과 같이 정의하면,

$$G^T = \frac{\partial g^*(q^{(0)})}{\partial q} \Delta q, \quad r = -g^*(q^{(0)}) \quad (15)$$

결국 식(15)은  $\Delta q$  에 대한 선형조건식으로 다음과 같다.

$$G^T \Delta q = r \quad (16)$$

$G^T$  는 야코비안 매트릭스으로써 체인룰(Chain rule)을 이용하면 (17)식과 같이 된다.

$$G^T = \frac{\partial g^*}{\partial q} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial q} \quad (17)$$

$$\text{여기서, } \frac{\partial x}{\partial q} = -D^{-1} C_f^T U, \quad D = C_f^T Q C_f \quad (18)$$

#### 3.2. 부재길이 제한

부재 길이에 대한 제한조건으로 임의의 부재가 변형 전·후에 길이에 변화가 없다고 가정한다. 구속조건 가해진 부재길이를  $l_{si}$  라 하면 다음과 같은 조건식을 만들 수 있다.

$$g = \bar{l} - \bar{l}_{si} = 0 \quad (19)$$

$$g_1(x, y, z) = l_1^0(x, y, z) - l_{s1} = 0, \quad g_2(x, y, z) = l_2^0(x, y, z) - l_{s2} = 0,$$

$$\dots, \quad g_r(x, y, z) = l_r^0(x, y, z) - l_{sr} = 0$$

여기서, 조건이 부가된 부재에 대한 벡터를  $\bar{l}$  전체 부재에 대한 벡터  $l$  그리고 이들에 대응하는 대각행렬  $\bar{L}$ ,  $\bar{U}$ ,  $\bar{C}$  로 표현한다. (19)식과 (6)식을 이용하여  $\partial g / \partial \mathbf{x}$  를 구하여 (17)식에 대입하면 다음과 같은 조건식을 얻을 수 있다.

$$G_d^T = -\bar{L}^{-1}(\bar{U}\bar{C}_f\bar{D}^{-1}C_f^T U) \quad (20)$$

#### 4. 수치 해석기법

(17)식에서 야코비안 매트릭스는 장방형 매트릭스가 되어 그대로 풀 수 없기 때문에 최소자승법을 이용하는 것이 일반적이다. 그러나 여기서는 최소자승법과 더불어 일반역행렬을 이용하여 (16)식에서 직접 해를 구하는 방법을 사용한다.

##### 4.1. 최소자승법

추가조건이 전체 부재수 보다 작기 때문에 일반적으로 식(17)은  $m-r$  개의 선형독립해를 갖는다. 따라서 추가조건을 판정하는 방법으로 최소자승법을 이용하여 다음 식을 최소화 하게된다.

$$\Delta q^T \Delta q \rightarrow \min. \quad (21)$$

(21)식은 전체 방정식에 관한 추가조건이므로 라그랑지 인수( $k$ )를 사용하여  $(r, r)$  방정식에 관해 다음과 같이 해를 구할 수 있다.

$$\Delta q = Gk \quad (22)$$

$$\text{여기서, } k = (G^T G)^{-1}$$

##### 4.2. 일반역행렬의 이용

일반역행렬은 다음과 같이 정의된다.<sup>9)</sup> 「 $A$  를  $(m, n)$  형 장방형매트릭스라고 할 때 다음의 조건을 전부 만족하는 매트릭스  $A^{-}$ 가 일반역행렬 (general inverse)이다」.

$$(AA^{-})^T = AA^{-}, \quad (A^{-}A)^T = A^{-}A, \quad AA^{-}A = A, \quad A^{-}AA^{-} = A^{-} \quad (23)$$

방정식의 해가 존재하기 위한 조건을 살펴보기 위해  $A$  가  $(m, n)$  형 장방형매트릭스이고 벡터  $b$  를 갖는다고 가정한다.

$$Ax = b \quad (24)$$

이때, 식(24)을 만족하는 해가 존재하기 위해서는 아래의 관계가 성립하여야 한다.

$$AA^{-}b = b \quad (25)$$

여기서, 단위 매트릭스  $I$  를 도입하여 다시 나타내면 다음과 같다.

$$(I - AA^{-1})b = 0 \quad (26)$$

즉, 식(26)이 주어진 조건에 대한 해의 존재성을 체크하는 식이 된다.

## 5. 수치 해석 예

### 5.1. 하중밀도 변화에 따른 형상해석 (해석 예1)

그림 2는 형상해석을 하기 위한 초기의 형상이다. 1~ 11번 절점이 고정절점이고, 나머지 절점들은 자유절점이다.

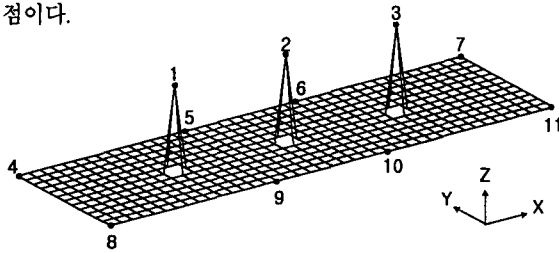


그림 2. 초기형상

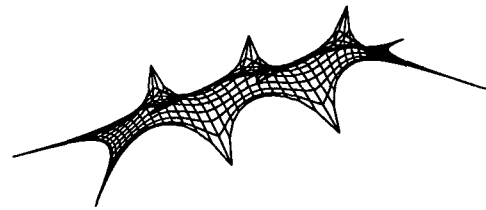


그림 3. 전체 부재  $q = 1$

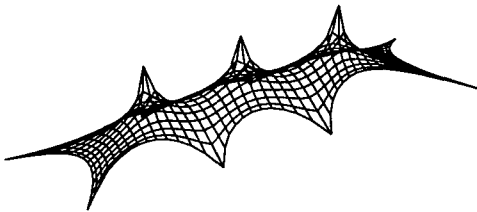


그림 4. 경계부재  $q = 2$ , 내부부재  $q = 1$

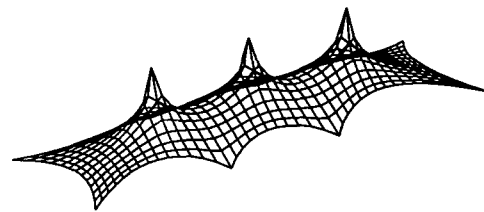


그림 5. 경계부재  $q = 5$ , 내부부재  $q = 1$

그림 3은 전체 부재의 내력 밀도가 동일하고, 그림 4와 그림 5는 경계부재와 내부부재의 내력밀도를 다르게 했을 경우이다. 내력밀도를 다르게 한 부재의 곡률을 보면 내력밀도를 증가시켰을 때 부재의 곡률이 작아지는 것을 알 수 있다.

### 5.2. 제한조건의 도입 후 해석 (해석 예2)

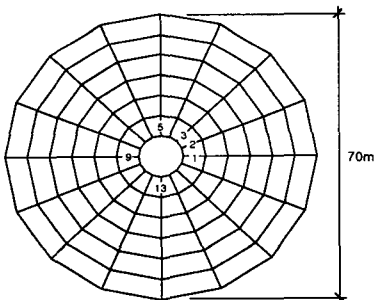


그림 6. 초기형상

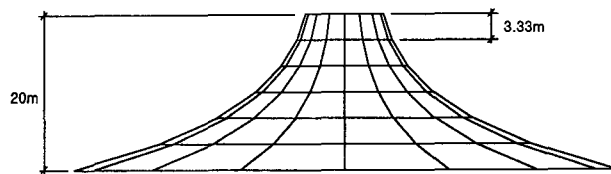


그림 7. 선형해석 후 형상 ( $q=1$ )

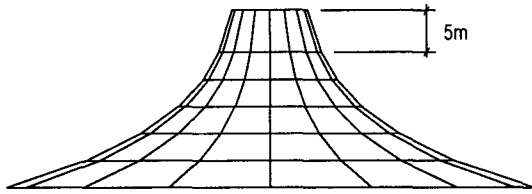


그림 8. 제한조건 도입 후 형상 1.

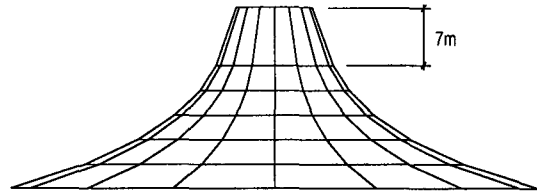


그림 9. 제한조건 도입 후 형상 2.

그림 6은 초기형상이며 그림 7은 선형해석 결과이다. 또한, 그림 8, 9는 선형해석 후 원형 구조물의 중심부 부재(부재번호 1~16)에 각각 5m와 7m의 길이를 제한한 후 해석 결과이다.

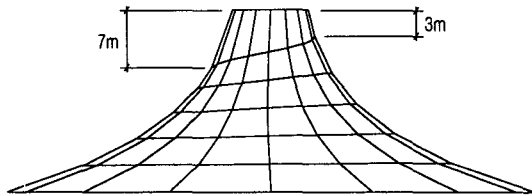


그림 10. 최소자승법을 이용한 형상해석

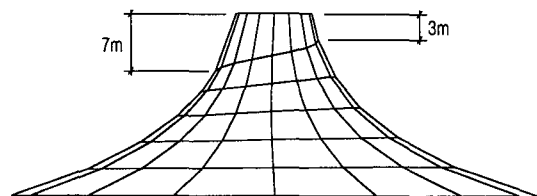


그림 11. 일반역행렬을 이용한 형상해석

그림 10 그림 11은 구조물의 중심부 부재의 제한조건을 다르게 주고 방정식 (16)을 풀기 위해 최소자승법과 일반역행렬을 이용하여 해석한 결과이다. 해석 결과 그림 13과 같이 6회의 반복과정 만으로 주어진 오차범위에 수렴하여 두 방법의 해가 일치함을 알 수 있었다.

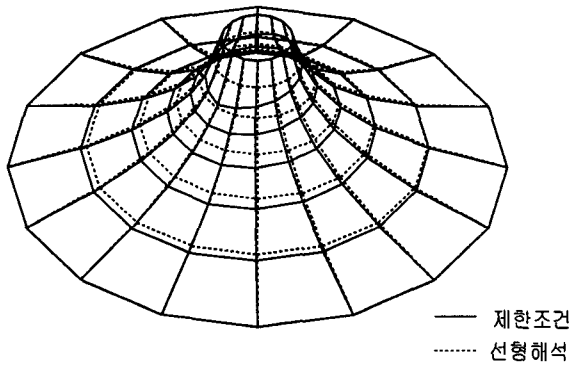


그림 12. 제한조건을 도입한 해석 수렴과정(투시도)

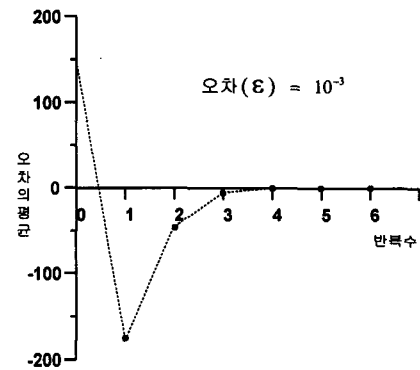


그림 13. 제한조건을 도입한 해석 수렴과정

## 6. 결 론

지금까지 케이블 - 네트 구조물의 형상해석에 관해 하중밀도의 개념을 도입하여 이론적 배경과 정식화 과정을 살펴 보았다. 또한 제한 조건을 갖는 경우에 관해 비선형 방정식을 유도하고 수치해석 기법으로 최소자승법과 일반역행렬법을 이용하여 예제 해석을 수행하였다. 해석 예1을 통해 순수한 하중밀도법을 이용하여 서로 다른 하중밀도를 적용하였을 경우 설계자가 원하는 초기평형형상을 선형방정식만으로 구할 수 있는 장점이 있었다. 따라서 반드시 등장력 형상이 필요하지 않은 경우에 케이블 - 네트 구조물의 평형형상을 찾는 좋은 방법이 되며 특히 형상결정시 재료상수에 관한 항들이 없기 때문에 실용적인 관점에서 적용하기 좋은 방법이 될 것이다.

해석 예 2에서는 본 논문의 목적인 부재에 제한조건을 도입한 후 수치해석 기법으로 최소자승법과 일반역행렬법을 이용하여 형상해석을 수행한 결과 두 방법이 같은 결과를 나타냄을 알 수 있었다. 또한 하중밀도가 물리적으로 이해하기 어려운 개념이기 때문에 길이에 관한 제한 조건은 설계자가 원하는 형상에 보다 쉽고 빠르고 형상해석을 수행하기 위한 좋은 방법이 될 것이다.

이상의 결과를 통하여 살펴볼 때 제한조건을 갖는 케이블 - 네트 구조물의 초기평형형상을 하중밀도법을 이용하여 구하는 것이 실용적인 측면에서 많은 장점을 갖고 있으며 나아가 응력 - 변형 해석시 압축이 생기는 부재에 길이제한을 통해 보다 정확한 인장구조물의 해석이 가능할 것으로 사료된다.

### 참 고 문 헌

1. Harber, R. B. "Computer-Aided Design of Cable Reinforced Membrane Structure", Thesis Presented to Cornell University, Ithaca, N.Y., 1980.
2. Klaus Linkwitz, "About For Finding of Double-Curved Structure", Engineering Structure, 1999, pp. 709-718.
3. Barnes, M. R., "Form-Finding and Analysis of Prestressed Nets and Membranes," Computers & Structures, Vol. 30, 1988, pp.685-695.
4. H. J. Schek, "The Force Density Method for Form Finding and Computation of General Networks", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, 1994, pp. 115-134.
5. 서삼열, "막구조물의 반복적 최적 형상탐색해석에 관한 연구", 성균관대학교 대학원 박사논문, 1991
6. 羊谷裕彦, 川口健一, "形態解析", 培風館, 東京, 1991, pp. 21-42.