

복합 적층 개단면 보의 최적설계

Optimal Design of Laminated Composite Beams with Open Cross Section

배하록* 홍순호** 신영석***
Bae. Ha Rok Hong. Soon-Ho Shin. Yung-Seok

Abstract

Laminated composite plates are very useful in various fields of engineering where high strength-to-weight and stiffness-to-weight ratios are required. Design optimization of composite structures has gained importance in recent years as the engineering applications of fiber reinforced materials have increased and weight savings has become an essential design objective. However, due to the anisotropic material properties of laminated composite structure it is very difficult to analyze and design. In this study, numerical optimization technique together with the finite element method is used to find the optimum design of FRP. Various combination of fiber orientation for the laminate layers are investigated and several local optimum solutions are found.

1. 서론

복합재 구조물은 강재, 목재 및 철근콘크리트 등의 일반 토목재료와 달리 가벼운 자중에 비하여 현저히 뛰어난 강성을 지니고 있으며 높은 감진 효과, 낮은 열 팽창성과 높은 충격에너지 흡수율 등에서 재료적 성능이 높게 평가되고 있다. 이러한 복합재료의 우수한 기능적 특성은 보강섬유의 방향, 적층순서, 각층의 두께 등의 최적설계를 통하여 더욱 향상시킬 수 있다. 복합재는 일반 구조재료와 다른 비등방성 재료특성을 가지고 있으며 이로 인하여 해석상 매우 어려운 난점이 있다. 따라서 복합재 구조물의 해석과 설계에는 일반적으로 컴퓨터를 이용한 수치 해석적 기법에 연구초점이 맞추어지고 있다. 본 연구에서는 매트릭스 연산 프로그램인 MATLAB을 사용하여 (1)복합재 해석, (2)유한요소 해석, (3)최적설계의 3가지 기법을 함께 연계하는 통합 프로그램을 개발할 것이며 이를 통하여 복합재 구조물의 최적설계를 얻을 것이다⁽¹⁾. 본 논문에서 연구대상은 FRP(Fiber Reinforced Plastics)의 적층으로 이뤄진 구조물이다. FRP 단층이 Fiber의 방향으로 직교성 재료특성을 갖는다면, 이것의 임의적층은 하나의 판으로 비등방성을 갖게된다. 그러나, 중립면에 대하여 대칭으로 적층된 복합재 평판은 그 강성행렬이 간단해지며, 또한 공학적 응용성이 뛰어난 것을 고려하여 본 연구에서는 대칭적 복합재 적층 평판을 다루었다⁽²⁾.

* 아주대학교 건설교통공학과 석사과정

** 아주대학교 건설교통공학과 박사과정

*** 아주대학교 건설교통공학과 부교수

2. 적층평판의 기본식과 FEM 해석방법

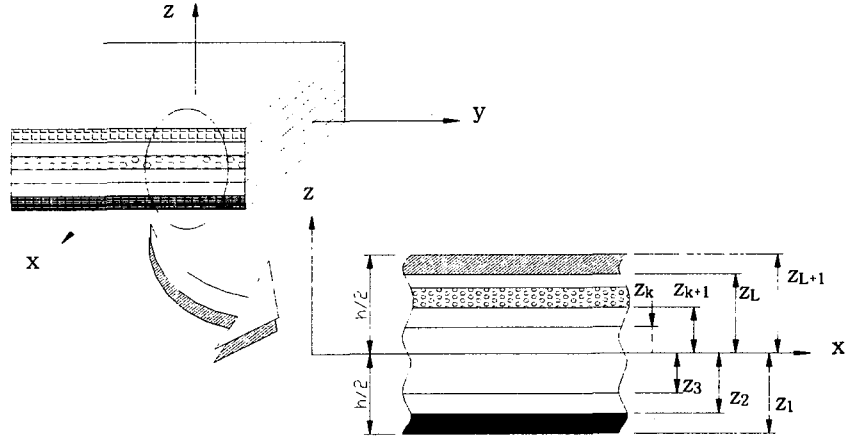


그림 1 적층 평판에서의 적층 번호와 좌표계

본 연구에서 다루어지는 복합재 적층 평판에 대한 적층 번호 좌표계는 그림 1에서와 같고, 구성방정식은 다음의 식(1)과 같다.

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + [B] \begin{pmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = [B] \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + [D] \begin{pmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

식 (1)에서 N, M 은 각각 면내 하중, 굽힘 모멘트에 관한 항이다. 또한 행렬 $[A]$ 는 면내 하중항에 대한 강성행렬이며 행렬 $[D]$ 는 굽힘에 대한 강성행렬이고 행렬 $[B]$ 는 면내 하중과 굽힘의 연결작용에 관한 강성행렬이다⁽³⁾. 복합재 평판은 두께 방향으로의 변형률이 등방성의 재료와 같은 선형을 보인다. 하지만 그 응력은 각각의 층에 따라 다르므로 두께 방향으로 비선형과 불연속적이다. 이 때문에 설계자는 최대의 응력을 검토할 때, 모든 층에 대한 응력을 조사하여야 한다. 이러한 복합재 판의 유한요소해석은 식(2)에서와 같이 등매개변수 정식화를 이용하여 각 요소 방정식을 구성한다. 여기서 H_i 는 Bilinear isoparametric 형상함수를 나타낸다⁽⁴⁾.

$$w = \sum_{i=1}^n H_i(\xi, \eta) w_i$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^n H_i(\xi, \eta) (\theta_x)_i \quad (2)$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^n H_i(\xi, \eta) (\theta_y)_i$$

요소의 굽힘에 대한 강성행렬은 변위에 대한 변형률의 행렬 [B]와 물성치 행렬 [D] 그리고 등대개변수 정식화에 따른 자코비언 행렬식의 값 |J|와 가중치 값으로 식(3)처럼 표현될 수 있다⁽⁵⁾.

$$\begin{aligned}
 [K^e] &= \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} [B_b]^T [D_b] [B_b] d\Omega + kh \int_{\Omega} [B_s]^T [D_s] [B_s] d\Omega \\
 &= \sum_j \sum_i w_i w_j [B_b]^T [D_b] [B_b] |J| + \sum_j \sum_i w_i w_j [B_s]^T [D_s] [B_s] |J|
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

큰 곡률을 갖는 평판이나, 개단면처럼 평판이 접혀져 이루는 구조물을 해석할 때는 3개의 자유도를 갖는 평판 대신 각 절점에 6개의 자유도를 갖는 Shell 해석이 이뤄져야 한다. 이때는 평판내 두 방향에 대한 자유도와 함께 θ_z , 즉 평판의 직각인 축에 대한 회전 자유도를 갖는 박막의 강성행렬과 3개 자유도를 갖는 판 강성행렬의 조합으로 해석한다. 또한 최적화에 대해서는 Matlab에서 가장 유용하며, 효과적인 최적화기법으로 제약조건이 있는 문제에 대해서 Sequential Quadratic Programming (SQP) 알고리즘을 이용하는 'CONSTR' 함수를 사용하였다.

Function in MATLAB `x=constr('fun', x0, options, vlb, vub, 'grad',...)` (4)

식(4)에서 'fun'은 최적화 문제이며, 'x0'는 설계변수의 초기값, 'vlb', 'vub'는 각각 최대, 최소의 경계조건 값을 나타내며, 'options'은 최적화 수행하는데 있어서 몇 가지 기본사항을 정해주는 항이다. 여기서 제약조건은 'fun' 함수 안에 기술된다. 이 함수는 매번의 반복된 계산마다 Quadratic Programming (QP)의 부차적 문제를 풀고, 최초 가정된 Hessian 행렬을 향상시켜 나가며 진행된다⁽⁶⁾.

3. 해석결과와 분석

3.1 평판해석과 설계

단순 지지된 정사각형 복합재 적층평판(0/90/0)이 등분포 하중(UDL $q_0=1N/m^2$)을 받고 있는 경우($E1=19.2$ MPa, $E2=1.56$ MPa, $\nu=0.24$, $G12=0.82$ MPa, $a=10m$, $b=10m$, $h=0.1m$)에 대하여 64개의 요소를 갖는 유한요소 해석을 실행 후 가정된 형상함수를 이용하여 아래 그림 2처럼 전체 처짐 형상을 구할 수 있다.

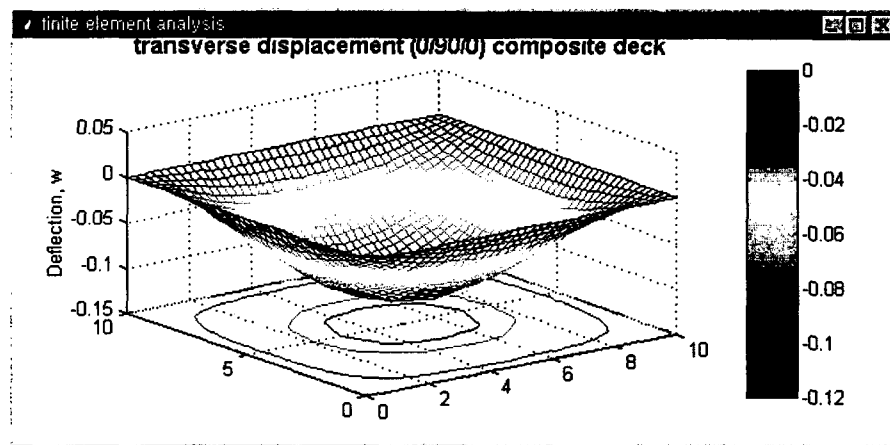


그림 2 구조물(평판)의 전체 처짐 형상

무차원화 된 중심의 처짐값 $\left(w_0 \times \left(\frac{E_2 h^3}{a^4 q_0}\right)\right)$ 으로 유한요소법 해석을 이용하여 그림 2처럼 복합재 평판 전 구간에서의 처짐 형상을 보여준다. 각 변들은 단순지지 되어 있고 모서리 절점들은 고정되어 있음을 알 수 있다. 최대의 처짐은 중앙에서 무차원화 된 수로 1.202의 값을 보이고 이는 해석적 방법에 의한 해와 거의 일치한다. 유한요소해석 결과를 이용하여 평판 전 구역에 대해서 최외측 적층평판에 대한 응력 (σ_{xx})를 후처리 계산을 하여 아래 그림 3과 같은 결과를 얻을 수 있다.

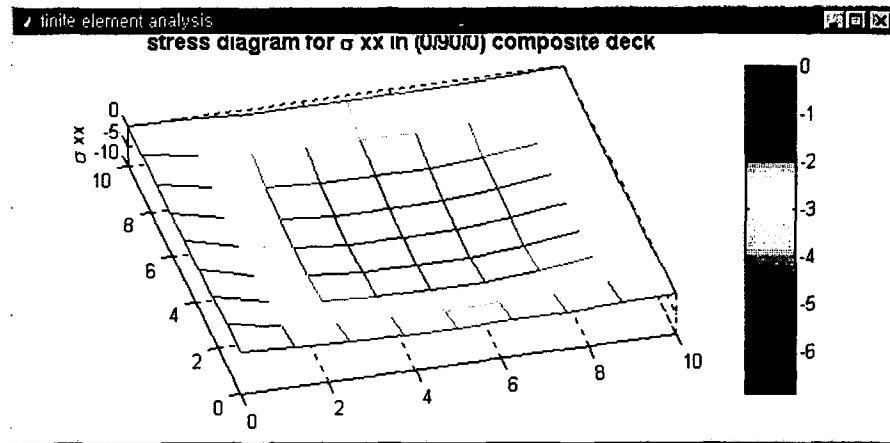


그림 3 구조물(평판)의 전체 응력(σ_{xx})도

응력은 중앙에서 최대값인 무차원값 $\left(\sigma_{xx} \times \left(\frac{h^2}{a^2 q_0}\right)\right) = 7.1721$ 을 보여주고 있다. 적층평판이 (90/45/-45/0)s의 대칭적 적층이라면 각 층에서 발생하는 응력이 아래의 그림 4-a, b와 같이 비선형적, 불연속적으로 발생하게 된다. 최대 응력은 항상 중립축으로부터 최단부에서 발생하지는 않으므로 설계시에는 이러한 점을 고려하여 모든 층에서의 응력을 조사해야 한다⁽⁷⁾.

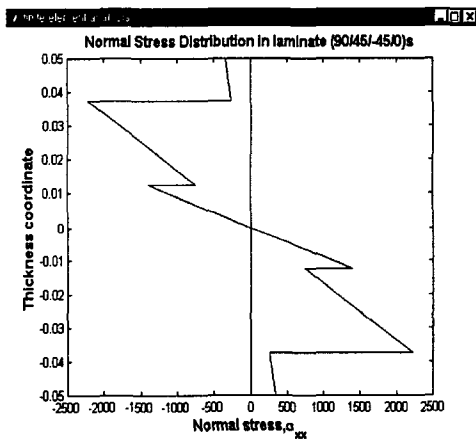


그림 4-a 각 층에서의 σ_{xx}

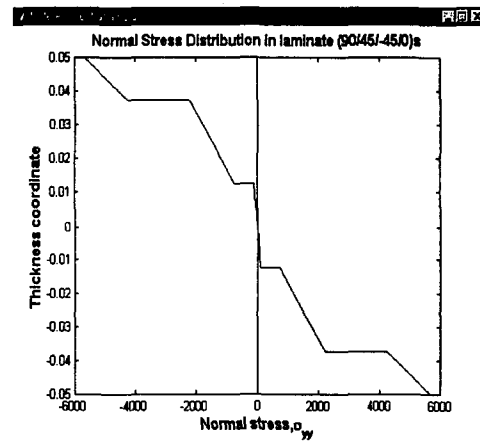


그림 4-b 각 층에서의 σ_{yy}

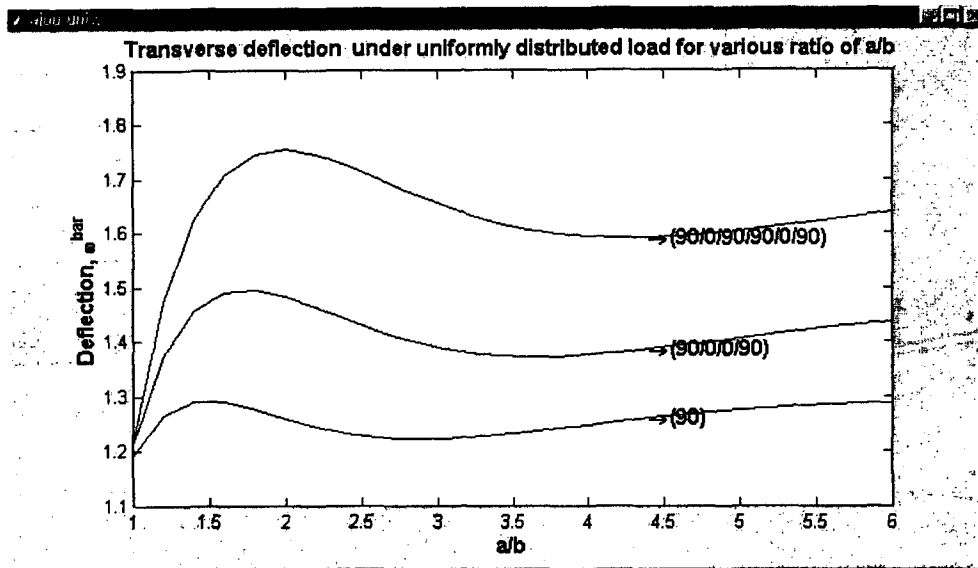


그림 5 직사각형에서 단변에 대한 장변의 비(a/b)에 따른 무차원 최대 처짐값

앞의 모델과 동일한 물성치를 가지고, 몇가지 적층의 경우와 직사각형 평판으로써 단변에 대한 장변비(a/b)의 증가에 따른 평판의 최대 처짐값을 무차원화시켜 그림 5에 제시한다. 그림 5는 단변에 대한 장변비가 1.5 - 2.0에 달하면 무차원화된 평판의 최대 처짐값이 최대가 되고 이후 일정해지고 있음을 보여준다. 이러한 현상은 양변의 영향을 받는 판의 거동이 한변의 영향만이 지배적인 보의 거동으로 전환된다는 것을 알 수 있고 적층의 방법에 따라 차이가 생긴다는 것을 관찰할 수 있다. 그림 6은 정사각형의 적층평판이면서, $(0/\theta)$ s, $(0/\theta/90-\theta)$ s의 두 경우에 대하여 각 적층판의 배향각(θ)가 변화할 때 무차원화된 최대 처짐값을 구하여 결과를 나타내었다. 바깥쪽 적층판의 각도가 0° 로 고정되어 있을 때, 변의 길이가 가장 긴 약 45° 방향으로 배치되는 $(0/45)$ s, $(0/45/45)$ s의 적층판이 가장 작은 처짐을 갖게 되는 것을 알 수 있다.

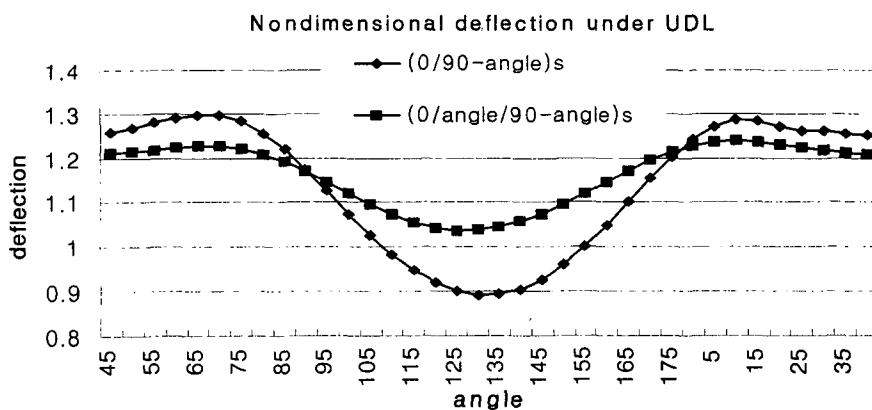


그림 6 적층각에 따른 무차원 처짐값

이는 평판이 정사각형일 때, 가장 장변의 대각선 방향에 대한 보강섬유의 배향각 적층이 처짐을 최소화시킬 수 있다는 것을 보여준다. 복합재 평판의 최적화 문제로서 네 개의 적층이 대칭일 때, 설계변수는 각 적층 판의 배향각 방향으로 θ_1, θ_2 를 설정한다. 목적함수는 주어진 평판에서의 최대 처짐의 최소화이다. 평판은 $(\theta_1/\theta_2)_s$ 로 이루어져 있으며, 각 배향각의 경계조건은 $-90 < \theta < 90$ 로 하였다. 아래 표 1에서는 두가지 다른 초기 배향각에 대한 최적 설계 결과와 초기값에 대한 함수 호출 횟수의 큰 차이를 보여준다. 설계 변수(θ_1, θ_2)의 최적결과는 최대의 길이를 갖는 45° 와 근사한 방향으로 보강섬유가 배치되었다. 처짐에 가장 큰 강성을 갖으려는 결과로 이는 앞서 그림 6에서 추측해 볼 수 있는 결과라고 생각한다.

표 1 중앙 집중하중(CPL)을 받고 있는 복합재 평판, $(\theta_1/\theta_2)_s$ 의 최적화 결과

초기 θ_1, θ_2		최적 θ_1, θ_2		목적함수(w_min)	함수호출횟수
0	90	-44.84	46.23	-0.049	42
-54	54	-44.80	46.24	-0.049	19

해석상의 편리 및 공정의 편의를 위해 실무에서는 단순한 적층각을 선호한다. 예를 들면 $5^\circ, 10^\circ$, 또는 15° 간격으로 적층함으로써 경우의 수를 줄일 수 있게 된다. 이를 반영하기 위해서는 정수변수가 혼합된 최적화가 되어야 한다. 복합재의 최적화는 적층각에 큰 영향을 받으므로 각의 조정범위는 설계자가 신중히 고려해 판단해야 할 것이다⁽⁸⁾.

3.2 T형빔 해석과 설계

평판에 대한 해석을 좀더 확장하여, Shell 요소를 사용하여 T형보의 해석을 시도해 보았다. Shell 요소로의 확장은 앞에서의 판 요소와 박막 요소에 대한 강성행렬을 조합함으로써 이루어질 수 있다. 대상모델은 적층판($E_1=20\text{MPa}, E_2=E_3=1.0\text{MPa}, G_{12}=G_{23}=G_{13}=0.9\text{MPa}, \nu=0.25$, 장변=16m, 단변=8m, $t=0.5\text{m}$) 두 개가 그림 7과 같이 각각 플랜지와 복부판으로 T형보를 이룬다. 단순 지지된 형태로 등분포하중($q_0=1\text{KN/m}^2$)을 받고 있다.

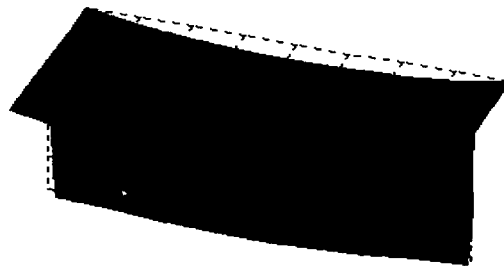


그림 7 T형보의 처짐형상

처짐의 형상은 그림 7과 같다. 표 2에서 angles의 란에는 적층의 수와 보강섬유의 배향각을 나타내주고 있다. 대칭인 적층으로 T형보 각각의 평판이 이뤄져 있으므로 특별히 뒤틀림과 비틀림은 없다. 적층의 방법에 따라 처짐의 순위를 보면, 가장 작은 처짐을 나타내고 있는 적층은 45°

를 포함하여 최외단은 90° 배치이면서 중립축 부근에서는 길이방향으로 보강재가 배치된 경우이다. 이러한 적층의 경우 그 응력도 압축과 인장의 가장 적당한 분배를 보이고 있다. 하지만 길이 축 방향이나 길이 축에 직각 방향으로만 보강섬유가 배치되었을 때는 처짐과 응력이 다른 적층보다 큰 것으로 관찰된다.

표 2 다양한 적층에 따른 처짐과 응력

case #	angles	처짐 w	$\sigma_{xx}(\text{Pa})/\sigma_{yy}(\text{Pa})$	처짐의 순위
1	0	-0.0158	2035/153	7
2	90	-0.0133	366/-9	6
3	90/0/90	-0.0073	409/9	3
4	0/90/0	-0.0077	1055/43	4
5	0/45/90/45/0	-0.0058	740/-49	2
6	0/45/0/45/0	-0.0095	1225/-50	5
7	90/45/0/45/90	-0.0056	287/-55	1

전체를 64개의 사각형요소로 분할하였는데, 더욱 많은 요소로 해석을 한다면, 보다 정확한 결과를 기대할 수 있다. 최적화의 문제로써 앞에서의 모델을 이용하여 플랜지의 두께와 복부판의 두께를 설계변수로 하여 처짐을 최소화하는 문제를 다루어 보았다. 제약조건으로는 각 설계변수의 경계 조건과 응력조건, 전체의 체적을 제약조건으로 하였다. 본 문제의 모델에서는 굽힘에 대한 처짐보다는 전단에 대한 처짐이 더욱 큰 비중을 차지 할 것으로 생각되어 플랜지 보다는 복부판의 단면적을 크게할려는 설계가 될 것이라 기대된다. 여기서 좌굴해석 또한 중요할 것으로 생각되지만, 본 연구에서는 좌굴은 다루지 않았으므로 좌굴은 무시했다. 초기 설계모델은 표 2에서 case #6 (0/45/0/45/0)에 것과 같다. 최적설계는 MATLAB을 이용하여 수행하였으며 결과는 아래의 표와 같이 기대되었던 설계로 플랜지 두께보다는 복부판 두께를 증가시키는 결과가 나왔다. 최적화 결과는 전체 체적에 대한 제약조건에 대해 활성화되고, 플랜지 두께의 설계변수는 경계 조건으로 만족되었다.

표 3 T형빔의 최적두께

	초기 두께(m)	최적 두께(m)
플랜지	0.5	0.01
복부판	0.5	0.93
처짐	-0.0095	-0.0007

4. 결론

비등방성의 재료성질을 가지고 있는 복합재 구조물은 각층의 두께, 보강섬유의 배향각 등 다양한 설계변수를 가지고 있다. 따라서 설계자의 의도에 따라 인위적인 설계를 통하여 목적한 바에 대한 극대의 효과를 얻을 수 있는 장점이 있다.

본 연구에서는 해석과 설계가 난해한 복합재 판요소와 판요소의 조합으로 구성된 간단한 복합재 보구조의 유한요소해석과 최적설계기법을 사용한 설계를 시도하였으며 다음과 같은 결론을 도출할 수 있었다.

복합재 평판의 경우 보강섬유의 배향각만의 설계변수를 갖는 최적화에 의해 약 30%의 처짐의 감소를 얻을 수 있었다. 하지만 각 적층판 보강섬유의 배향각을 설계변수로 하였을 경우 국부적 최적점으로 수렴하는 경우가 많다는 연구보고가 있고, T형빔에서는 많은 경우 국부적 최적점으로 도달하였다^(9,10). 복합재 평판 해석에서는 처짐에 대한 최대의 저항을 얻기 위하여 가장 긴변인 장변 방향으로 보강섬유가 배향될려는 경향이 보여졌다. 하지만 T형빔에서는 적은 수의 적층으로 장변 방향만의 보강섬유 배치보다는 여러 방향으로 보강섬유가 배치되므로써 전체강성을 보완하여 최대 처짐을 감소하는게 효과적임을 알 수 있었다. 본 연구에서 다루어진 모델은 굽힘에 대한 처짐보다 전단에 대한 처짐이 더욱 지배적이다. 그러므로 각 판 두께를 설계변수로 취한 결과에서는 굽힘에 대해 저항하는 플랜지쪽 두께보다 전단 면적을 넓게 하는 복부판쪽의 두께가 커지는 결과를 보여주고 있다.

평판에 대한 해석은 정적인 해석만을 수행하였으나, 향후 좌굴에 대한 연구와 동적인 거동에 관한 연구가 병행될 예정이다. T형보와 같은 개단면의 구조물은 해석에 있어서도 난해하고 평판의 경우에 비해서 설계변수가 다양하다. 하지만 T형과 더불어 향후 구조재료로서 많이 쓰이는 I형 단면과 박스형 단면등에 대한 연구가 진행될 예정이다.

참고 문헌

- 1) Kwon Y. W. and Bang H. C. "The Finite Element Method using MATLAB", 1996
- 2) Ochoa O. O. and Reddy J. N. "Finite Element Analysis of Composite Laminates", 1992
- 3) Jones R. M. "Mechanics of composite materials", McGRAW-HILL, 1975
- 4) Logan D. L. "A First Course in the Finite Element Method", PWS Publishing company, 1992
- 5) Bathe K. J. "Finite Element Procedures", 1996
- 6) Vanderplaats G. N. "Numerical optimization techniques for engineering design", 1984
- 7) Reddy J. N. "Mechanics of Laminated Composite Plates Theory and Analysis", CRC press, 1997
- 8) Olson G. R. and Vanderplaats G. N. "A method for nonlinear optimization with discrete design variables", AIAA SDM Conf., Monterey, Vol.1, pp.343-350, 1987
- 9) Hirano. Y. "Optimum Design of Laminated Plates Under Axial Compression" AIAA Journal. 17:1017 - 1019 (1979)
- 10) Graesser D. L., Zabinsky Z. B., Tuttle M. E., and Kim G. I. "Designing laminated composites using random search techniques", Composite structures, Vol. 18, pp. 311-325, 1991