

비대칭 변단면 보의 고유진동수 Natural Frequencies of Nonsymmetrically Tapered Beams

백봉인* 안성기* 김순철** 이수곤***
Baek, Bong-In Ahn, Seong-Ki Kim, Soon-Chul Lee, Soo-Gon

ABSTRACT

An understanding of the natural frequencies of a beam is virtually a prerequisite to the understanding of its response in forced vibration due to shock, ground acceleration or moving loads. Contrary to the frequencies of the prismatic bars with arbitrary boundary conditions, those of a tapered bar are hard to determine when one employs conventional neutral equilibrium or energy method. In this paper, finite element method is adopted to determine the fundamental frequencies of the non-symmetrically tapered bars. The bars assume the shapes of straight lines along the axis. The parameters considered in this study are sectional parameter, m, n and taper parameter, α . For the structural engineer's convenience, the results by finite element method are expressed by simple algebraic equations, by which first mode frequencies are easily estimated. And they agree fairly well with those by F.E.M in most cases.

1. 서론

보의 자유진동해석으로 부터 얻어지는 고유진동수(natural frequency)는 진동해석뿐 아니라 차량이동으로 인한 동하중이나 폭파 등으로 인한 충격, 지진 등으로 인한 구조물의 동적 거동을 파악하는데에도 대단히 중요한 역할을 한다. 보의 횡 방향 자유진동은 무수히 많은 mode의 형태로 일어날 수 있고 각각의 mode에는 이에 대응하는 고유진동수가 있음은 일반적으로 잘 알려진 사실이다. 여러 진동수 중 특히 중요한 것은 1차 또는 기본 mode에 대응하는 기본진동수(fundamental frequency)이다.

등단면 보의 경우는 물론 변단면 보의 어떤것들은 단면의 성질을 지배하는 매개변수(parameter), 축방향으로의 형태 및 경계조건(boundary condition)에 따라 자유진동을 지배하는 운동 방정식의 정해를 알 수 있다. 이때에 운동방정식의 적분에 포함되는 적분상수는 경계조건을 만족시켜야 하는데 이 과정에서 진동수 방정식(frequency equation)이 유도된다. 진동수 방정식을 만족시키는 여러개의 근(root)을 차례로 구하면 각각의 mode에 따른 고유진동수의 산정이 가능하게 된다. 그러나 대부분의 변단면 보에서는 지배 미분 방정식의

* 전남대학교 대학원 석사과정

** 동신대학교 건축공학과 부교수

*** 전남대학교 건축학과 교수

정해를 알수 없거나 알수 있어도 대단히 복잡한 형태를 취한다. 또한 이들 얻어진 해로부터 진동수 방정식을 유도하는 과정과 이들로로부터 고유진동수를 결정하기까지는 다음에서 볼 수 있듯이 복잡하고도 지루한 계산을 거쳐야 한다.

이번 연구에서는 비대칭 변단면 보의 단면 성질을 지배하는 매개변수(sectional property parameter)들이 어떤 특정한 값을 갖고 테이퍼 매개변수(taper parameter) α 가 $\alpha=0.0$ 에서부터 0.1씩 $\alpha=2.0$ 까지 변할 때 보의 1차 고유 진동수를 유한 요소법으로 산정하기로 한다. 일반적으로 유한 요소법 등의 수치해석법으로부터 얻어진 정보들은 어떤 계(system)의 거동을 지배하는 몇 개의 parameter들이 특정한 값을 취할때만 유효하다는 단점이 있다. 이를 보완하기 위하여 고유진동수 계수 C를 taper parameter α 와 sectional property parameter, n의 2차식으로 표시하는 방법을 제안하였다. 제안한 식은 간단한 대수식으로, 이들 제안식에 의한 고유진동수 추정치와 유한 요소법에 의한 값들은 거의 일치하기 때문에 두 값들의 상관계수(correlation coefficient) r 은 어느 경우에도 거의 $r \approx 1.0$ 로 나타났다. 따라서 변단면 보의 진동해석이나 동적해석에서 고유진동수를 알아야 하는 구조기술자들은 제안한 식을 활용하여 보다 간편하게 필요한 작업을 진행할 수 있다.

2. 연구의 범위 및 해석적 방법 예

이번 연구에서는 그림1. 과 같은 비대칭 변단면 보의 1차 고유진동수를 산정하기로 한다.

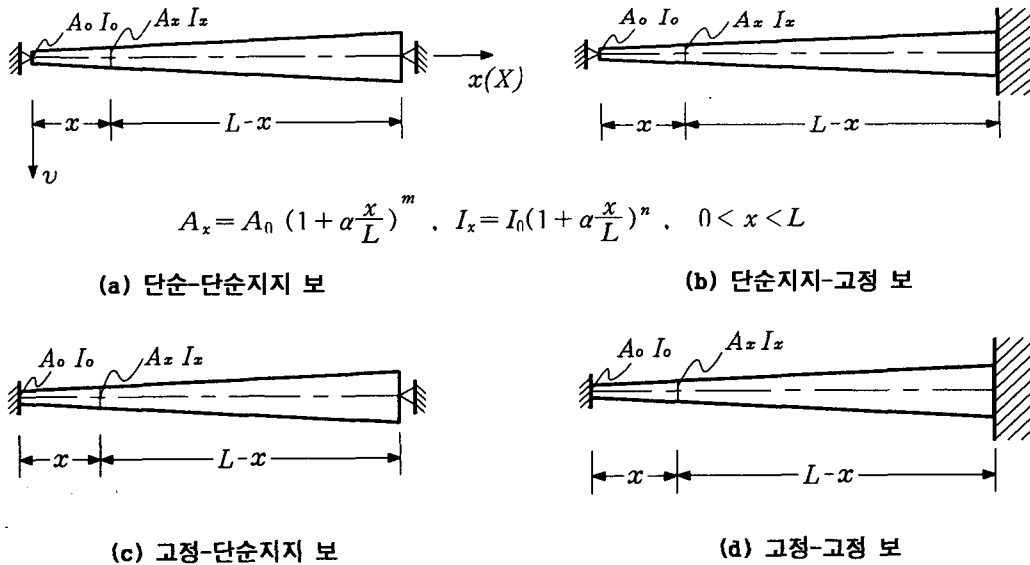


그림1. 비대칭 변단면 보

여기서 보의 지지상태는 단순지지 또는 고정, 단면 성능을 지배하는 parameter인 m 과 n 의 조합(그림 1 (a)참조)과 taper parameter α 의 변화 범위는 다음의 식(1-a,b)의 범위로 하기로 한다. 경계조건으로 양단이 단순지지된 보(그림 1. (a))는 이미 다른 논문에서 다루었기 때문이다.

$$(m, n) : (0, 2), (1, 3), (2, 4) \tag{1-a}$$

$$\alpha : 0.0, 0.1, 0.2, \dots, 2.0 \quad (1-b)$$

식(1-a)의 기하학적 의미에 관하여는 기타의 문헌을 참고하기로 한다. 식(1-b)의 taper parameter α 의 범위는 실용적 범위에서 $\alpha=2.0$ 이면 충분할것으로 생각하기 때문이고 기타의 다른 이유는 없다.

먼저 그림1과 같은 보에서 무차원 좌표 X 를 다음과 같이 도입한다.

$$X = 1 + \alpha \frac{x}{L}, \quad x = \frac{L}{\alpha}(X-1), \quad 0 < x < L \quad (2)$$

이제 보가 횡방향으로 고유진동수 ω_0 를 가지고 자유 진동을 한다고 하면 동적 평형 방정식 또는 운동방정식은 다음과 같은 미분 방정식으로 된다.

$$\frac{d^2}{dX^2} [X^n \frac{d^2 v}{dX^2}] - \beta^4 \cdot X^m \cdot v = 0 \quad (3)$$

식(3)에서 β 는 다음과 같은 무차원 진동수이다.

$$\beta^4 = \frac{\rho A_0}{EI_0 g} \left(\frac{L}{\alpha}\right)^4 \cdot \omega_0^2 \quad (4)$$

윗 식에서 ρ 는 보 재료의 단위 체적 중량, g 는 중력 가속도를 의미한다.

식(3)과 같은 비선형 미분 방정식의 해는 일반적으로 원주 함수(cylindrical function)의 형태로 주어지는데 여기서는 식(1-a)의 두 번째 경우 즉 $(m, n)=(1, 3)$ 에 대하여만 논하기로 한다. $(m, n)=(1, 3)$ 이면 식(3)의 일반해는 다음식으로 주어진다.

$$v = X^{-\frac{1}{2}} \left\{ c_1 J_1(2\beta X^{\frac{1}{2}}) + c_2 Y_1(2\beta X^{\frac{1}{2}}) + c_3 I_1(2\beta X^{\frac{1}{2}}) + c_4 K_1(2\beta X^{\frac{1}{2}}) \right\} \quad (5)$$

식(5) 및 이하의 여러 식에서 J_n 과 Y_n 은 각각 n 차(nth order)의 Bessel 함수와 Neumann 함수를 의미한다. 또한 I_n 과 K_n 은 각각 n 차의 제1종 및 제2종 변형된(modified) Bessel 함수이다.

식(5) 중의 적분상수 c_i 를 결정하기 위한 경계조건은 여러 가지 조합을 생각할수 있으나 여기서는 좌단 $x=0$, ($X=1$)에서 단순지지, 우단 $x=L$, ($X=1+\alpha$)에서 완전 고정된 경우에 국한한다. 이와 같은 경계조건을 식으로 표시하면,

$$X=1 \quad (x=0) \quad ; \quad v=0, \quad \frac{d^2 v}{dX^2} = 0 \quad (6-a)$$

$$X=1+\alpha \quad (x=L) \quad ; \quad v=0, \quad \frac{dv}{dX} = 0 \quad (6-b)$$

식(6)을 식(5)에 대입한후 $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}^T \neq \{0\}$ 라는 조건을 이용하면 최종적으로 다음과 같은 진동수 방정식(frequency equation)을 얻는다.

$$\{v\}^T \cdot \begin{Bmatrix} -J_3(A) \\ Y_3(A) \\ -I_3(A) \\ K_3(A) \end{Bmatrix} = 0 \quad (7)$$

다시 위의 식에서 $\{v\}$ 는

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} l_1 Y_2(B) + l_2 I_2(B) + l_3 K_2(B) \\ l_1 J_2(B) + l_4 I_2(B) + l_5 K_2(B) \\ l_2 J_2(B) - l_4 Y_2(B) + l_6 K_2(B) \\ l_3 J_2(B) - l_5 Y_2(B) - l_6 I_2(B) \end{Bmatrix} \quad (8-a)$$

또한 식(8)에서 l_1, l_2, \dots, l_6 는 각각

$$\begin{aligned} l_1 &= I_1(A)K_1(B) - I_1(B)K_1(A), & l_2 &= Y_1(A)K_1(B) - Y_1(B)K_1(A) \\ l_3 &= Y_1(A)I_1(B) - Y_1(B)I_1(A), & l_4 &= J_1(A)K_1(B) - J_1(B)K_1(A) \\ l_5 &= J_1(A)I_1(B) - J_1(B)I_1(A), & l_6 &= J_1(A)Y_1(B) - J_1(B)Y_1(A) \end{aligned} \quad (8-b)$$

위의 식(8-a,b)에서 ()내의 A와 B는 각각 $A = 2\beta$, $B = 2\beta\sqrt{1+\alpha}$ 를 의미한다.

식(7)로 주어지는 진동수 방정식의 응용예의 하나로 예를 들어 $\alpha=0.7$ 이면 $\beta \approx 6.692$ 를 얻고 따라서 이에 대응하는 1차 진동수는 식(4)에 의하여

$$(m, n) = (1, 3), \quad \alpha = 0.7; \quad \omega_0 = \frac{21.944}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{gEI_0}{\rho A_0}} \quad (9)$$

진동수 방정식(7)을 얻기 까지의 과정뿐 아니라 주어진 α 에 대하여 식(7)을 만족시키는 β 를 구하는 과정 역시 결코 간단하지는 않다. 따라서 변단면 보의 고유진동수는 computer이용을 전제로 하는 수치해석법의 활용이 바람직하다.

3. 유한 요소법

여기에서는 유한요소법을 이용하여 고유진동수를 산정기로 하는데 그림 2는 고유진동수 산정에 사용될 선형요소의 변형성분 δ_i 및 절점력 성분 q_i 를 표시하고 있다.

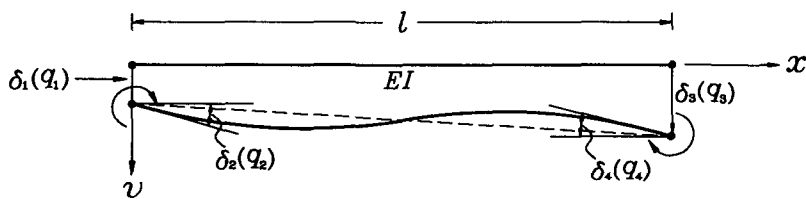


그림 2. 요소의 절점변형 (δ_i) 과 절점력 (q_i)

그림 2와 같이 절점의 자유도가 2인 선형요소에서의 처짐함수(displacement function) v 는 다음의 식 (10)과 같이 절점변형 vector $\{\delta\}$ 와 형상함수 $[N]$ 의 결합으로 표시할 수 있다.

$$v = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} \delta \\ \delta \\ \delta \\ \delta \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\} \quad (10)$$

식 (10)에서 형상함수의 성분 N_i 는 각각

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_2 &= x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ N_3 &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_4 &= \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right) \end{aligned} \quad (11)$$

요소의 절점력 vector, $\{q\}$ 와 절점변형 vector, $\{\delta\}$ 는 다음과 같은 식으로 결합된다.

$$\{q\} = ([k_b] - \omega_0^2 [m_c])\{\delta\} \quad (12)$$

윗 식에서 ω_0 는 구하고자 하는 고유진동수이다. 식(12)중에 포함된 요소의 휨 강성행렬 $[k_b]$ 와 consistent mass matrix $[m_c]$ 는 각각 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} [k_b] &= \int_0^l \left[\left[\frac{d^2 N}{dx^2} \right]^T (EI(x)) \left[\frac{d^2 N}{dx^2} \right] \right] dx \\ &= \frac{EI(e)}{l^3} \begin{vmatrix} 12 & & & & \text{symm} \\ -6l & 4l^2 & & & \\ -12 & 6l & 12 & & \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 & \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} [m_c] &= \int_0^l \left[[N]^T (\rho A(x)) [N] \right] dx \\ &= \frac{\rho A(e)}{420} \begin{vmatrix} 156 & & & & \text{symm} \\ 22l & 4l^2 & & & \\ 54 & 13l & 156 & & \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 & \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

식 (13)과 식 (14)의 유도에서는 단면 2차모멘트 $I(x)$ 와 단면적 $A(x)$ 가 상수가 아닌 변수이므로 그 계산이 대단히 복잡하게 된다. 여기에서는 계산의 복잡성을 피하기 위하여 각 요소의 중앙점에서 산정한 값들을 $I(e)$ 및 $A(e)$ 라 놓고 구한 것이다. 실제로 식 (13)이나 식 (14)의 경우 정확한 수치적분 결과는 $I(e)$ 또는 $A(e)$ 로 표시해 구한 값과 거의 일치한다. 예를 들어 그림 1(a)의 변단면 보를 20등분($L=20l$)할 경우 $n=2$, $\alpha=2.0$ 이면, 첫 번째 요소의 휨 강성행렬 중 $(k_{11})_b$ 즉,

$$\int_0^l \left[\left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} \right)^2 \cdot EI_0 \cdot \left(1 + 2 \frac{x}{20l} \right)^2 \right] dx \text{의 수치 적분 결과는 } 13.248 \cdot EI_0 / l^3 \text{ 으로 된다. 약산에 의한}$$

$$\begin{aligned} (k_{11})_b \text{는 먼저 } I(1) &= I_0 \left(1 + 2 \frac{x}{20l} \right)^2 \Big|_{x=0.5l} = 1.1025 I_0 \text{가 되고, } \int_0^l \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^l \left(\frac{144x^2}{l^6} \right. \\ &\left. - \frac{144x}{l^5} + \frac{36}{l^4} \right) dx = \frac{12}{l^3} \text{이므로 } (k_{11})_b \text{는 } 13.23 \cdot EI_0 / l^3 \text{가 된다. 같은 방법으로 그림 1(a)의 비대} \end{aligned}$$

칭 변단면 보에서 $m=1$ 일 때, 마지막 요소의 consistent mass matrix 중 $(m_{11})_c$ 의 수치적분은 $\int_0^l [N_1]^2$

$\cdot \rho A_0 \left\{ 1 + 2 \frac{(x+19)}{20l} \right\} dx = 1.11287 \cdot \rho A_0 l$ 이다. 또한 $A(20) = A_0 \left(1 + 2 \frac{x}{L} \right) \Big|_{x=19.5l} \approx 2.95 A_0$
 이고, $\int_0^l N_1^2 dx = \int_0^l \left(\frac{4}{l^6} x^6 - \frac{12}{l^5} x^5 + \frac{9}{l^4} x^4 + \frac{4}{l^3} x^3 - \frac{6}{l^2} x^2 + 1 \right) dx = 0.3714l$ 이므로 $(m_{11})_c$ 의
 약산치는 $1.0956 \cdot \rho A_0 l$ 이 되는데, 수치적분 결과와 비교했을 때 오차는 약 0.08%로 무시할 수 있다.

4. 고유진동수 산정

식 (12)로 주어지는 요소의 절점력 vector와 절점변형 vector와의 관계식을 보 전체의 모든 요소에 관하여
 조합한 후 경계조건을 처리하면 보의 외력 vector $\{Q\}$ 와 변형 vector $\{\Delta\}$ 는 다음 식의 형태를 취한다.

$$\{Q\} = ([K_b] - \omega_0^2 [M_c])\{\Delta\} \quad (15)$$

자유진동에서는 $\{Q\} = \{0\}$ 으로 따라서 고유진동수 산정을 위한 식 (15)는 다음과 같이 된다.

$$([K_b] - \omega_0^2 [M_c])\{\Delta\} = \{0\} \quad (16)$$

식 (16)은 전형적인 고유치 문제(eigenvalue problem)를 표시하는 식으로 고유진동수 산정은 $\{\Delta\}$ 의 계수행렬
 (premultiplied matrix)이 행렬식(determinant)으로 0이 되어야 한다는 식으로부터 구하여 진다. 즉,

$$\det([K_b] - \omega_0^2 [M_c]) = 0 \quad (17)$$

computer를 이용한 반복법으로 기본진동수를 구하기 위하여 식 (17)을 다음과 같이 변형시킨다.

$$\det([K_b]^{-1} [M_c] - \frac{1}{\omega_0^2} [I]) = 0 \quad (18)$$

위에서 $[I]$ 는 단위행렬(identity matrix)을 의미한다.

식 (12)의 조합으로 얻어진 식 (17)이 변형된 식 (18)을 그림 1과 같은 변단면보에 적용한다. 그림 3은
 단순지지 비대칭 보에서 요소수의 증가와 고유진동수 계수들의 관계를 보여주는 예이다.

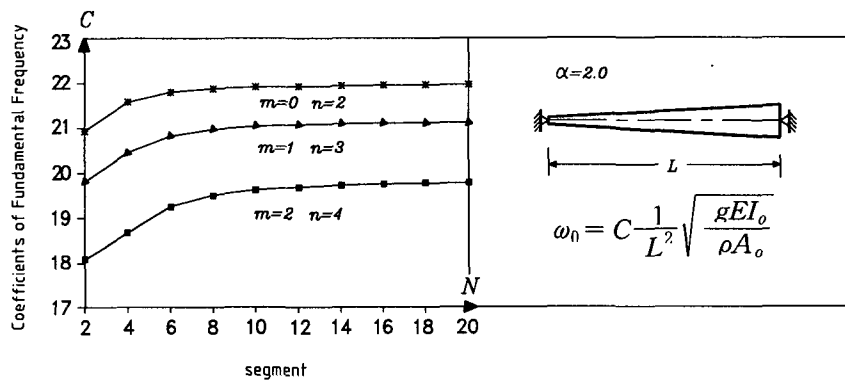


그림 3. 요소수의 증가와 수렴도

그림에서 알 수 있듯이 $N=16$ 부터는 거의 일정값을 유지하므로 여기서는 $N=20$, 즉 변단면 보를 20등분

한 다음 $\alpha=0.0$ 에서 $\alpha=2.0$ 까지 변할 때 이에 대응하는 고유진동수를 산정하였고 그 결과는 다음의 표 1. 과 같다. 이 표에서 C 는 뒤의 식(19)에서 알 수 있듯이 고유진동수 계수인데 “ C_{fem} ” 열(column)이 유한 요소법에 의한 결과이다. (지면관계상 그림 1(b)의 단순지지-고정 보만 계제)

5. 회귀식

서론에서 말한 것처럼 수치해석법에 의한 결과치는 어떤 특정 경우에만 적용할 수 있고 따라서 일반화 할 수 없음이 보통이다. 여기서는 구조설계 실무에 종사하는 기술자가 그림 1 과 같은 변단면 보의 동적 구조해석이나 진동해석시에 도움이 될 수 있도록 고유진동수 ω_0 를 구하는 다음과 같은 추정식을 제안하였다.

$$\omega_0 = C(\alpha, n) \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{gEI_0}{\rho A_0}} \quad (19)$$

$$C(\alpha, n) = (A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2) + (B_0 + B_1\alpha + B_2\alpha^2)n + (C_0 + C_1\alpha + C_2\alpha^2)n^2$$

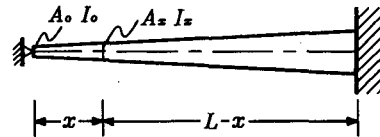
위 추정식중의 계수 A_i, B_i 및 C_i 는 표 1의 수치해석 결과 즉 C_{fem} 을 기본으로하여 회귀분석법으로 구하였으며 그 적합여부의 판정방법으로 택한 상관계수 (r)는 표 2의 마지막 열(column)과 같다.

표 1. 비대칭 변단면 보의 고유진동수
(그림 1(b) 단순지지-고정 보)

$$\omega_0 = C(\alpha, n) \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{gEI_0}{\rho A_0}}$$

α	(m,n)=(0,2)		(m,n)=(1,3)		(m,n)=(2,4)	
	C_{fem}	$C(\alpha, n)$	C_{fem}	$C(\alpha, n)$	C_{fem}	$C(\alpha, n)$
0.0	15.4178	15.4544	15.4178	15.4564	15.4178	15.4584
0.1	16.2833	16.2955	16.3905	16.4015	16.4976	16.5079
0.2	17.1350	17.1298	17.3439	17.3395	17.5553	17.5512
0.3	17.9712	17.9573	18.2860	18.2702	18.6033	18.5882
0.4	18.7967	18.7779	19.2128	19.1937	19.6408	19.6190
0.5	19.6140	19.5918	20.1317	20.1100	20.6667	20.6436
0.6	20.4176	20.3987	21.0369	21.0190	21.6793	21.6618
0.7	21.2118	21.1989	21.9346	21.9209	22.6904	22.6739
0.8	22.0012	21.9922	22.8275	22.8155	23.6881	23.6796
0.9	22.7807	22.7786	23.7055	23.7029	24.6812	24.6792
1.0	23.5553	23.5583	24.5808	24.5831	25.6712	25.6725
1.1	24.3237	24.3310	25.4470	25.4560	26.6514	26.6595
1.2	25.0864	25.0970	26.3093	26.3217	27.6268	27.6402
1.3	25.8390	25.8561	27.1662	27.1802	28.5993	28.6148
1.4	26.5921	26.6084	28.0127	28.0315	29.5668	29.5830
1.5	27.3377	27.3539	28.8596	28.8756	30.5306	30.5451
1.6	28.0793	28.0925	29.7010	29.7124	31.4875	31.5008
1.7	28.8158	28.8242	30.5339	30.5420	32.4459	32.4503
1.8	29.5520	29.5492	31.3650	31.3644	33.3949	33.3936
1.9	30.2795	30.2673	32.1946	32.1796	34.3433	34.3306
2.0	31.0058	30.9786	33.0163	32.9876	35.2938	35.2614

표 2. 회귀상수 (식 (19))



$$A_x = A_0 \left(1 + \alpha \frac{x}{L}\right)^m$$

$$I_x = I_0 \left(1 + \alpha \frac{x}{L}\right)^n$$

	A_0	A_1	A_2	$r \approx 1.0$
	단순-고정	15.4504	6.3519	
	$B_0=0.0020$	$B_1=1.0501$	$B_2=-0.1888$	$r \approx 1.0$
	$C_0=0$	$C_1=-0.0016$	$C_2=0.0339$	
고정-단순	$A_0=15.4456$	$A_1=8.5331$	$A_2=-0.3570$	$r \approx 1.0$
	$B_0=0.0067$	$B_1=-1.1088$	$B_2=0.0174$	
	$C_0=-0.0010$	$C_1=0.0099$	$C_2=-0.0058$	
고정-고정	$A_0=22.4114$	$A_1=10.8573$	$A_2=-0.3066$	$r \approx 1.0$
	$B_0=0.0209$	$B_1=-0.1622$	$B_2=-0.2293$	
	$C_0=-0.0053$	$C_1=0.0421$	$C_2=0.0572$	

식 (19)에 표 2의 회귀상수값을 대입하면 그림 1의 각 경우에 해당하는 고유진동수를 추정할 수 있는데 표 1의 $C(\alpha, n)$ 이 이들 값이다. 식 (19)의 추정식이 유한 요소법에 의한 고유 진동수를 얼마나 오차없이 반영하는가를 나타내는 상관계수가 표 2의 r 이다. 상관계수 r 은 다음의 식 (20)으로 계산된 값이다. 여기에서 \bar{C}_{fem} 과 $\bar{C}(\alpha, n)$ 은 각각 C_{fem} 과 $C(\alpha, n)$ 의 산술 평균값이다.

$$r = \frac{\sum \{(C_{fem} - \bar{C}_{fem}) \cdot (C(\alpha, n) - \bar{C}(\alpha, n))\}}{\sqrt{\{\sum (C_{fem} - \bar{C}_{fem})^2\} \{\sum (C(\alpha, n) - \bar{C}(\alpha, n))^2\}}} \quad (20)$$

6. 결론

본 연구에서는 유한요소법을 사용하여 비대칭 변단면 보의 고유 진동수 값을 구하였다. 또한, 그 결과를 회귀분석하여 구조물의 동적 해석 종사자들이 간단히 이용할 수 있는 이차식을 제안했다. 이상의 결과를 종합하면 다음과 같다.

- 1) 일반적으로 taper parameter α 가 증가할 때, 고유진동수 값이 크게 나타났다.
- 2) 단면의 성질에 따른 고유진동수는 단순-고정, 고정-고정인 경우는 sectional property parameter n 이 증가함에 따라, 고정-단순인 경우는 n 이 감소함에 따라 고유진동수가 크게 나타났다.
- 3) 제안식과 유한요소법에 의한 결과와의 상관계수는 거의 1.0에 가까웠다. 이것은 제안된 식을 이용하더라도 유한요소법에 의해 구한 고유 진동수와 비교하여 오차가 거의 없으면서도 간단한 방법으로 변단면 부재의 고유진동수를 구할 수 있음을 보여준다.

참고문헌

- (1) Demeter G. Fertis, *Dynamics and Vibration of Structures*, John Wiley & Sons, 1973.
- (2) Daniel J. Gorman, *Free Vibration Analysis of Beams and Shafts*, John Wiley & Sons, 1975.
- (3) Mario Paz, *Structural Dynamics; Theory and Application*, Van Nostrand Reinhold, 1991.
- (4) W.C. Hurty and M.F. Rubinstein, *Dynamics of Structures*, Prentice Hall, 1964.
- (5) M. A. De Rosa and N. M. Auciello, "Free Vibration of Tapered Beams with Flexible Ends", *Computers & Structures*, Vol. 60. No. 2, pp. 197~202, 1995.
- (6) R. O. Grossi and R. B. Bhat, "A Note on Vibrating Tapered Beams", *Journal of Sound and Vibration*, No. 147, pp. 174~178, 1991.
- (7) S. K. Jang and C. W. Bert, "Free Vibration of Stepped Beams; Exact and Numerical Solutions", *Journal of Sound and Vibration*, No. 130, pp. 342~346, 1989.
- (8) M. Gürgöze, K. Özgür and H. Erol, "On the Eigenfrequencies of a Cantilevered Beam with a Tip Mass and In-span Support", *Computers*, Vol. 56. No. 1, pp. 85~92, 1994.
- (9) 사 중 엽, Professor's Analysis Home Page, ch.4 회귀분석. ch.5 수치적분, 1998.
- (10) 안 성 기, 김 순 철, 이 수 곤 "단순지지 변단면보의 고유진동수 산정", *한국전산구조공학회 춘계 학술 발표회 논문집*, pp137~144, 1999.