한국전산구조공학회
1999년도 가을학술발표회 논문집

# 자기장에 의한 강판의 좌굴거동

# Buckling of Steel Plates in Magnetic Fields

이 종 세* 정 샤오징**
Lee, Jong Seh Zheng, Xiao-Jing

## ABSTRACT

An analytical study on the stability of steel plates in the presence of magnetic fields is carried out based on a model which accounts for the nonlinear field-structure interaction. The resultant force system arising from the interaction between the magnetic fields and ferromagnetic plates is derived using the variational principle. The bending and buckling problems of steel plates in oblique magnetic fields are investigated with the aid of the finite element method. Numerical results reveal some interesting features of the magnetoelastic buckling phenomenon.

## 1. 서론

강재로 만들어진 평판이 자기장 안에 놓이면 자기장과 강판의 자성화 간의 상호작용에 의해 자기력 즉 자기적 하중이 발생하게 된다. 자기장의 크기가 작을 때는 평판이 원래의 직선형태를 유지하며 안정하다. 그러나 이 자기장의 크기가 커지면 강판내의 탄성력과 자기력이 평형을 이루는 임계 상태에 도달한다. 이때 강판의 형태는 불안정하게되고 좌굴이 발생하게 된다. 이러한 자기탄성학적 불안정은 자기부상열차, 핵융합로, MHD(자기수리동력학적)발전기 등의 강한 자기장을 수반하는 고등에너지 구조물의 설계에 고려해야 할 중요한 현상이다(Moon 1984; Lee at al. 1993; Lee 1996).

일정한 연직 자기장내에 놓인 강판의 자기탄성학적 좌굴현상의 실험적 연구가 Moon & Pao(1968)에 의해 처음으로 수행되었으며 또한 좌굴임계자기장에 관한 해석모델이 제안되었다. 그러나 그들이 제안한 해석모델은 임계자기장의 크기가 강판의 길이 대 두께비의 3/2승에 비례하는 경향은 실험결과와 잘 일치하고 있으나 실제 임계자기장값은 실험치에 비해 약 100%의 오차를 보여주고 있다. 이와 같은 실험치와 이론치 간의 차이를 설명하기 위해 많은 연구가 수행되고 이 차이를 불완전성 감도, 혹은 유한한 폭에 기인한 기하학적 요인 등이 원인이라고 주장했으나 이 모든 요인들을 합하여도 이 차이를 완전히 설명하지 못하고 있다(Dalrymple et al. 1974 ; Miya et al. 1978, 1980).

본 논문에서는 실험치와 이론치의 차이를 설명하고자 하는 시도의 일환으로 경사로 가해지는 자기장안에서의 강판의 변형을 예측할 수 있는 해석적인 모형을 개발하였다. 이 해석 모형을 수치적으로 구현하여 자장내에서의 강판의 휨과 좌굴거동을 고찰하였다. 해석결과에 의하면 경사자기장내에서 강판은 불안정해지기 전에 먼저 휨변형을 경험하는 것으로 나타났다. 이것은 이전에 수행된 여러 연구에서 내린 결론과 다른 결과이다. 연직으로 가해지는 자기장내에서의 강판의 좌굴해석을 수행한 결과 실험치와 잘 일치하는 결과를 얻었다. 마지막으로 경사로 가해지는 자장의 경사각이 임계자기장의 크기에 미치는 영향을 조사하였다.

## 2. 지배방정식

강철로 만들어진 얇은 평판이 자기장 $\mathbf{B}_0$ 내에 놓여져 있다고 하자. 이때 이 강판은 선형자성을 가진 재료이며 전기장, 전위의 분포, 혹은 전류가 없다고 가정한다.

* 한양대학교 건설교통공학부 교수
** Lanzhou대학교 구조역학과 교수

$$\mathbf{M}^+ = \chi \mathbf{H}^+ \ , \ \mathbf{B}^+ = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}^+ \ \text{ in } \ \Omega^+ \qquad (1)$$

$$\mathbf{B}^- = \mu_0 \mathbf{H}^- \quad \text{ in } \ \Omega^- \qquad (2)$$

여기서, 첨자 "+"와 "−"는 각각 판의 내부와 외부를 표시하며, **M**은 자화, **B**는 자기밀도, **H**는 자기장, $\chi$는 평판의 대자율, $\mu_0$는 진공에서의 자기 투과성을 나타내며, $\mu_r = \chi + 1$.
자기탄성적 시스템의 총에너지는 다음 식으로 표현 할 수 있다.

$$\Pi\{\phi,\omega\} = \frac{1}{2}\int_{\Omega^-(\omega)} \mu_0 (\nabla\phi^-)^2 dv + \frac{1}{2}\int_{\Omega^+(\omega)} \mu_0\mu_r (\nabla\phi^+)^2 dv + \int_{S_0} \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0\phi^- ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_{S^+} D(\overline{\nabla}^2\omega)^2 dxdy - \int_{S^+} D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x \partial y}\right)^2\right] dxdy \qquad (3)$$

여기서 $\phi = \phi(x,y,z)$는 자기 스칼라 포텐샬을 나타내며 $-\nabla\phi = \mathbf{H}$의 관계이다. $S_0$는 평판을 내포하고 있는 공간의 표면으로서 평판으로부터 충분히 멀리 떨어져 있으며, $S$는 평판의 표면을, 그리고 $S^+$는 평판의 중립면을 나타낸다.

$$\delta\Pi\ \{\phi,\omega\} = 0 \qquad (4)$$

로부터 다음과 같은 지배방정식을 구할 수 있다.

$$\nabla^2\phi^+ = 0 \quad \text{ in } \ \Omega^+ \ , \qquad (5)$$

$$\nabla^2\phi^- = 0 \quad \text{ in } \ \Omega^- \ , \qquad (6)$$

$$\phi^+ = \phi^- \ , \ \mu_r \frac{\partial\phi^+}{\partial n} = \frac{\partial\phi^-}{\partial n} \quad \text{ on } \ S \qquad (7)$$

$$-\nabla\phi^- = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0 \quad \text{ on } \ S_0 \qquad (8)$$

$$D\overline{\nabla}^2\overline{\nabla}^2\omega(x,y) = \frac{\mu_0\mu_r\chi}{2}\{[H_n^+(x,y,h/2)]^2 - [H_n^+(x,y,-h/2)]^2\}$$
$$-\frac{\mu_0\chi}{2}\{[H_r^+(x,y,h/2)]^2 - [H_r^+(x,y,-h/2)]^2\} \quad \text{ in } \ S^+ \qquad (9)$$

여기서 $h$는 평판의 두께, $H_n$과 $H_r$은 평판표면에서 자기장 **H**의 수직과 접선성분이다. 윗식에서 주의할 점은 영역 $\Omega^+$과 표면 $S$의 좌표는 평판이 변형된 상태에서 계산되어야 한다는 점이다. 따라서 자기장이 평판의 변형에 의존하므로 식(5)~식(9)에서의 자기탄성적 상호작용은 비선형으로 연결 되 있음에 주목해야한다.

## 3. 수치계산

자기장
여기서는 평판의 자성화와 변형에 의존하는 영역 $\Omega^+$과 $\Omega^-$내에서의 자기장의 분포를 결정하기로 한다. 자기에너지에 대한 functional은 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$F[\phi] = \frac{1}{2}\int_{\Omega^+(\omega)} \mu_0\mu_r (\nabla\phi^+)^2 dv + \frac{1}{2}\int_{\Omega^-(\omega)} \mu_0 (\nabla\phi^-)^2 dv + \int_{S_0} \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0\phi^- ds \qquad (10)$$

주어진 평판의 변형 상태에 대해 식(5)~(8)을 만족하는 자기장은 식(10)으로 주어진 functional을 최소화 한다. 유한요소법을 이용하여 3차원 영역을 분할하고 다음과 같은 행렬식을 구할 수 있다.

$$[\mathbf{K(w)}][\Phi] = [\mathbf{B}_0] \qquad (11)$$

윗식을 이용하여 절점에서의 자기 포텐샬 함수$\phi$의 값을 구한다. 여기서 [$\Phi$]는 미지 자기포텐샬 벡터, [**K**]는 강성행렬, [$\mathbf{B}_0$]는 $S_0$에 가해진 자기장 벡터를 나타낸다.

여기서 [**K**]는 [**w**]의 함수로 표현되어 있음에 주목해야 한다. [**w**]는 평판의 중립면에서의 절점의 수직 변위를 나타낸다. 따라서 절점 변위 [**w**]가 주어진다면 식(11)에 의해 자기장의 분포를 계산 할 수 있다.
평판자기장 계산을 위한 3차원 유한요소에서 평판의 중립면과 일치하는 사각형 면적을 평판요소로 하여 요소 강성도 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Q}\\ \Theta\end{bmatrix} = [\mathbf{A}]_e \begin{bmatrix}\mathbf{w}\\ \mathbf{M}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[\mathbf{A}_{Qw}]_e & [\mathbf{A}_{QM}]_e\\ [\mathbf{A}_{\Theta w}]_e & [\mathbf{A}_{\Theta M}]_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{w}\\ \mathbf{M}\end{bmatrix}_e \qquad (12)$$

요소 행렬을 전체 평판에 대해 조합하고 경계조건을 고려하면 다음과 같은 행렬식을 구할 수 있다.

$$[\mathbf{A}]\begin{bmatrix}\mathbf{w}\\ \mathbf{M}\end{bmatrix} = [\mathbf{P}] \qquad (13)$$

여기서 [**A**]는 평판의 연직변위를 위한 hybrid 유한요소의 강성도 행렬이고, [**M**]은 휨모멘트, [**P**]는 자기력 벡타를 나타낸다. 앞서 언급한 바와 같이 자기력이 자기장의 분포와 비선형 의존관계에 있으므로 식(11)과 (13)은 비선형으로 연계되어있음을 알 수 있다. 따라서 이 비선형으로 연계된 두 식을 동시에 풀기 위해서 반복법을 사용하여 해를 구하고자 한다.

## 4. 수치계산예와 결과

기존의 결과 (Miya at al. 1980 ; Moon & Pao 1968)와 비교를 위해 자기장에 대해 연직으로 설치된 평판의 좌굴을 먼저 고려하고 표1에 정리하였다. 표에서 보는 바와 같이 계산 결과가 실험치와 잘 일치함을 알 수 있다. 계산에 사용된 물질 상수로는 $E=1.2\times10^5 MPa$, $\nu=0.3$, $\mu_r=1.0\times10^4$이고 기하적 상수는 표1에 표시하였다. 본 논문에서 계산한 결과가 실험치보다 약간 크게 나타나고 있음을 알 수 있는데 이는 자기장이 평판에 연직방향으로부터 일정한 각을 가지고 있는 경우를 고려한 결과를 이용하여 설명하기로 한다.
한쪽이 고정된 평판이 경사를 가진 자기장 $\mathbf{B}_0=B_{0x}\mathbf{i}+B_{0z}\mathbf{k}$ 속에 놓였을 경우의 자기탄성 거동을 고려하였다. 평판의 자유단의 연직변위를 몇 개의 자기장의 입사각, $\alpha$값에 대해 자기장의 함수로 그림1에 표시하였다. 그림1에서 보는 바와 같이 평판 자유단의 연직변위는 $\alpha$가 양의 값으로부터 음의 값으로 바뀜에 따라 대칭성을 보이고 있다. 평판의 변형과 자기장의 크기의 관계는 비선형이고, 실험결과(Moon & Pao 1968)에서 보는 바와 같이 평판이 좌굴하기전 휨 변형을 유발한다.
그림2는 자기장의 경사각 $\alpha$에 따른 임계자기장의 크기를 보여주고 있다. 임계자기장의 값은 각$\alpha$가 커짐에 따라 작아지고 있다. 이것은 연직자기장 내에서의 평판의 실험에 의한 임계자기장의 크기가 이론치에 비해 다소 작아짐을 의미한다.

**표1. 임계자기장 값의 비교**

| (m) | b(m) | h(m) | Experiment Miya et al. (1980) | Theoretical Results (Error in %) | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Moon et al.(1968) | This paper |
| 0.10 | 0.01 | 0.0004 | 1.03 | 1.07 (3.9) | 1.08 (4.9) |
| 0.15 | 0.01 | 0.0012 | 2.31 | 3.01 (30.3) | 2.32 (0.4) |
| 0.10 | 0.01 | 0.0012 | 4.06 | 5.54 (36.3) | 4.25 (4.7) |
| 0.15 | 0.01 | 0.0016 | 2.91 | 4.64 (59.5) | 3.08 (5.8) |
| 0.10 | 0.01 | 0.0160 | 5.48 | 8.83 (61.1) | 5.90 (7.7) |
| 0.15 | 0.01 | 0.0020 | 3.89 | 6.49 (66.8) | 4.09 (5.1) |
| 0.10 | 0.01 | 0.0020 | 7.02 | 11.9 (69.5) | 7.34 (4.6) |
| 0.15 | 0.01 | 0.0025 | 5.02 | 9.06 (80.5) | 5.46 (8.8) |
| 0.10 | 0.01 | 0.0025 | 9.27 | 16.7 (79.8) | 9.81 (5.6) |

왜냐면, 실험에서는 자기장이 평판에 대해 완전히 수직이 될 수 없기 때문이다. 본 논문에서 자기장의 크기의 함수로 표시한 자유단 연직변위의 형태가 실험결과를 매우 정확히 표현하는 점을 볼 때 표1에 표시한 실험결과는 이처럼 연직이 아닌 자기장의 영향을 받고 있음을 나타내고 있다.

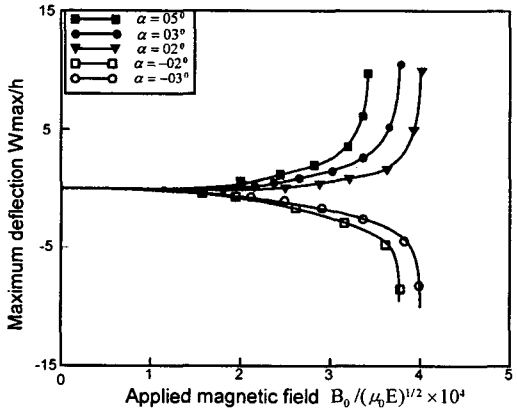


그림2. 평판 자유단의 변위 vs. 자기장

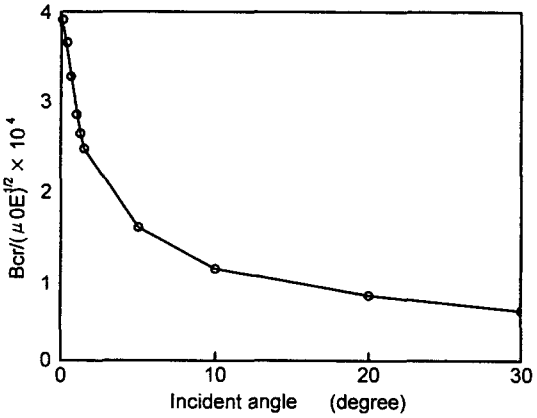


그림3. 임계 자기장 vs. 경사각

## 5. 결과

본 논문에서는 강판과 자기장의 상호작용에 의해 발생하는 자기탄성적 좌굴거동을 규명하기 위하여 연직방향이 아닌 자기장안에 놓인 강판의 휨변형해석 모델을 제안하고 유한요소법을 사용하여 수치적으로 구현하였다. 자기장의 분포가 강판의 변형에 의존하므로 자기탄성학적 상호작용은 비선형으로 연계되있음을 보였다. 수치해석결과 강판은 자기장 안에서 휨변형을 경험한 후 좌굴이 유발됨을 알 수 있다. 자기장과 평판사이의 각α가 커질 때 임계자기장은 작아지고 좌굴개시 전 휨변위는 커짐을 알 수 있었다. 연직 자기장의 경우 본 논문에서 제안한 해석모델에 의한 결과가 실험치와 잘 일치함을 알 수 있다.

## 6. 참고문헌

Dalrymple, J. M., Peach, M.O. and Viegelahn, G. L. (1974), "Magnetoelastic buckling of thin magnetically soft plates in cylindrical mode", *J. Appl. Mech.*, 41, 145-150

Lee, J. S. (1996), "Dynamic stability of conducting beam-plates in transverse magnetic fields", *ASCE. J. of Eng. Mech.* 122 (2), 89-94

Lee, J. S., Maugin, G. A. and Shindo, Y. (1993) Eds., *Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures*, ASME, AMD 161, New York.

Miya, K., Hara, K. and Someya, K. (1978), "Experimental and theoretical study on magnetoelastic buckling of ferromagnetic cantilevered beam-plate", *J. Appl. Mech.*, 45, 355-360

Miya, K., Takagi, T. and Ando, Y. (1980), "Finite-element analysis of magnetoelastic buckling of ferromagnetic beam-plate", *J. Appl. Mech.*, 47, 377-382

Moon, F. C. and Pao, Y. H. (1968), "Magnetoelastic buckling of a thin plate", *J. Appl. Mech.*, 35, 53-58