한국전산구조공학회
1999년도 가을학술발표회 논문집

철근 콘크리트 연속보의 최소경비설계를 위한 DCOC의 적용

Application of DCOC for Minimum Cost Design of Reinforced Concrete Continuous Beam

정 훈* 조 홍 동** 한 상 훈***
Chung, Hoon Cho, Hong-Dong Han, Sang-Hoon

ABSTRACT

This paper describes the application of discretized continuum-type optimality criteria (DCOC) for the reinforced concrete continuous beams. The cost of construction as objective function which includes the costs of concrete, reinforced steel, formwork is minimized. The design constraints include limits on the maximum deflection in a given span, on bending and shear strengths, optimality criteria is given based on the well known Kuhn-Tucker necessary conditions, followed by an iterative procedure for designs when the design variables are the depth and the steel ratio. The self-weight of the beam is included in the equilibrium equation of the real system. Two numerical examples of reinforced concrete continuous beams with rectangular cross-section are solved to show the applicability and efficiency for the DCOC-based technique

1. 서 론

지금까지의 구조물 최적화는 크게 수학적계획법을 이용한 수치적인 기법과 최적성규준에 의한 해석적 기법의 두 갈래로 발달되어왔다. 일반적으로 수치적 방법들은 설계변수와 제약조건의 수가 제한적인 경우에 해석적 방법들보다 좀 더 효율적이라고 알려져 왔다. 그러나, 설계변수의 수가 증가하게 되면 최적해에 도달하기 위해 재설계과정에 요구되는 시간과 구조 재해석의 수가 증가하게 되어 수치적 구조 최적화 방법들의 능력에 제한을 받게 된다. 하지만 설계변수와 제약조건의 수가 많아지면 해석적 방법들은 일반적으로 효율성이 더 좋게 된다. 이러한 점은 응력제약들과 하나의 변위제약을 갖는 문제들에 연속형 최적성규준(Continuum-type Optimality Criteria, COC)방법과 유한요소해석을 연결하여 반복 알고리즘을 개발한 Rozvany와 Zhou[1] 에 의해 입증되었다. 그러나, COC에 근거한 방법들은 이산성향을 갖는 복잡한 구조물의 수반시스템(adjoint system)의 해석에서 기변형율 효과를 다루는데 어려움이 있기 때문에 실제 구조물에의 적용성이 결여되어, 간단한 구조물에만 제한적으로 적용되었다. 이러한 제한적 요소를 제거하기 위하여 이산성 연속형 최적성 규준(Discretized Continuum-type Criteria, DCOC)에 근거한 방법들이 Zhou와 Rozvany[2,3]에 의해 개발되었다. 이들은 구조시스템에 대한 일반적인 최적성 규준을 유연도정식화에 의한 구조해석과 Kuhn-Tucker 필요조건

* 충북대학교 토목공학과 석사과정
** 충북대학교 토목공학과 박사수료
*** 충북대학교 토목공학과 교수, 정회원

을 이용하여 유도하였다. 그러나, 실제 수치과정에서의 구조해석은 보다 효율적인 강성도법을 이용하여 수행되고 있다.

본 논문에서는 DCOC 방법을 철근콘크리트보의 최소경비설계에 적용하였다. 여기서, 제반 설계기준은 콘크리트구조설계기준을 따랐으며, 수학적 유도과정에서의 용어와 표기법은 Zhou와 Rozvany[2,3]를 따랐다. 최소화되는 비용에는 콘크리트, 철근, 거푸집에 관한 경비가 포함되고, 설계제약조건으로는 주어진 지간에서의 최대 처짐에 관한 제약과 휨 및 전단강도에 관한 제약, 그리고 설계변수에 대한 상한과 하한치에 관한 제약을 고려하였다.

2. 철근콘크리트 연속보의 최적설계문제 형성

2.1. 일반적인 최적화 문제

한 개의 변위제약과 몇몇 강도제약을 갖는 RC보의 최소비용설계를 위한 일반적인 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Minimize} \quad \phi(z) : z \in z_x \tag{1}$$

$$\text{Subject to} \quad u_m - \Delta_{al} \le 0 \tag{2a}$$

$$q_j^e(z) \le 0 \tag{2b}$$

$$z^l \le z \le z^u \tag{2c}$$

여기서, $\phi(z)$는 목적함수, z는 요소 $z_i\,(i=1,\ldots,n_e)$를 갖는 설계변수벡터, z_x는 그것의 유용영역, u_m과 Δ_{al}은 주어진 절점에서의 처짐과 허용처짐값이다. 그리고 $q_j^e(z)$, $[j=1,\ldots,J_e]$는 e번째 요소에서 j개의 강도제약조건을 나타내며, $e=1,\ldots,N_e$에서 N_e는 이산되어 있는 부재내의 요소들의 수이다. z^u과 z^l는 설계변수의 상하한치를 나타낸다.

1) 처짐제약

지정된 자유도에서 처짐 u_m은 가상일의 원리를 이용하여 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$u_m = \{\overline{F}_f\}^T[f]\{F_f\} + \{\overline{F}_f\}^T\{\hat{u}_f\} \tag{3}$$

여기서, $\{F_f\}$는 실제하중벡터에 상응하는 실제절점력벡터이고, $\{\overline{F}_f\}$는 그 절점에 재하된 가상 dummy 하중벡터와 상응하는 수반절점력벡터이다. 그리고 $[f]$는 전체 유연도 매트릭스이며, $\{\hat{u}_f\}$는 초기변위벡터이다.

만족되어야 하는 실제와 수반시스템의 평형방정식은 다음 식과 같다.

$$\{P\} = [B]\{F_f\} \tag{4}$$

$$\{\overline{P}^v\} = [B]\{\overline{F}_f\} \tag{5}$$

여기서, $[B]$는 평형 매트릭스 또는 정역학적 매트릭스이다.

2) 강도제약

강도제약은 일반적으로 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$q_j^e = \{R_j^e\}^T\{F_f^e\} + \{\hat{R}_j^e\}^T\{\hat{F}_j^e\} - \hat{c}_j \tag{6}$$

여기서, $\{ R_j^e \}$는 구조요소의 상호단면특성과 재료의 강도에 의한 절점력에서 j번째 강도제약에 대한 저항력을 관련시키는 벡터이고, $\{ \hat{F}_j^e \}$는 요소내에 적용된 분포하중에 의해 발생하는 지정된 점에서의 힘이다. $\{ \hat{R}_j^e \}$는 $\{ \hat{F}_j^e \}$에서 j번째 강도제약에 대한 저항력 관련 벡터이다. $\hat{c}_j$는 j번째 제약에 대한 임계하중과 저항력의 비(比)에 관한 상수이다.

설계변수의 한계제약과 식 (3), (4), (5), (6)에 기초하여, 최적화 문제 식(1)은 증대 라그랑지안(augmented Lagrangian)을 사용하여 수학적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

Minimize $\bar{\Phi} =$

$$\begin{aligned}
&\phi(z) + \mu\left[\{ \bar{F}_f \}^T [f] \{ F_f \} + \{ \bar{F}_f \}^T \{ \hat{u}_f \} - \Delta_{al} + \eta\right] \\
&+ \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{J_e} \lambda_j^e \left[\{ \bar{\bar{R}}_j^e \}^T \{ F_f \} + \{ \hat{R}_j^e \}^T \{ \hat{F}_j^e \} - \hat{c}_j + \omega_j^e\right] \\
&+ \{\alpha^r\}^T [\{ P \} - [B] \{ F_f \}] + \{\alpha^v\}^T [\{ \bar{P}^v \} - [B] \{ \bar{F}_f \}] \\
&+ \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_e} \beta_i^e (-z_i^e + z_{il}^e + \underline{s}_i^e) + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_e} \gamma_i^e (z_i^e - z_{iu}^e + \bar{s}_i^e)
\end{aligned} \tag{7}$$

여기서, μ, λ_j^e, $\{\alpha^r\}$, $\{\alpha^v\}$, β_i^e와 γ_j^e는 라그랑지 승수이며, η는 상수 이완변수이고, ω_j^e, $\underline{s}_i^e$, $\bar{s}_i^e$는 이완함수이다. 기본변수는 요소 $z_i (i = 1, \ldots, n_e)$를 포함하는 요소단면 벡터 z와 실제시스템의 요소절점력 $\{ F_f \}$, 그리고 수반시스템의 요소절점력 $\{ \bar{F}_f \}$이다.

2.2. 최적성 규준 유도

정류해를 갖기 위한 필요조건은 Kuhn-Tucker 조건에 의해 다음과 같이 주어진다.

1) z_i에 의한 $\bar{\Phi}$의 변분

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z_i^e} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \phi^e}{\partial z_i^e} - \mu\left[\{ \bar{F}_f^e \}^T \left[\frac{\partial f}{\partial z_i^e}\right] \{ F_f^e \} + \{ \bar{F}_f^e \}^T \left\{\frac{\partial \hat{u}_f^e}{\partial z_i^e}\right\}\right] \\
&+ \sum_{j=1}^{J_e} \lambda_j^e \left[\left\{\frac{\partial R_j^e}{\partial z_i^e}\right\}^T \{ F_f^e \} + \left\{\frac{\partial \hat{R}_j^e}{\partial z_i^e}\right\}^T \{ \hat{F}_j^e \}\right] - \beta_i^e + \gamma_i^e = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

2) F_f에 의한 $\bar{\Phi}$의 변분

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial F_f} = 0$$

$$\mu [f] \{ \bar{F}_f \} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{J_e} \lambda_j^e \{ \bar{\bar{R}}_j^e \} - [B]^T \{\alpha^r\} = 0 \tag{9}$$

3) $\bar{F}_f$에 의한 $\bar{\Phi}$의 변분

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{F}_f} = 0$$

$$\mu\left([\ \mathrm{f}\ ]\{\ \mathrm{F}_f\}+\{\ \hat{\mathrm{u}}\ \}_f\right)-[\ \mathrm{B}\ ]^T\{\alpha\}^v=0 \tag{10}$$

최적성 규준인 식 (9)와 (10)은 증대 라그랑지안 (7)에 포함되지 않은 수반시스템과 실제시스템의 적합방정식을 나타낸다.

2.3. 깊이와 철근비 변수를 갖는 보

단면의 폭 z_1은 주어지고 깊이 z_2와 철근비 z_3를 설계변수로 하는 RC보의 경우, 목적함수는 콘크리트, 철근, 거푸집 비용의 총합으로 구성되며, 다음 식과 같다.

$$\psi^{em}(z_2^m,\ z_3^{em})=\left[z_1(z_2^m+d')+z_1z_2^mz_3^{em}(c_{sc}-1)+(z_1+2z_2^m+2d')c_{fc}\right]c_cL^{em} \tag{11}$$

여기서, 깊이 z_2는 지간에 대하여 일정하지만, 철근비 z_3는 요소에 따라 변화한다. 이를 구별하기 위하여 2개의 설계변수는 지간 m의 e번째 요소를 나타내는 윗첨자를 "em"을 사용하여 각각 z_2^m과 z_3^{em}으로 표시된다. 최종적으로 지간 m에서의 변수 z_2^m과 z_3^{em}의 변분에 대하여 최적성 규준 식 (8)은 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{e=1}^{N_e}\left[\ m_1L^{em}+z_3^{em}m_2L^{em}-\mu\frac{Q^{em}}{(l_2/3)(z_2^m)^4}-\lambda_1^{em}\frac{2|M_{max}^{em}|}{z_1(z_2^m)^3z_3^{em}(c_2-c_3z_3^{em})}\right.$$
$$\left.-\lambda_2^{em}\frac{|V_{max}^{em}|}{l_4(z_2^m)^2}-\beta_2^{em}+\gamma_2^{em}\right]=0 \tag{12}$$

그리고

$$\sum_{e=1}^{N_e}\left[m_2L^{em}z_2^m-\lambda_1^{em}\frac{(c_2-2c_3z_3^{em}|M_{max}^{em}|)}{z_1(z_2^m)^2(z_3^{em})^2(c_2-c_3z_3^{em})^2}-\beta_3^{em}+\gamma_3^{em}\right]=0 \tag{13}$$

3. 반복절차

3.1. 설계변수의 갱신

설계변수들의 분포를 통제하는 활성거동제약들의 가능한 조합은 다음과 같다. 처짐제약은 항상 활성($\mu>0$)이라고 가정한다.

1) 처짐제약과 휨강도제약에 의해 통제되는 요소 (D-M)
2) 처짐제약과 철근비 하한에 의해 통제되는 요소 (D-L)
3) 휨강도제약과 철근비 상한에 의해 통제되는 요소 (M-U)
4) 전단강도제약과 휨강도제약에 의해 통제되는 요소 (S-M)
5) 전단강도제약과 철근비 하한에 의해 통제되는 요소 (S-L)
6) 깊이의 하한과 휨강도제약에 의해 통제되는 요소 (L-M)
7) 깊이의 하한과 철근비 하한에 의해 통제되는 요소 (L-L)
8) 휨강도제약과 휨강도제약에 의해 통제되는 요소 (M-M)
9) 휨강도제약과 철근비하한에 의해 통제되는 요소 (M-L)

3.2. 라그랑지승수와 고정단력의 계산

활성제약과 어떤 다른 제약(처짐, 전단 또는 한계)과의 조합에 의해 통제되는 요소들에 대한 라그랑지 승수를 계산하고, 수반 초기변위에 상응하는 고정단력을 설계변수의 항으로 나타낸다.

3.3 전반적인 최적설계 절차

깊이와 철근비를 변수로 갖는 RC보의 최적화 문제를 풀기 위한 반복절차는 다음과 같다.

1) 문제를 정의하고 있는 기지정보와 초기 설계변수들을 입력, 그리고 계산과정 중 한 번으로 그치는 기하학적 매개변수들의 계산을 행한다.
2) 실제시스템과 수반시스템의 해석시, 첫 번째 반복에서 수반하중벡터는 단순히 변위제약과 상응하는 가상하중들을 취하고 이후 반복부터 수반하중과 가상하중과 그리고 응력제약이 활성인 요소의 수반초기변위에 의해 발생하게 되는 등가절점하중의 합으로 계산된다.
3) 라그랑지승수의 갱신과 전단계 반복으로부터 구조물의 지배영역(변위지배영역, 강도지배영역, 설계변수한계지배영역)을 정의한다. 단, 첫 번째 반복에서 모든 요소들은 변위지배를 받는 것으로 가정한다.
4) 단계 매개변수의 갱신(전단계의 각 지배영역 중 가장 큰 단면치수로 갱신).
5) 전단계 순환과 비교하여 지배영역이 바뀌었는가를 검사하고, 만약 바뀌었다면 현재의 라그랑지승수가 부적절한 값이므로 갱신된 단면 매개변수를 가지고 단계 3)과 4)를 다시 반복한다.
6) 비용과 단면에서의 변화에 관하여 수렴검사를 수행한다. 수렴하지 않을 경우 단계 2)로 되돌아가서 수렴기준이 동시에 만족할 때까지 반복한다.

4. 수치예제

4.1. 설계조건

제안된 DCOC방법의 알고리즘의 적용성 및 효율성을 보이기 위하여 단순보와 3경간 연속보에 대해서 초기단면을 변화시키고 경간의 분절요소수를 다르게 하며 최소화 문제를 수행하였다. 수치예에 적용되는 재료의 특성치와 경비 데이타는 Table 1과 같다.

Table 1. Material properties and cost data

재료 특성치		실제경비	상대경비*
콘크리트	철 근		
$f_{ck} = 240\,\mathrm{kgf/cm^2}$		$c_c = 53,550$ 원/$\mathrm{m^3}$	$c_{cc} = 1$
$E_c = 232,379\,\mathrm{kgf/cm^2}$	$f_y = 4,000\,\mathrm{kgf/cm^2}$	$c_f = 7,500$ 원/$\mathrm{m^2}$	$c_{fc} = 0.14$
$w_c = 2.45\,\mathrm{tf/m^3}$		$c_s = 2,844,991$ 원/$\mathrm{m^3}$	$c_{sc} = 53.13$

*콘크리트를 기준으로 한 철근과 거푸집의 상대경비

실제 재하하중은 하중계수가 고려된 $U=1.4D+1.7L$을 부과하였다. 강도감소계수는 휨과 전단에 대해 각각 0.85와 0.8을 고려하였다. 그리고, 단면의 폭은 30cm, 피복두께는 5cm이다. 최대 허용처짐의 한계는 $\Delta_{al}=l/480$의 경우를 고려하였다.

4.2. 단순보

본 논문의 신뢰성을 검증하기 위하여 지간길이 700cm인 단순보의 최적화를 수행한 후 이의 결과에서 얻은 단면 폭과 깊이를 이용하여 수계산에 의한 휨설계를 통해 지간 중앙에서의 철근량을 구하여 비교하였다. 이 두 개의 설계 결과를 Table 2에 나타내었으며, 다양한 초기 설계깊이를 가지고 수행한 결과가 Table 3에 요약되어 있다. Table 2와 3에서 알 수 있듯이 본 연구의 알고리즘은 신뢰성을 지님을 알 수 있다. 단순보의 최적화과정에서 요소의 수는 4개의 동일요소로 분절시킨 경우의 결과이며, 실제비용은 상대비용에 $c_cL_T^3$ (L_T는 보의 길이)을 곱해줌으로써 얻을 수 있다. 하중은 활하중 16kgf/cm, 사하중 12kgf/cm(자중은 별도)가 작용하였다.

Table 2. Design of simple beam

결과 / 경우	단면폭(cm)	유효깊이(cm)	소요 철근량(cm^2)			
			A_{s1}	A_{s2}	A_{s3}	A_{s4}
DCOC에 의한 최적설계	30.0	59.06	12.11	16.59	16.59	12.11
수계산에 의한 휨설계	30.0	59.06	16.59	16.59	16.59	16.59

Table 3. Minimum cost design of a simple beam of variable depth using DCOC

초기깊이(cm)	초기상대경비(원)	최종상대경비(원)	라그랑지승수	활성제약	반복횟수
30.0	3.1289E-03	5.4940E-03	1.5306E-02	D-M	22
50.0	5.0032E-03	5.4940E-03	1.5306E-02	D-M	22
80.0	7.8145E-03	5.4940E-03	1.5306E-02	D-M	21
100.0	9.6888E-03	5.4940E-03	1.5306E-02	D-M	21

4.3. 3경간 연속보

3경간 연속보의 설계는 강도설계법에 의해 연성파괴보로 설계되며, 이에 대한 설계결과는 다음과 같다. 초기설계비용은 3.4766×10^{4}에서 4.5761×10^{-4}의 최적설계비용으로 수렴하고, 라그랑지승수는 1.0358×10^{-2}로 수렴한다. 이 때 실제비용을 얻기 위해서는 $c_cL_T^3$(L_T는 연속보의 총길이(m))을 곱해주어야 한다. 연속보는 휨모멘트도와 최적 철근량의 분포를 비교할 수 있도록 지간당 10개의 요소로 분절하여 최적화를 수행하였다. Fig 1은 최적설계에 의한 자중을 포함한 계수하중에 상응하는 전단력도와 휨모멘트도를 보여주고 있다.

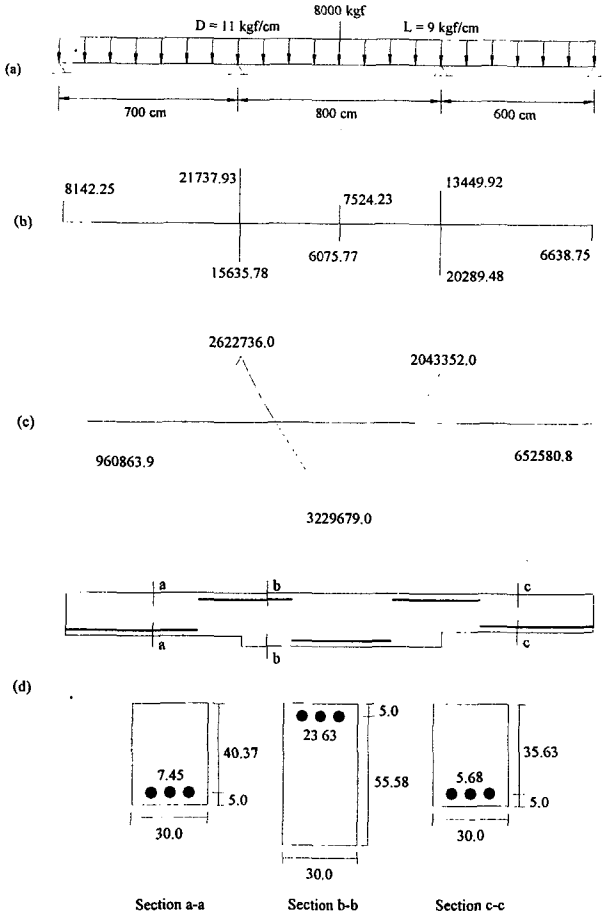

Fig 1. A three-span beam (a) geometry and service loading; (b) S.F.D.(kg) for optimum design; (c) B.M.D.(kg · cm) for optimum design; (d) optimal distribution of the depth and the steel area

Table 4. Design of continuous beam

경간	초기깊이 (cm)	유효깊이 (cm)	소요 철근량(cm^2) 활 성 제 약									
			A_{s1}	A_{s2}	A_{s3}	A_{s4}	A_{s5}	A_{s6}	A_{s7}	A_{s8}	A_{s9}	A_{s10}
1	30.0	40.37	4.24	6.19	7.45	7.45	7.35	5.88	4.24	5.86	13.14	23.63
			M-L	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-L	M-M	M-M	M-U
			A_{s11}	A_{s12}	A_{s13}	A_{s14}	A_{s15}	A_{s16}	A_{s17}	A_{s18}	A_{s19}	A_{s20}
2	30.0	55.58	15.24	5.84	8.76	14.55	19.27	19.27	15.29	10.14	5.84	11.60
			D-M	D-L	D-M	D-M	D-M	D-M	D-M	D-M	D-L	D-M
			A_{s25}	A_{s24}	A_{s23}	A_{s24}	A_{s25}	A_{s26}	A_{s27}	A_{s28}	A_{s29}	A_{s30}
3	30.0	35.63	20.85	12.03	5.85	3.74	4.16	5.47	5.68	5.68	4.80	3.74
			M-U	M-M	M-M	M-L	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-L

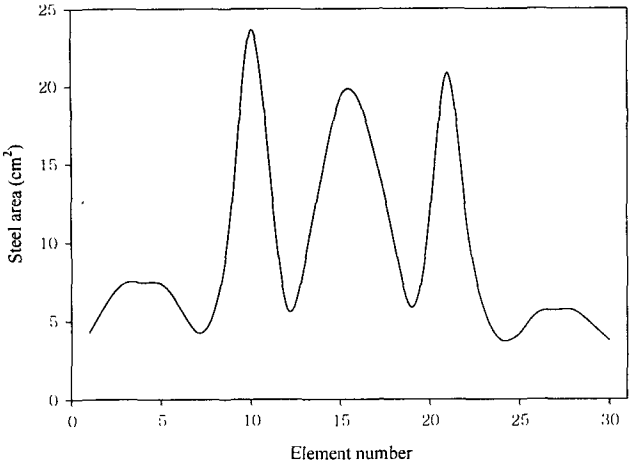

Fig 2. Optimum distribution of the steel area

5. 결 론

일반적으로 복잡한 구조물이나 거대구조물의 경우에 설계변수와 제약조건의 수가 상당히 증가하게 된다. 따라서 수치적 구조 최적화 방법은 능력에 제한을 받게 된다. 그러나, 본 논문에서 제시한 이산성 연속형 최적성 규준방법에 의한 최적설계는 설계변수와 제약조건의 수에 거의 영향을 받지 않을 뿐만 아니라 국부해로 빠질 염려가 거의 없다. Table 2, 3, 4를 통하여 알 수 있듯이 최적설계과정에서 알고리즘상의 모든 문제가 설계변수에 대해 명시적으로 표현되기 때문에 재설계과정에서 요구되는 시간을 크게 절약할 수 있어 그 효율성이 매우 좋다. 초기치의 변화에 영향을 받지 않고 거의 동일한 값으로 수렴하며 요소수의 증가에 따른 설계변수의 수와 제약조건의 수가 상당히 증가함에도 불구하고 고차의 비선형인 최적해에 빠르게 수렴함을 알 수 있다. 철근 콘크리트 연속보의 최소경비설계를 위하여 적용된 DCOC방법에 의한 설계 예에서 매우 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Rozvany, G.I.N., and Zhou, M., "Continuum-based Optimality Criteria(COC) Methods : An Introduction", *Structural Optimization* 1, pp. 1~26, 1993.
2. Zhou, M., and Rozvany, G.I.N., "DCOC : An Optimality Criteria Method for Large System Part I : Theory", *Structural Optimization* 5, pp. 12~25, 1992.
3. Zhou, M., and Rozvany, G.I.N., "DCOC : An Optimality Criteria Method for Large System Part II : Algorithms", *Structural Optimization* 6, pp. 250~262, 1993.
4. 한국콘크리트학회 · 대한건축학회, "콘크리트구조설계기준", 건설교통부, 1999.
5. 변동균, 신현묵, 문제길, "철근 콘크리트", 동명사, 1999.
6. William Weaver, Jr. and James M. Gere., "Matrix Analysis of Framed Structures", Champman & Hall, 1990.