

고속철도 교량의 동적거동

Dynamic Behavior of High-Speed Railway Bridges

김 성 재* 안 예 준** 신 영 석***
Kim, Sung Jae Ahn, Ye Jun Shin, Yung Seok

ABSTRACT

Dynamic responses of steel composite bridges for the Korean high-speed railway are analyzed by a modal analysis. The bridge is modeled as a simply supported beam structure and a vehicle of TGV-K is modeled using a moving load assumption. When the train is moving on a bridge, its deck shows resonance phenomenon at a critical velocity. However, it is observed that the dynamic response is greatly reduced at a special range of the span length. The results show that the reduction effect should be considered in designing the railway bridges. A parametric study of the dynamic response is performed for different span lengths, and specific train speeds that should be considered in designing the high speed railway bridge are suggested.

1. 서 론

도로교와는 달리 철도교는 교량을 통과하는 차량 하중이 상대적으로 크고 연속적이기 때문에 설계 시 상부 구조물의 동적 해석이 반드시 필요하다. 더불어 고속철도 교량의 경우 일반적인 철도교에 비하여 하중이 장대하고 220~380km/h의 고속으로 주행하기 때문에 동적 해석이 더욱 중요하다.

교량 상부구조의 동적 응답에 대한 초기연구에서 교량 상부구조는 단순보로 표현되었고, 열차하중은 하중군의 조합으로 적용되었다.⁽¹⁻⁴⁾ 이러한 모델은 Newmark의 β 방법과 중앙차분법(central difference method) 등 수치적분⁽⁵⁾을 이용하여 비교적 정확한 교량의 동적응답을 계산할 수 있도록 하였다. 철도교의 경우 하중군이 매우 균일하고 연속하므로 하중간격과 시간장에 따른 연구가⁽⁶⁾ 진행되었으며, 유한요소법을 이용하여 연속교에 대한 차량하중의 영향에 관한 연구사례도⁽⁷⁾ 보고되고 있다.

본 연구에서는 단경간 고속철도 교량을 단순지지된 합성보로 가정하고 한국형 고속철도 하중인 TGV-K 열차하중을 축하중의 조합으로 적용함으로써 교량의 동적 응답을 해석하였다. 교량의 공진을 유발하여 동적 응답을 과다하게 만드는 임계속도를 계산하여 설계 시 특별히 고려해야 할 주행 속도를 제시하였으며, 이러한 임계속도가 실제 주행 속도를 벗어나는 경우 2차적인 설계 속도의 선정 방법을 연구하였다. 열차의 속도에 관계없이 교량의 시간장이 특별한 범주에 속할 때 동적 하중이 감소하는 현상을 이용하여 공진을 감소시킬 수 있는 시간장을 제시하였으며, 시간장의 변화에 따른 다양한 동적 응답의 변화를 관찰하였다.

*정회원 · 아주대학교 대학원 건설교통공학과 석사과정
**정회원 · 아주대학교 대학원 건설교통공학과 박사과정
***정회원 · 아주대학교 공과대학 건설교통공학과 부교수

2. 모드 중첩법에 의한 동적해석

단경간 단순지지 교량의 경우 전체 교형을 단순보로 가정할 수 있으며 Euler-Bernoulli 보이론에 있어서 길이 방향의 단면이 일정하고 감쇠(damper)를 고려하지 않을 경우 운동방정식은 식 (1)과 같다.

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = f(x, t) \quad (1)$$

여기서, m 은 단위길이당 질량, EI 는 길이 방향의 탄성계수와 단면이차모멘트의 곱이다. 전체 길이 L 에 대하여 경계조건을 대입하여 식 (1)의 운동방정식에 대한 자유진동해석을 수행하면 고유진동수 (natural frequencies) w_n 과 진동모우드(vibration modes) $\phi_n(x)$ 를 구할 수 있다.

$$w_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2)$$

모달해석(modal analysis)에서의⁽⁸⁾ 시스템 수직 변위는 진동 모우드 $\phi_n(x)$ 와 시간함수 $q_n(t)$ 의 합성으로 식 (3)와 같이 표현된다.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (3)$$

모달댐핑 ξ 를 고려한 $q_n(t)$ 는

$$q_n(t) = \frac{1}{M w_{d,n}} \int_0^t F_n(\tau) e^{-\xi w_n(t-\tau)} \sin w_{d,n}(t-\tau) d\tau \quad (4)$$

여기서, $M = \int_0^L m(x) [\phi(x)]^2 dx$ $w_{d,n} = w_n \sqrt{1 - \xi^2}$

식 (4)에서 일반하중(generalized force)은 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_n(t) = \int_0^L \sum_{i=1}^r f_i(x, t) \phi_n(x) dx, \quad r=46 \quad (6)$$

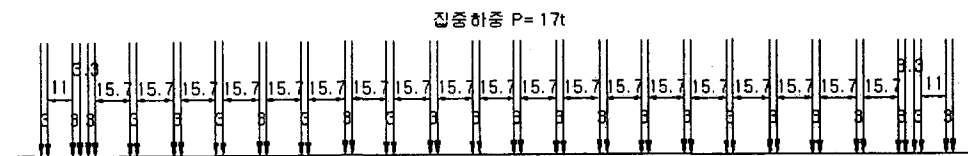


그림 1. TGV-K 열차하중

r 은 축하중의 개수로서 TGV-K의 경우 총 46개이며, TGV-K의 이동 열차하중을 그림 1에 나타내었다. 그림 1에서 축중 하중 f_0 는 170kN이며 i 번째 하중이 교량에 위치하는 시간 t 와 거리 x 에 관하여 하중함수는 식 (7)와 같이 표현 할 수 있다.

$$f_i(x, t) = f_0 \delta(x - s_i), \quad 0 \leq s_i \leq L \quad i=1, 2, \dots, 46 \quad (7)$$

s_i 는 시간 t 일 때 i 번째 하중이 교량에 위치하는 거리이다. 따라서 열차속도 v 를 적용할 경우 다음과 같이 s_i 를 직접 구할 수 있다.

$$s_1 = vt, \quad s_2 = vt - 3, \quad s_3 = vt - 14, \quad \dots, \quad s_{46} = vt - 380.15 \quad (8)$$

식 (7)를 식 (6)에 대입하여 적분하면,

$$F_n(t) = f_0 \sum_{i=1}^k \sin \frac{n\pi(x-s_i)}{L} \quad (9)$$

식 (3)의 수직 변위는 다음 식 (10)로 구해진다.

$$y(x, t) = \frac{2f_0}{mL} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{w_n} \sin \frac{n\pi x}{L} \sum_{i=1}^k A_i(t) \right] \quad (10)$$

식 (10)에서 i 번째 하중이 교량에 진입한 이후 교량을 통과하기 전인 경우 즉, $(t_i)_{ent} \leq t \leq (t_i)_{exit}$ 인 경우,

$$A_i(t) = \int_{(t_i)_{ent}}^t \left[\sin \frac{n\pi(v\tau-s_i)}{L} \times e^{-\xi w_n(t-\tau)} \sin w_n(t-\tau) \right] d\tau \quad (11)$$

여기서, $(t_i)_{ent}$ 는 i 번째 하중이 교량에 진입하는 시간을 의미하며, $(t_i)_{exit}$ 는 i 번째 하중이 교량을 벗어나는 시간을 나타낸다. $(t_i)_{exit} \leq t$ 인 경우는

$$A_i(t) = \int_{(t_i)_{ent}}^{(t_i)_{exit}} \left[\sin \frac{n\pi(v\tau-s_i)}{L} \times e^{-\xi w_n(t-\tau)} \sin w_n(t-\tau) \right] d\tau \quad (12)$$

식 (4)에서 유도된 (11)과 (12)는 Duhamel의 적분식으로 Mathematica 또는 Matlab과 같은 프로그램등을 이용하면 직접 적분이 가능하다. 한편, 처짐 조건 이외에 사용성 상태 설계조건인 교대에서의 회전변위와 경간 중앙에서의 연직 가속도는 식 (13)으로 구할 수 있다.

$$\theta = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t), \quad a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \left(\frac{L}{2}, t \right) \quad (13)$$

3. 동적 하중 효과 감소

그림 1에서 제시한 TGV-K 열차하중을 포함하여 모든 고속 열차하중과 일반 열차하중은 객차 배치 특성상 일정한 주기의 집중 하중군이 교량의 주형에 작용하게 된다. TGV-K에서 제시되는 객차와 객차간의 축 하중군의 간격은 18.7m이며, 열차하중의 총 연장은 380.15m이기 때문에 지간장이 약 20~50m정도인 대상 교량은 그 길이가 상대적으로 길지 않으며, 이와 같은 조건은 대부분의 열차와 교량에 대하여 일반적이다.

하중군의 길이에 비하여 상대적으로 길이가 짧은 교량에 대하여 반복적이고 연속적으로 작용하는 하중은 식 (11)에 제시한 바와 같이 시간에 대하여 교량의 길이와 하중이 작용하는 위치의 함수로 표현될 수 있다.

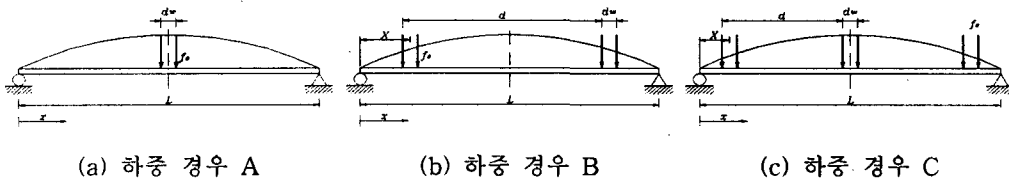


그림 2. 동적 주기를 지배하는 하중 경우

식 (11)에서 제시한 동적하중은 $n=1$ 일 때, 즉 제1모드에서 하중효과가 지배적이기 때문에 수식전개의 편의성을 위하여 제1모드만을 사용하여 다음과정을 유도하였고, 이후에 제시하는 결과는 10개의 모드를 사용하였다. 그림 2(a)에 나타난 바와 같이 교량의 중앙에 집중 하중균이 위치하였을 경우 또는 그림 2(b)와 같이 하중균이 중앙에 대하여 대칭으로 배치되었을 경우 가장 크다. 열차 모델의 처음과 끝부분에 나타나는 동력차(power car)의 하중균을 제외하고 동적 하중 효과는 그림 2(a)와 그림 2(b) 경우의 주기적인 함수로 표현된다.

$d < L < 2d$ 인 경우 그림 2(a)와 그림 2(b)와 같은 하중경우가 발생할 수 있으며, 한 개의 하중균이 재하될 때의 작용하중 f_a 와 두 개의 하중균에 의한 작용하중 f_b 는

$$f_a = 2f_0 \sin \frac{\pi(L-d_w)}{2L}, \quad f_b = 2f_0 \left[\sin \frac{\pi(L-d-d_w)}{2L} + \sin \frac{\pi(L-d+d_w)}{2L} \right] \quad (14)$$

$f_a = f_b$ 일 때 동적 하중 효과 즉, 동적 하중의 시간에 따른 변화는 최소가 된다. 식을 정리하면

$$\cos \frac{\pi d}{2L} = \frac{1}{2} \quad (15)$$

식 (15)과 교량의 길이에 대한 조건에서

$$L/d = 1.5, \quad X = d/4 \quad (16)$$

$2d < L < 3d$ 의 시간장일 때는 그림 2(b),(c)의 두 가지 하중 경우가 존재할 수 있다. 동적 하중 효과가 최소가 되기 위한 조건 $f_b = f_c$ 를 만족하기 위하여 평형 조건을 재구성하여 정리하면,

$$\cos \frac{\pi d}{2L} - \cos \frac{\pi d}{L} = \frac{1}{2} \quad (17)$$

식 (17)과 교량의 길이에 대한 조건을 고려하면 식 (21)과 유사한 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$L/d = 2.5, \quad X = d/4 \quad (18)$$

앞에서 설명한 $d < L < 2d$ 와 $2d < L < 3d$ 의 시간장 이외에 대한 해석을 동일한 방법으로 수행하면 귀납적 방법에 의하여 다음 식 (19)와 같은 일반적인 식을 구성 할 수 있다.

$$L/d = p + 0.5, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

동적 하중 효과의 실제적인 감소를 확인하기 위하여 $d=18.7\text{m}$ 인 TGV-K 열차 하중에 대하여 시간장을 변화하며 일반하중을 그림 3에 나타내었다. 그림 3에서 시간의 진행에 따라 공통적으로

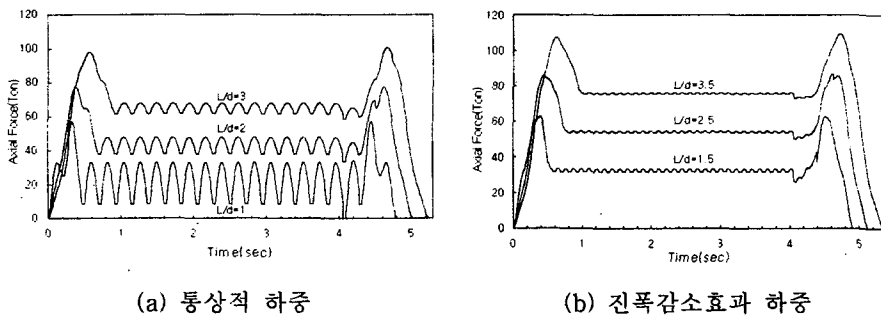


그림 3. 동적 일반하중

나타나는 전반부와 후반부의 상대적으로 큰 하중들은 동력차의 집중 하중군이 객차에 비하여 상대적으로 크기 때문에 나타나는 현상이다. 그림 3(a)는 $L/d = p$ 인 경우로서 일반적인 열차하중의 동적 효과를 나타낸다. 그림 3(b)는 $L/d = p + 0.5$ 인 경우로서 그림 3(a)와는 다르게 동적하중이 중간시간대에서 그 고저차가 급격히 감소함을 알 수 있다.

4. 열차의 공진 속도

교량의 설계 시 사용성 한계상태에 대하여 BRDM⁽⁹⁾에서는 3가지 동적 응답을 검토하도록 규정한다.

$$\cdot \text{교량최대처짐} < L/1700 \quad \cdot \text{교대회전변위} < 5.0 \times 10^{-4} \text{ rad} \quad \cdot \text{교량수직방향 진동가속도} < 0.35g \quad (20)$$

여기서 g 는 중력가속도이다. 제시한 3가지 동적 설계조건은 주행의 안정성 확보를 위한 것이다. 이상의 설계 조건은 실제 운행속도의 한계인 350km/h 이내의 속도범위에서 검토하도록 규정하고 있는데 실제로 모든 속도에 대하여 검토하는 것은 많은 시간과 인력을 필요로 하기 때문에 비효율적이고 가장 응답이 큰 공진 속도에서 검토하는 것이 안정성을 손쉽게 확보할 수 있다.

공진(resonance)은 구조물의 고유 진동수와 구조물에 가해지는 하중 주기의 역수가 일치할 때 구조물의 동적 응답(dynamic response)이 시간에 따라 증가하는 현상을 말한다. 따라서 공진을 유발하는 열차의 임계 속도(critical velocity)는 식 (20)로 구할 수 있다.

$$V_{cr} = 3.6 \times d \times \omega \text{ (km/h)} \quad (21)$$

V_{cr} 은 임계속도를 의미하며, d 는 그림 2에서 제시한 축하중간 거리, ω 는 교량의 고유진동수이다. 처짐과 단부회전각 및 진동가속도는 실제로 열차가 임계속도로 주행할 때 가장 큰 값을 나타낸다.

4.1 공진 감소 효과

열차하중이 임계속도로 주행하지 않는 경우 일반적인 교량의 동적응답은 그림 4와 같이 나타난다. 그림 4를 포함하여 본 연구에서 제시하는 결과는 단위길이당 질량 $m=18t/m$, 탄성계수 $E=2.1 \times 10^7 \text{ kg/cm}^2$, 단면이차모멘트 $I=1.144m^4$, 댐핑계수 $\xi=0.01$ 의 물성치를 공통적으로 사용하였다. 그림 4는 지간장 40m의 교량에서 200km/h의 속도로 열차가 주행하는 공진이 발생하지 않는 일반적인 경우의 동적응답을 나타낸 것이다. 그림 5에서는 $L=37.4m$ 와 $L=28.05m$ 인 두가지 경우에 대하여 각각 270km/h와 479km/h의 임계속도로 열차가 주행 할 때 발생하는 동적 응답을 나타낸 것이다. 여기서 $L=28.05m$ 인 경우는 본문의 3장에서 제시한 동적 하중 감소 효과가 나타나는 지간 길이이며, $L=37.4m$ 인 경우는 동적 하중 감소 효과가 나타나지 않는 통상적인 경우이다.

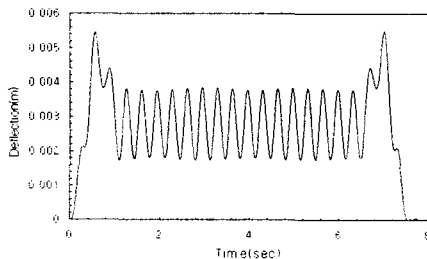


그림 4. 일반적인 동적응답

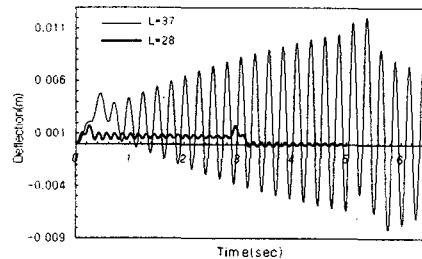


그림 5. 공진과 공진 감소 현상

그림 5에서 $L=37.4\text{m}$ 인 경우 동적 처짐 응답은 전형적인 공진 양상을 보이고 있다. 하중이 주어지는 시간의 증가에 따라 동적 응답은 점차로 발산하고 있음을 알 수 있다. 이와는 반대로 $L=28.05\text{m}$ 인 경우 겉보기로 전혀 공진 현상을 관찰 할 수 없으며, 그림 4와 비교하여 보면 오히려 동적응답이 시간에 따라 감소함을 관찰할 수 있다. 동적 하중 감소 효과가 일어나는 부분에서는 동적 하중의 작용 주기가 교량의 고유 진동수와 일치하더라도 주기에 따른 하중의 변화가 매우 적어 마치 작용된 동적 하중이 일정한 크기로 지속되고 있는 형상이 되기 때문에 감쇠에 의하여 동적응답이 점점 감소하게 된다. 그림 5의 두가지 경우 발산하는 구간을 제외하고 작용된 동적 하중에 대하여 응답이 점차로 감소하는 현상은 구조물의 감쇠를 고려하였기 때문이다.

표 1. 지간장 46.75m의 동적해석

속도 (km/h)	최대 동적 응답		
	처짐 (cm)	단부 회전각 (rad)	가속도 (m/s^2)
380	1.05	1.33	2.03
172	0.91	1.15	0.71

표 1은 지간길이 46.75m의 공진 감소 현상이 발생하는 교량의 해석결과로 172km/h는 임계 속도이고 380km/h는 최대 설계 속도이다. 임계 속도보다 최대 설계속도에서 모든 동적응답이 크게 발생함을 알 수 있다. 이는 공진에 의한 동적응답의 발산효과는 완전히 사라지게되고 이와는 반대로 임계 속도보다 빠른 주행속도에서 동적하중 효과가 커지게 되므로 나타나는 현상이다. 때문에 교량의 설계 시 임계 속도 이외에 가장 빠른 주행속도를 반드시 검토할 필요가 있다.

5. 지간장에 따른 동적 응답

지간 길이가 길어짐에 따라 최대 처짐과 단부에서의 회전변위는 증가하게 된다. 하지만 설계에 필요로 하는 임계속도에서의 처짐, 회전변위는 4절에 제시한 공진 감소 효과에 의하여 그림 7, 그림 8과 같은 응답을 보인다.

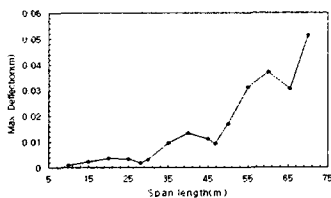


그림 7. 최대 처짐

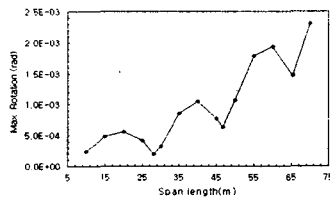


그림 8. 최대 회전각

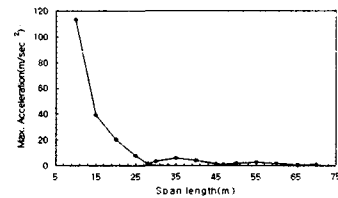


그림 9. 진동 가속도

그림 7과 그림 8에서 지간장이 길어짐에 따라 처짐과 단부 회전각은 전체적으로 증가함을 알 수 있으며, 그림 2에 제시한 차량의 하중간격 d 에 따라 주기적으로 동적응답이 감소하는 현상을 발견할 수 있다. 이러한 감소 조건은 4.1에 제시한 공진 감소 구간과 정확히 일치한다. 하지만 처짐과 단부 회전각에 반대로 교형의 진동 가속도는 지간 길이가 길어짐에 따라 감소하는 경향을 보인다.

그림 9에 나타난 바와 같이 진동 가속도 역시 처짐 및 회전각과 마찬가지로 공진 감소 효과가 발생하는 부근에서는 감소하지만 지간길이 짧은 구간에서 매우 큰 값을 보임을 알 수 있다.

5.1 부 임계속도

정적인 하중만을 고려한 설계에서 지간의 길이가 짧아지면 주형의 설계 단면은 감소하게 되지만 그

림 9에 나타난 진동 가속도를 허용 설계 기준에 만족하기 위해서는 단면이 매우 과다하게 증가하여야 한다. 일반적 고속전철로 규정하고 있는 설계 속도 220~380 km/h 이내에서 설계 검토가 이루어지기 때문에 임계속도가 설계속도를 벗어나는 경우 공진과 유사하게 동적응답이 큰 주행속도에 대하여 동적 해석을 수행한 후 설계에 적용할 필요가 있다. 식 (2)와 식 (20)에서 n=1인 경우 계산되는 제 1모드의 고유진동수와 일치하는 주행속도가 주 임계속도(primary critical velocity)일 때, 주 임계속도를 제외한 동적 응답이 가장 큰 주행 속도를 부 임계속도(secondary critical velocity)로 정의 할 수 있다.

부 임계속도는 식 (21)을 변화시킨 (22)의 조건에서 구할 수 있다. 식 (22)의 물리적인 의미는 열차의 주행 속도에 대하여 교량의 진동 주기가 j배수로 반응함으로써 공진과 유사한 경향을 나타냄을 말한다.

$$V_{cr} = \frac{3.6 \times d \times \omega}{j}, \quad j=2, 3, \dots \quad (22)$$

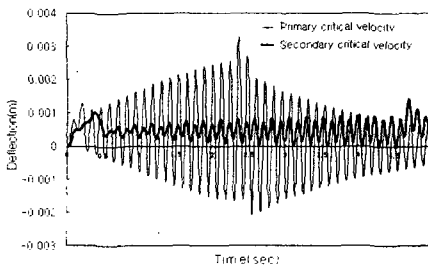
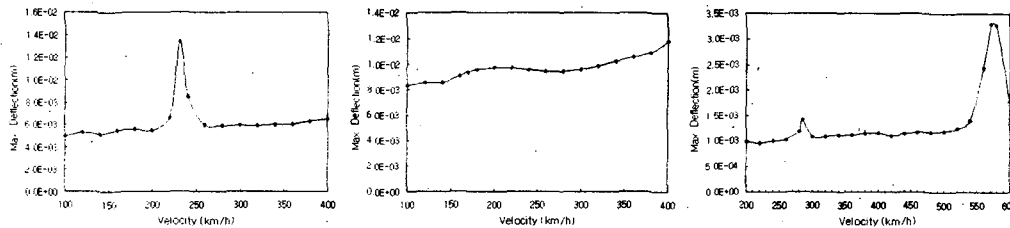


그림 10. 주 임계속도와 부 임계속도

그림 10은 시간장 25m의 교량에 대하여 주 임계속도와 부 임계속도에 대하여 교량의 최대 동적 응답을 계산한 결과로 주 임계 속도는 572km/h이고 부 임계 속도는 j=2인 경우로서 286km/h이다. 부 임계 속도 역시 공진 현상이 발생하고 있다. 주 임계속도인 572 km/h는 설계속도를 상회하는 값이므로 설계 시 검토할 필요가 없고 따라서 부 임계 속도를 검토해야만 한다. j=3,4...인 경우 공진 효과는 매우 작은 결과를 나타내었다.

5.2 설계 속도

고속철도 교량의 동적 설계 조건은 차량의 주행 속도인 220~380km/h 이내에서 검토하도록 시방서에서 규정하고 있다. 그러나, 동적 해석은 많은 시간 비용이 필요하기 때문에 전체 주행속도에 대하여 검토하는 것은 매우 어렵고 동적 응답이 가장 큰 몇 가지 경우를 임의로 선택하는 것이 바람직하다. 첫 번째로 공진 현상이 발생하는 임계속도를 검토하여야 하며, 두 번째는 공진 감소 현상이 발생할 경우 최대 설계 속도(380 km/h)를 검토하여야 한다. 마지막으로 임계속도가 열차의 주행 속도를 벗어나는 경우 부 임계속도를 검토하여야 한다. 그림 11은 이 세 가지 경우에 대하여 각각의 예이다.



(a) 임계속도 검토[40m] (b) 최대설계속도 검토 [46.75m] (c) 부임계속도 검토 [25m]

그림 11. 시간에 따른 설계 속도 검토

그림 11(a)의 경우는 임계속도가 230km/h로서 차량의 주행 속도 이내에 존재하는 경우이며, 임계속도에서 가장 큰 동적 처짐을 보인다. 그림 11(b)의 경우는 임계속도가 172km/h로서 주행 속도 이내에 존재하지만 공진 감소 현상으로 인하여 최대 설계 속도에서 동적 처짐이 가장 크게 발생한다. 마

지막으로 그림 11(c)의 경우 지간장이 비교적 짧기 때문에 임계속도가 주행속도를 벗어난 경우로서 그림 10의 결과와 동일하다. 이 경우 572km/h의 주 임계속도에서 가장 큰 처짐이 발생하지만 열차의 주행 속도를 벗어나 있으므로 검토할 필요가 없고 대신에 286km/h의 부 임계속도에서 동적 처짐을 검토해야 함을 알 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 고속전철 교량을 단순한 빔으로 열차하중은 시간에 따라 이동하는 축하중의 조합으로 구성하여 동적 해석을 수행하였다. 지간장과 열차 축하중 간격을 주요 변수로 설정하여 공진을 억제할 수 있는 특별한 상관관계를 유도하였으며, 지간장을 변화하며 다양한 동적해석을 수행함으로써 이를 증명하고 다음의 결론을 도출하였다.

(1) $L/d = p + 0.5$, 즉 식 (25)에 나타낸바와 같이 p 가 양의 정수일 때 열차하중의 동적인 효과는 최소화되며, 이러한 조건으로 교량을 설계할 경우 공진과 일반적인 동적 응답을 크게 억제할 수 있다. 또한 이러한 공진이 억제되는 조건에서는 임계속도 보다는 최대 설계속도를 동적 해석에 적용하는 것이 타당하다.

(2) 교량의 길이가 길어짐에 따라 최대 처짐과 단부 회전각은 증가한다. 그러나, 공진이 감소하는 조건의 지간장에서는 이들 동적 응답을 급격히 감소시킬 수 있다. 반면에 진동 가속도는 지간장이 짧아질수록 증가한다.

(3) 첫 번째 진동모드에 의한 열차의 임계속도는 지간장이 짧아질수록 급격히 증가하는데, 이는 열차의 실제 주행속도와 많은 차이를 보이기 때문에 설계에 적용하기 위한 부 임계속도를 제시하였으며, 예를 통하여 부 임계속도의 타당성을 입증하였다.

(4) 충격계수는 열차의 주행 시 동역학적인 영향을 정적인 하중으로 치환하여 설계에 적용할 수 있는 방법이다. BRDM에서 제시하고 있는 충격계수는 실제로 계산한 충격계수와는 달리 지간장이 감소함에 따라 점차적으로 증가하여 비교적 짧은 지간장에서는 과다 설계의 가능성이 있다.

참 고 문 헌

1. Chopra, A. K.(1995), *Dynamics of structures*. Prentice Hall, New Jersey.
2. Demeter, G. F.(1995), *Mechanical and Structural Vibrations*. Wiley Interscience, New York, N.Y.
3. Ray, W. C. and Joseph, P.(1993), *Dynamics of structures*. McGrawHill, New York, N.Y.
4. Wilfried, B. K. and Hans, J. N.(1996), *Dynamics of Civil Engineering Structures*. Balkema, Netherlands.
5. Logan, D. L.(1993), *A First Course in the Finite Element Method*. PWS Publishing Company, Wadsworth, Ohio.
6. Yang, Y. B., Yau, J. D. and Hsu, L. C. (1997), "Vibration of Simple Beams Due to Trains Moving at High Speeds." *Engineering Structures*, Elsevier, Vol. 19, No. 11, pp. 936-944.
7. Kou, J. W. (1997), "Vibration Behavior of Continuous Span Highway Bridge- Influencing Variables." *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 3, pp. 333-344.
8. Yang, Y. B. and Yau, J. D., "Vehicle-Bridge Interaction Element for Dynamic Analysis." *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 11, pp. 1512-1518.
9. "Bridge Design Manual(BRDM) Final Report," SYSTRA, 1995.