한국전산구조공학회
1999년도 가을학술발표회 논문집

평판재하시험을 이용한 지반의 탄성계수 측정에 관한 연구

The evaluation of Elastic modulus of the Foundation by the Plate Loading Test

최 장 렬 *　　정 진 환 * *　　조 현 영 * *
Choi, Jang-Lyul　　Cheung, Jin-Hwan　　Cho, Hyung-Young

ABSTRACT

This paper describes the method of evaluating the elastic modulus of soil medium by using the Circular Plate Loading Test. The elastic foundaton is considered to be the elastic half-space. The stiffness matrix of elastic half space is drived using Boussinesq's analytical soulution. A numerical examples are presented to verify the validity of this procedure. Also, the numerical results are compared with others by the existing study results. The procedure proposed in this theses can be applied to the design of paving concrete resting on the elastic foundation.

1. 서　론

자연상태에 있는 지반은 토립자의 상태, 크기 및 역학적 특성과 지반구조, 응력이력, 지하수위, 지반의 압밀 등의 영향을 받는다. 일반적으로 탄성지반상에 놓인 평판의 거동은 지반을 Winkler Model로 가정한 경우에는 스프링상수(k)에, 그리고 Boussinesq의 반무한 탄성체로 가정한 경우에는 지반의 탄성계수 (E_s, ν) 의 값과 밀접한 관계가 있다. 특히, 반무한 탄성체상에 놓여 있는 판과 지반의 상호작용 해석에서는 지반의 탄성계수 값에 따라 접촉압력 및 변위의 차이가 크므로 지반의 탄성계수 선택에 신중을 기해야 한다.[1]

본 연구에서는 평판재하시험 성과치로부터 지반의 탄성계수를 추정할 수 있는 이론을 제안하였다. 중심축방향 수직하중을 받는 원형의 강체 재하판과 Boussinesq해를 이용한 유한개의 절점을 갖는 지반전체의 유연도 행렬을 만들어 강체판의 하중-침하 관계식을 구하고 실측에서 얻은 하중-침하 관계를 통하여 합성탄성계수를 구하였다. 또한, 수치모델을 통해 기존 방법과 비교하여 신뢰성 및 적용성을 검증하였다.

* 부산대학교 토목공학과 석사과정
** 부산대학교 토목공학과 교수

2. 지반모델 및 가정

모든 구조물은 지반위에 축조되며, 구조물에 작용하는 하중은 구조물 저판을 통해 지반으로 전달된다. 이 경우 구조물과 지반의 상호작용을 고려해야 하며 실제적이고 신뢰성 있는 결과를 얻기 위해서 자연상태의 지반을 충실히 만족시키는 지반모델이 필요하다. 지반의 특수한 점들을 고려하여 이상화시키면 Winkler Model, Two-parameter Model 및 Elastic-solid Model로 크게 분류 할 수 있다.[2]

본 연구에서는 Boussinesq가 제안한 균질이고 등방성인 반무한 탄성체로 가정하여 판과 접하는 판 절점 전체의 수직변위를 자유도로 하는 한 개의 요소로 생각한다. 또한, 지반이 대단히 유연하고 판의 강성이 매우 커 지반이 균등하게 침하한다고 가정한다.

3. 축대칭 원형 지반 요소의 정식화

3.1 축대칭 분포하중에 의한 반무한 탄성체 지반의 지표변위

Boussinesq(1885)는 지반을 탄성, 균질 및 등방성이라 가정하고 반무한 탄성체 표면에 한 개의 집중하중이 작용할 때 표면변위를 구하는 식을 식(1)과 같이 구하였다 (그림1).[1] 이 식을 이용하면 원 영역에 작용하는 축대칭 등분포하중 q에 의한 지표면의 변위는 다음과 같이 유도된다.[3]

$$w_{ji} = \frac{(1-\nu_s^2)P_i}{\pi E_s d_{ij}} = \frac{(1-\nu_s^2)}{E_s}\frac{P_i}{\pi d_{ij}} \tag{1}$$

$$w_j = \frac{2}{\pi}\,\alpha q \int_0^{\pi}\int_0^{R} I(r,\theta)\,dr d\theta \tag{2}$$

여기서, $\alpha = \dfrac{(1-\nu_s^2)}{E_s}$, $I(r,\theta) = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+r_j^2-2rr_j\cos\theta}}$

반경방향 적분은 해석적분이 가능하며 식(2)는 다음과 같이 된다.

$$w_j = \frac{2}{\pi}\alpha q \int_0^{\pi}\int_0^{R} I(r,\theta)\,dr d\theta = \frac{2}{\pi}\alpha q \int_0^{\pi} I_1(\theta)\,d\theta \tag{3}$$

여기서,

$$I_1(\theta) = \sqrt{R^2+r_j^2-2Rr_j\cos\theta} - r_j + r_j\cos\theta \ln\left|\frac{(R-r_j\cos\theta)}{r_j\sin\theta} + \sqrt{\left(\frac{R-r_j\cos\theta}{r_j\cos\theta}\right)^2+1}\right| \left|\cot\theta+\sqrt{\cot^2\theta+1}\right.$$

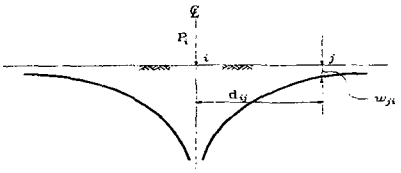


Fig. 1 Surface deflection of half-space due to concentrated loading

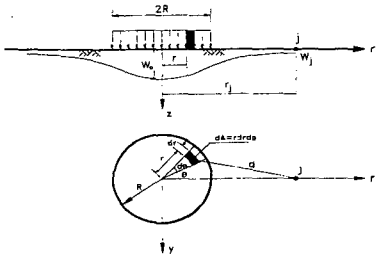


Fig. 2 Surface deflection of half-space due to axisymmetric loading

3.2 지반의 유연도 행렬[3]

식(2)에서 반경방향 r에 대해서는 해석적분을 한 다음 원주방향 (θ)적분은 피적분함수를 무차원화 한 후 Gauss수치적분을 수행하면 다음과 같다.

$$w_j = \frac{2}{\pi} a q \int_0^{\pi} I_1(\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi} R a q \int_0^{\pi} F(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} R a q f(e_j) \tag{4}$$

여기서, $F(\theta)$는 무차원 함수로서 다음과 같다

$$F(\theta) = \sqrt{1+e_j^2-2e_j\cos\theta} - e_j + e_j\cos\theta \ln\left| \frac{(1-e_j\cos\theta)}{e_j\sin\theta} + \sqrt{\frac{(1-e_j\cos\theta)^2}{(e_j\sin\theta)^2}+1} \right| |\cot\theta + \mathrm{cosec}\,\theta|$$

단, $\quad e_j = \frac{r_j}{R} \qquad R$: 등분포 원하중의 반경

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{G_\theta=1}^{m} [F(\theta_i) W \, det J_{\theta_i}]_{G_\theta}$$

단, $\quad \theta_i$: n분할구간인 $[\frac{\pi}{n}(i-1), \frac{\pi}{n} i\,]$사이의 값

J_{θ_i} : Gauss적분점에 대한 Jacobian행렬

위의 식에서 $f(e_j)$는 $R=1$일 때 r_j의 변화에 따른 수치해를 미리 구하여 표로 작성할 수 있다. 다음으로 임의의 축대칭 Gauss 적분구간 $r_1 \le r \le r_2$ 내의 등분포하중으로 인한 임의점 j의 수직변위는 다음과 같이 구할 수 있다.(그림 3)

$$w_j = \frac{2}{\pi} a q_{G_i} [r_2 f(e_2) - r_1 f(e_1)] \tag{5}$$

여기서, $q_{G_i} = \sum_{k=1}^{3} N_k(\xi_{Gi})\, q_k$, $e_1 = \frac{r_j}{r_1}$, $e_2 = \frac{r_j}{r_2}$, $f(e_1)$ 및 $f(e_2)$는 앞서 구해둔 $f(e_j)$를 Newton의 2차 다항식 보간법으로 구할수 있고, q_{G_i}는 원판을 Gauss적분점의 값으로 근사시킨 것이다. 그림 3은 임의 축대칭 하중에 대한 임의점의 지표변위를 (b), (c)상태의 임의 등분포 원하중에 의한 변위의 차로서 구간고리하중에 의한 변위를 구하고 이를 합산하는 하나의 방법을 나타낸다. 따라서, 원판과 접하는 지반의 모든 절점변위는 전체구간에 대하여 중첩하여 다음과 같은 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\{w\} = [G]\{q\} \tag{6}$$

여기서, $\{G\}$는 지반의 절점 분포하중에 대한 유연도 행렬로 반무한 탄성체 전체를 한 개의 요소로 본 것이다.

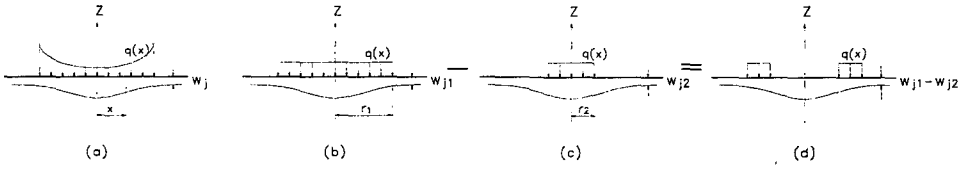


Fig. 3 The surface displacement due to a arbitrary axisymmetric loading

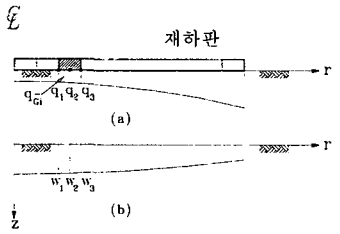
3.2.1 축대칭 원형 판의 지표 변위와 접촉 압력[3][4][5]

원판을 그림 4와 같이 3절점 축대칭 요소 영역으로 분할하고 각 Gauss 적분점에 대하여 중첩하면 한 요소 구간에 분포하는 하중에 의한 변위는 근사적으로 다음과 같이 된다.

$$w_j = \sum_{G_i=1}^{n} [\frac{2}{\pi} a\{r_2 f(e_2) - r_1 f(e_1)\} \sum_{k=1}^{3} N_k(\xi_{G_i}) q_k]_{G_i} \tag{7}$$

여기서, $q_{G_i}(= \sum_{k=1}^{3} N_k(\xi_{Gi}) q_k)$)는 Gauss적분점의 접촉압력강도이고, n은 적분점의 수이다.(그림 5) 임의 축대칭 하중에 의한 임의 절점의 변위 w_j는 모든 요소 영역별 변위 $w_j^{(e)}$를 중첩하면 되고, 이것에서 지반의 유연도 행렬 $[G]$가 구해질 수 있다. 즉,

$$\{w\} = \frac{1-\nu_s^2}{E_s} [G]\{q\} \tag{8}$$



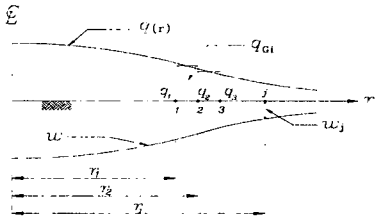


Fig. 4 (a) Reaction (b) Displacement Fig. 5 Axisymmetric surface loading

식(8)의 유연도 방정식을 강도방정식으로 고치면 다음과 같다.

$$\{q\} = \frac{E_s}{1-\nu_s^2} [G]^{-1}\{w\} \tag{9}$$

3.3 지반의 축대칭 등가절점력계[4][5]

3.3.1 지반의 강성도 행렬

식(9)의 절점분포반력을 등가의 절점하중(원형 선하중)으로 고치기 위하여 가상일의 원리를 이용한다. 즉,

$$\{Q\}^{(e)} = (2\pi \int_{-1}^{1} N^T N r \det J d\xi)^{(e)} \{q\}^e = [E]^{(e)} \{q\}^{(e)} \tag{10}$$

여기서, $E^{(e)} = 2\pi \int_{-1}^{1} N^T N r \det J d\xi$: 변환행렬 (11)

$[E]^{(e)}$의 계산을 Gauss 수치적분으로 수행하면 다음과 같다.

$$[E]^{(e)} = 2\pi \sum_{G_i=1}^{n} (N^T N r \det J W)_{G_i} \tag{12}$$

여기서, G_i : Gauss 적분점 W_{Gi} : 가중치

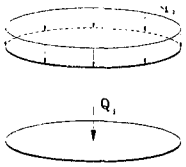


Fig.6 Distribution of contact forces and corresponding equivalent nodal forces of an element

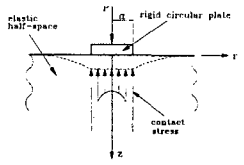


Fig. 7 Rigid Circular plate resting on elastic half-space subjected to a central force

그림 6과 같은 원형평판의 각 절원에 대한 접촉압력의 등가절점력계를 모두 중첩하면 지반 전체의 등가절점력계 $\{Q\}$를 구할 수 있다. 또한 강체 재하판 아래에 그림 7과 같은 일정한 처짐 w_p를 실현하려면 아래와 같은 식이 성립되어야 한다. 여기서 $\{Q\}$는 절점력으로 $\{q\}$와 등가의 원환 고리 선하중(Ring Load)이다.(그림 6)

$$\text{즉,} \quad \{Q\} = \sum \{Q\}^{(e)} = \sum [E]^{(e)} \{q\} = \{E\}\{q\} \tag{13}$$

여기서, $\{Q\} = [Q_1 Q_2 \cdot \cdot Q_n]^T$

$\{q\} = [q_1 q_2 \cdot \cdot q_n]^T$

$[E] = \sum [E]^{(e)}$: 변환행렬

n : 원판과 지반이 접촉하는 절점번호

식(13)에 식(9)과 식(12)을 대입하여 정리하면 다음과 같은 지반 전체의 강성도 방정식을 구할 수 있다

$$\{Q\} = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}[E][G]^{-1}\{w_p\} \tag{14}$$

$$\{Q\} = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}[k_s]\{w_p\} \tag{15}$$

여기서, $[k]_s = [E][G]^{-1}$, $\{w_p\} = w_p\{1, \cdot \cdot \cdot, 1\}^T$ (16)

3.4 지반의 합성탄성계수의 결정

$\{Q\}$의 성분력들을 합하면 재하하중 P가 되고, 재하판이 강체라고 가정하여 포장판 저면의 수직변위가 일정하면 w_p라고 하여 다음과 같은 식을 얻는다.

$$P = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}\left(\sum_i \sum_j k_{ij}\right) w_p \tag{17}$$

$$\frac{E_s}{1-\nu_s^2} = \frac{P}{\left(\sum_i \sum_j k_{ij}\right) w_p} \quad : \text{지반의 합성탄성계수} \tag{18}$$

즉, 평판재하시험에서 P와 w_p를 측정하면 식 (18)에서 합성 탄성계수 $\frac{E_s}{1-\nu_s^2}$를 구할 수 있다.

4. 평판재하시험 결과를 이용한 탄성계수 추정 절차

지반의 국소적인 합성탄성계수 추정을 위하여 반무한 탄성지반에서 판과 지반의 상호작용을 고려한 지반 전체의 강성도 행렬을 구하고 재하하중 및 침하량의 관계식을 구하였다.(식(18))

지반의 유연도 행렬 구성에는 무차원 함수[3]를 이용하였고, 계산과정의 대략적인 흐름은 그림 8에 나타내었다.[10][11]

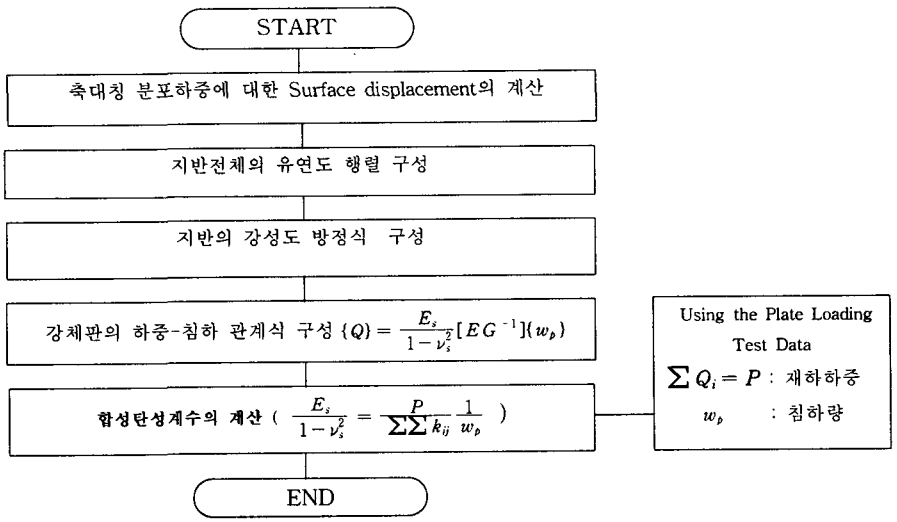


Fig. 8 Flow Chart

5. 수치 예 및 고찰

현장에서 실시한 원형 평판 재하시험 성과[7]치로부터 식(18)의 합성탄성계수를 구하고 이것과 Hanrahan, Chang 등의 연구에서 구한 E_s및 ν_s(0.3으로 가정)로 계산한 식(18)의 합성탄성계수를 비교하였다. 재하판의 직경은 40cm이다.

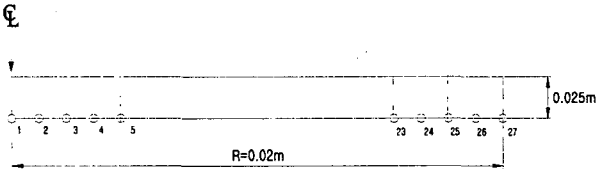


Fig. 8 Modeling for Plate and Half-Space

Table 6.1 Values for elastic modulus(매립토)

Load (ton)	Area (m2)	Load Stregth (t/m2)	Disp. (m)	Hanrahan $\frac{E_s}{1-\nu_s^2}$ $\nu_s=0.3$ (kg/cm2)	Chang $\frac{E_s}{1-\nu_s^2}$ $\nu_s=0.3$ (kg/cm2)	This study $\frac{E_s}{1-\nu_s^2}$ (kg/cm2)	p/δ Test Data (Least Square)
0.1	0.1257	7.96	0.00065	386.6	386.6	80.1	153.0
1.2	0.1257	15.92	0.00126	238.0	237.5	80.5	95.2
1.8	0.1257	23.89	0.00176	255.7	255.0	83.7	102.2
2.4	0.1257	31.85	0.00227	264.1	264.5	81.6	105.7
3.0	0.1257	39.81	0.00280	267.6	267.6	80.7	107.1
3.6	0.1257	47.77	0.00340	264.5	264.5	80.4	105.8
4.2	0.1257	55.73	0.00418	251.1	251.1	84.5	100.4
AVE				275.3	275.3	81.64	74.68

Table 6.2 Values for elastic modulus(풍화토)

Load (ton)	Area (m2)	Load Stregth (t/m2)	Disp. (m)	Hanrahan $\frac{E_s}{1-\nu_s^2}$ $\nu_s=0.3$ (kg/cm2)	Chang $\frac{E_s}{1-\nu_s^2}$ $\nu_s=0.3$ (kg/cm2)	This study $\frac{E_s}{1-\nu_s^2}$ (kg/cm2)	p/δ Test Data (Least Square)
1	0.1257	7.96	0.00100	250.1	250.1	152.6	100.0
2	0.1257	15.92	0.00221	226.2	226.2	154.5	109.0
3	0.1257	23.89	0.00355	211.4	211.4	160.0	112.9
4	0.1257	31.85	0.00457	218.9	218.9	155.4	114.7
5	0.1257	39.81	0.00570	219.3	219.3	155.8	115.9
6	0.1257	47.77	0.00689	217.8	217.3	165.7	116.6
7	0.1257	55.73	0.00843	207.5	207.5	175.7	117.2
AVE				221.7	221.7	160.0	112.3

Table 6.3 Values for elastic modulus(자갈-모래)

Load (ton)	Area (m2)	Load Stregth (t/m2)	Disp. (m)	Hanrahan $\frac{E_s}{1-\nu_s^2}$ $\nu_s=0.3$ (kg/cm2)	Chang $\frac{E_s}{1-\nu_s^2}$ $\nu_s=0.3$ (kg/cm2)	This study $\frac{E_s}{1-\nu_s^2}$ (kg/cm2)	p/δ Test Data (Least Square)
1	0.1257	7.96	0.00058	431.9	431.9	149.3	62.8
2	0.1257	15.92	0.00162	308.9	308.9	159.3	87.7
3	0.1257	23.89	0.00280	268.0	268.0	162.6	102.2
4	0.1257	31.85	0.00406	246.3	246.3	168.5	109.6
5	0.1257	39.81	0.00574	217.8	216.2	151.6	115.4
6	0.1257	47.77	0.00745	201.4	201.4	160.5	119.6
7	0.1257	55.73	0.00936	187.0	187.0	158.6	122.8
AVE				227.6	227.3	158.6	112.8

Table 6.4 Values for elastic modulus(마사토)

Load (ton)	Area (m2)	Load Stregth (t/m2)	Disp. (m)	Hanrahan $\frac{E_s}{1-\nu_s^2}$ $\nu_s=0.3$ (kg/cm2)	Chang $\frac{E_s}{1-\nu_s^2}$ $\nu_s=0.3$ (kg/cm2)	This study $\frac{E_s}{1-\nu_s^2}$ (kg/cm2)	p/δ Test Data (Least Square)
0.53	0.7060	7.51	0.00079	400.0	400.0	332.4	227.6
1.0	0.7060	14.08	0.00260	345.1	345.1	393.5	202.8
1.5	0.7060	20.65	0.00424	412.1	412.1	393.2	221.5
2.0	0.7060	28.16	0.00626	476.9	476.9	437.8	251.6
2.5	0.7060	35.67	0.00848	546.1	546.1	428.5	271.6
3.0	0.7060	41.31	0.01067	559.3	559.3	428.1	296.6
AVE				456.5	456.5	402.5	224.8

위 결과에서 Chang[8][9]의 식은 재하판 아래의 접촉분포력을 등분포로 해석하였으며 Hanrahan[8]은 판과 지반의 상호작용을 고려하지 않은 값이다. 본 연구에서 구한 합성탄성계수의 변화범위가 적음을 볼 수 있다.

6. 결 론

지반을 반무한 탄성체로 가정하고 지반과 평판의 상호작용을 고려한 합성탄성계수를 구하는 이론을 정립하고 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 지반반력 계수 k는 지반의 E_s 및 ν_s와 이론적으로 상관관계를 구할 수 없다. 따라서 본 연구에서는 재하판 아래의 접촉압력분포를 고려한 E_s 와 ν_s의 복합적인 합성탄성계수를 구하였다.

2) 기존의 지반 탄성계수의 추정 방법은 재하판의 크기에 따라서 값이 달라진다.
즉 "Scale Effect"가 존재한다. 본 연구는 이러한 "Scale Effect"를 계량적으로 구할 수 있다.

3) 본 연구 결과를 통해 콘크리트 포장판 설계시 기층 및 보조기층의 지표부근의 평균적 합성탄성계수를 구하여 포장판과 지반의 상호작용을 고려한 포장판의 응력 평가를 해볼 수 있다. 향후. 콘크리트 포장판의 대규모 현장실험을 통한 이론의 검증이 필요하겠다.

참 고 문 헌

1. A.P.S Selvadurai, "Elastic Analysis of soil Foundation Interaction",Elsevier(1979) pp244-249, 426-429
2.. F.D.C Henry, "The Design and Construction of Engineering Foundation",Champman and hall, pp156-157, 147-148, 406-425
3. Cho. H. Y..Cheung J. W. and Kim. S. C (1995). " A contact pressure analysis between circular plate under axisymmetric loading and elastic half-space considering local separation. " EASEC-5. pp161-168
4. 김성철, "국소분리영역을 고려한 탄성지반위에 놓인 평판과 지반의 상호작용 해석에 관한 연구", 부산대학교 박사학위 논문(1998)
5. 조현영,정진환,김성도,한충목 "탄성지반과 판의 접촉압력 해석에 관한 연구",대한토목학회 논문집(1992), 제12권,제1호,pp1-7
6. 평판재하시험 보고서, (주)동지지질, 1998
7. 장병순, "콘크리트 포장판의 역학적 특성에 관한 연구", 동아대학교 박사학위 논문(1988)
8. Eamon.T.Hanrahan, "The Geomechanics of Real materail the ε_g, ε_k method", Elsevier science Publisher B.V, 1985 pp45
9. ALFREDS R. JUMIKIS, "SOIL MECHANICS", pp160-165
10. Hinton.E. and Owen.D.R.J.(1977), "Finite element programming." Academic,New York.
11. Zienkiewicz and Taylor, The Finite Element Method " , McGraw-Hill.