

동적이완법에 의한 공기막구조물의 형태탐색과 응력해석

Shape Finding and Stress Finding for Pneumatic Membrane Structures by Dynamic Relaxation Method

문 창 훈* 이 경 수** 배 종 효** 최 옥 훈*** 한 상 을****
Moon, Chang-Hoon Lee, Keyung-Su Bai, Jong-Hyo Choi, Ok-Hoon Han, Sang-Eul

ABSTRACT

The purpose of this study is to propose the method of determining the initial pneumatic membrane structures surface and stresses and displacements. Tension structure such as pneumatic membrane structures is stabilized by their initial prestress and air pressure. The process to find initial structural overall shape of tension structures produced by initial prestress called shape finding. One of the most important factor for the design of membrane structures is to search initial smooth surface, because unlike steel or concrete building elements which resist loads in bending, all tension structure forces are carried within the surface by membrane stress. The result for initial surface of pneumatic membrane element and maximum displacement in large deformation analysis is compared with well-known nonlinear numerical method such as Newton-raphson method and dynamic relaxation method.

1. 서 론

막구조물(membrane structures)은 대변형에 의한 기하학적 비선형성을 나타내고, 막표면에 의해 외력에 저항하는 형태저항형 구조시스템으로서 3차원 곡면형상을 미리 결정해 주어야 하는 인장구조물이다. 막구조는 초기장력에 의해 그 형상이 안정화되는데 초기장력에 의한 곡면형태를 결정하는 과정을 형상탐색(shape finding)이라 하며, 초기형상으로는 등장력곡면(equally stressed surface)이 많이 사용된다^{1),2)}. 최소곡면(minimal surface)과 등장력곡면은 개념은 다르지만 그 유도방법 및 해석방법이 같기 때문에 동일한 곡면이라고 볼 수 있으며, 막표면에 균일한 응력이 작용하는 등장력곡면의 형상탐색기법으로 유한차분법³⁾ 및 유한요소법⁴⁾이 소개되었다.

Day⁴⁾에 의해 제안된 동적이완법(dynamic relaxation method)은 막구조물의 정적해석에 자주 사용되는 비선형 수치해석기법으로^{5),6),7),8),9)}, 유한차분법과 유한요소법의 특성이 모두 고려된 수치해석기법이며 동적감쇠(kinetic damping)^{6),7),8)}에 의해 정적평형상태를 찾아가는 수치적분기법이다. 막구조와 같이 기하학적 비선형성이 강한 구조시스템에서는 뉴튼랩슨법은 형상해석과정 중 탄성계수를 0으로 주었을 때 해를 못 구하는 수렴성에 문제가 발생하는 경우가 많은데 이 문제를 동적이완법에서는 동적감쇠 및 중앙차분법을 이용해 해결한다.

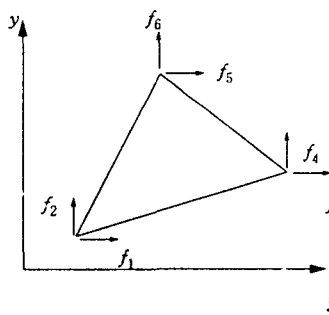
* 인하대학교 건축공학과, 박사과정
** 인하대학교 건축공학과, 석사과정
*** 안동정보대 건축공학과, 교수
**** 인하대학교 건축공학과, 교수

본 논문에서는 막의 탄성계수가 거의 0에 가까운 상태에서 동적이완법에 의해 등장력곡면 형상탐색을 수행하여, 그 결과를 뉴튼랩슨법에 의해 수행한 결과와 비교함으로써, 동적이완법의 수치해석상의 특징 및 적용성을 검토하고자 한다. 또한, 공기막구조물에서는 풍하중 및 설하중에 대하여 가장 큰 영향을 받으며, 막장력, 변형은 풍하중에 의해 최대가 되는 것이 일반적이며, 이 강풍에 대한 안전성의 확보가 공기막구조의 중요한 과제라고 할 수 있다. 따라서 공기막구조물의 거동특성을 구명하기 위한 수치해석기법으로서 뉴튼랩슨법과 동적이완법의 알고리즘상의 특성을 비교검토하고 풍하중 및 설하중에 대한 영향을 검토하고자 한다.

2. 형상탐색 알고리즘

2.1 막요소의 정식화

평형방정식에서 불평형력벡터 $\{R\}$ 은 내력과 외부하중과의 차이로 식(1)과 같고, 여기에서 $\{W\}$ 는 외부하중 벡터, $[T]$ 는 좌표변환행렬, $[B]$ 는 변형도-변위관계 행렬, $\{\sigma\}$ 는 요소 응력벡터이다.



$$\{R\} = \{W\} - [T]^T \int_v [B]^T \{\sigma\} dv \quad (1)$$

전체자유도에 대해 변분을 취하면 식(2)와 같고,

$$\delta\{W\} = [T]^T \int_v \delta[B]^T \{\sigma\} dv + [T]^T \int_v [B]^T \delta\{\sigma\} dv \quad (2)$$

식(2)는 식(3)과 같이 표현할 수 있다.

그림 1. 국부좌표계의 요소응력과 절점력의 관계

$$\delta\{W\} = [T]^T [k_C] \delta\{d\} + [T]^T [k_E] \delta\{d\} \quad (3)$$

$$[k_E] = [k_0] + [k_N]$$

$$[k_0] \delta\{d\} = \int_v [B_0]^T [E] [B_0] dv$$

$$[k_N] \delta\{d\} = \int_v ([B_0]^T [E] [B_N] + [B_N]^T [E] [B_0] + [B_N]^T [E] [B_N]) dv$$

$$[k_C] \delta\{d\} = \int_v \delta[B]^T \{\sigma\} dv$$

$\{d\}$ 는 국부좌표계의 변위이므로 전체좌표계의 변위 $\{u\}$ 로 변환하면, 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta\{W\} &= [T]^T [k_C] [T] \delta\{u\} + [T]^T [k_E] [T] \delta\{u\} \\ &= ([K_0] + [K_N] + [K_C]) \delta\{u\} = [K_T] \delta\{u\} \end{aligned} \quad (4)$$

막구조의 형상탐색은 식(4)에서 외부하중 벡터 $\delta\{W\} = \{0\}$ 일 때의 평형조건을 만족하는 문제이고, 이때 강성행렬 $[K_T]$ 는 탄성강성행렬과 기하강성행렬이 모두 고려된 접선강성행렬이다.

2.2 형상해석기법

2.2.1 뉴튼-랩슨법에 의한 정식화

$\{R\} \neq 0$ 이면 불평형력에 의한 $i+1$ 단계의 구조물의 변위 $\Delta\{u\}_{i+1}$ 에 관한 식은 식(5)와 같고 $[K_T]_i$ 와 $\{R\}_i$ 는 각각 i 스텝에서의 접선강성행렬과 불평형력벡터이다.

$$\Delta\{u\}_{i+1} = [K_T]_i^{-1} \{R\}_i \quad (5)$$

식(5)에서 $i+1$ 단계의 구조물의 변위 u_{i+1} 은 식(6)에 의하여 계산할 수 있으며, 이 과정을 통한 반복계산에 의해 $\{R\} \simeq \{0\}$ 이 되는 구조물 좌표계를 찾는다.

$$u_{i+1} = u_i + \Delta\{u\}_{i+1} \quad (6)$$

막구조물의 형상탐색의 단계에서는 외부하중벡터 $\{W\}$ 가 0인 상태에서 불평형력벡터를 식(7)과 같이 계산하며, $\{R\} \simeq \{0\}$ 일때의 구조물 좌표계를 초기응력에 의한 초기형상으로 결정한다.

$$\{R\} = -[T]^T \int_v [B]^T \{\sigma\} dv \quad (7)$$

2.2.2 동적이완법에 의한 정식화

시간증분단계마다 구조물의 운동상태를 추적해 나가면서 감쇠작용에 의해 구조물이 정적평형상태에 도달한다는 원리의 동적이완법에 의한 형상해석은 임의의 초기구조물상태와 초기응력에 의해 발생된 구조물의 운동에 대한 정적 평형상태를 찾는 것이고, 응력-변형해석은 형상해석을 통해 얻어지는 평형상태에 임의의 외부하중을 작용시켜 발생한 운동상태를 동적이완법의 수치해석과정을 수행하여 정적 평형상태를 찾는 것이다. 정적 평형상태를 찾는 과정은 동적감쇠(kinetic damping)에 의해 자동적으로 조절되는데, 무감쇠상태에서 구조물의 거동을 추적하면서 각 시간증분마다 구조물의 총 운동에너지를 계산하고, 최대 운동에너지일 때의 시간증분단계를 새로운 기준 상태로 설정하여 반복계산을 수행하는 것이다.

점성감쇠행렬을 고려하지 않으므로 감쇠행렬 $\{C\}$ 가 0이 되어 구조물의 운동방정식은 식(8)과 같이 나타낼 수 있고, 오른쪽 항을 불평형력벡터로 간주한다.

$$[M]\{\ddot{u}\} = \{W\} - [K]\{u\} \quad (8)$$

강성행렬의 역행렬 계산이 필수적인 뉴튼랩슨법과 달리 동적이완법은 강성행렬을 작성하고, 중앙차분법에 의

한 벡터연산으로 변위를 구하며, 중앙차분법에 의한 가속도와 속도 그리고 변위벡터는 아래 식들과 같다.

$$\{\ddot{u}\} = (\{\dot{u}\}^{t+\Delta t/2} - \{\dot{u}\}^{t-\Delta t/2}) \cdot \frac{1}{\Delta t} \quad (9)$$

$$\{\dot{u}\}^{t+\Delta t/2} = \{\dot{u}\}^{t-\Delta t/2} + \{R\}^t \cdot \frac{\Delta t}{[M]} \quad (10)$$

$$\{d\}^{t+\Delta t/2} = \{d\}^{t-\Delta t/2} \cdot \Delta t \quad (11)$$

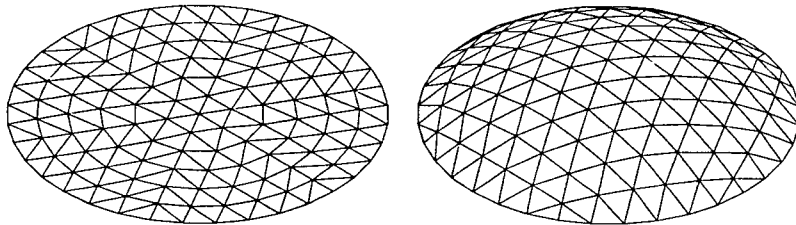
수치해석상의 안정성을 확보하기 위하여 Barnes¹⁰⁾가 제안한 시간중분 Δt 를 사용하여 속도벡터는 식(12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\{\dot{u}\}^{t+\Delta t/2} = \{\dot{u}\}^{t-\Delta t/2} + \{R\}^t \cdot \left(\frac{2}{\Delta t [K]} \right) \quad (12)$$

식(12)에서 알 수 있듯이 속도벡터는 질량행렬에 독립된 관계식을 갖고, 결국 구조물의 거동(변위) 또한 질량행렬에 독립되어 질량행렬은 수렴성에만 관여 한다. 뉴튼랩슨법과 같이 등적이완법에 의한 형상해석에서도 외부하중벡터를 0으로 하여 위 식들을 계산하며, $\{R\} \approx \{0\}$ 일 때의 구조물 좌표계를 초기평형상태로 한다.

3. 막구조의 형상탐색과 등장력곡면

강성구조물과 달리 인장구조물은 인장력의 도입을 통해 구조물의 강성이 부여되어, 안정화된 구조적 특성을 나타내기 때문에 초기 인장력 및 외부하중에 대한 변형의 정도가 전체 구조형상을 변화시킬 만큼 커다란 영향을 끼친다. 특히 초기 인장력의 도입으로 초기 구조물형상이 결정되기 때문에 강성구조물의 초기형상 결정방법과 다른 특징이 있다. 이와 같이, 외부하중이 없는 상태에서 인장구조물의 초기형상을 결정하는 것을 형상탐색(shape finding)이라 한다. 등장력곡면은 막표면 전체에 일정한 막응력이 작용하는 상태의 곡면이며, 막구조의 초기 평형상태를 결정하는 방법에서 사용된다. 등장력곡면은 막요소에 등장력이 작용하므로 전단력은 발생하지 않은 상태에서 σ_x, σ_y 에 동일한 크기의 인장력을 부여하고 초기 막응력에 의한 기하강성행렬을 만든다.



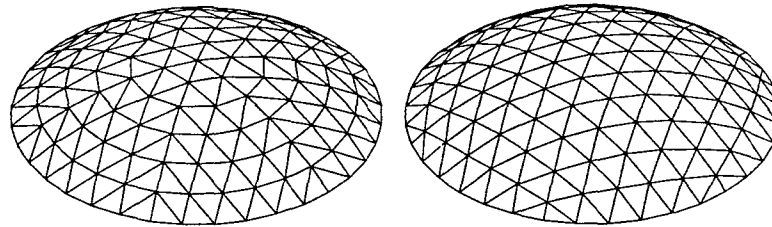
(a) 초기형상

(b) 최종 해석결과

그림 2. 해석모델의 초기형상 및 최종해석결과

초기형상탐색은 기하강성행렬만을 고려한 해석의 단계이며, 초기등장력에 의해 막형상이 평형상태가 될 때까지 반복계산을 수행한다. 탄성강성행렬을 고려하지 않음은 재료상수 E , ν 와 독립된 수치해석을 의미하며, 따라서 반복수치해석의 단계에서 수행하는 내부응력의 수정과정이 없게 되어 초기장력을 일정하게 유지한다. 그림 2.(a)는 해석모델의 형상해석전의 초기형상이고 삼각형 평면응력 막요소를 사용하였으며, 임의의 초기장력 10N을 가하였다. 해석모델의 절점 수는 172개이며, 342개의 요소로 이루어져 있고, 불평형력벡터의 유클리드노름이 0.01이하가 될 때까지 반복하여 계산하였다.

막구조는 형태저항형 구조시스템으로서 막면내의 인장력에 의해 외력에 저항한다. 따라서 외력이 표면을 통해 효율적으로 전달되는 매끄러운 표면형상을 결정해 주어야 하는 문제가 제기되며, 막구조의 형상은 외력에 의한 응력의 크기 정도나 처짐의 양을 지배하는 가장 중요한 요소가 된다. 인장구조물은 압축력에 저항할 수 없고, 모든 단면에 대해 균일한 인장력이 분포되도록 초기형상을 결정해 주어야 하기 때문에, 구조물형상과 응력분포의 관계가 복잡한 구조시스템이다.



(a) 탄성계수 = 0.001

(b) 탄성계수 = 0.0

그림 3. 탄성계수에 따른 형상해석결과

그림 3은 동적이완법에 이용한 탄성계수에 따른 해석결과형상이며, 그림 4와 5는 탄성계수와 해석기법에 차이에 의한 수렴도의 차이를 나타낸 그래프이다.

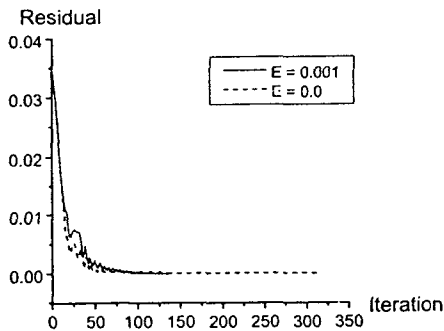


그림 4. 탄성계수에 따른 수렴과정

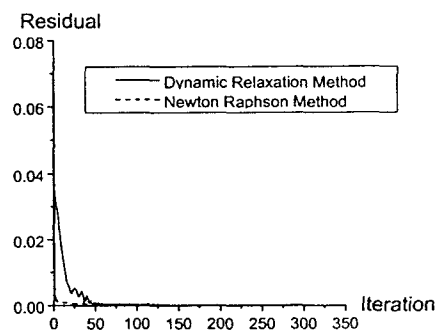


그림 5. 탄성계수에 따른 수렴과정

표 1은 탄성계수값에 따른 3가지 경우에 대하여 총 계산시간 및 반복회수를 동적이완법과 뉴튼랩슨법에 대하여 각각 수행한 결과를 비교하였다. 표 1에서 알 수 있듯이 행렬연산이 필요 없는 동적이완법의 수치해석시간이 반복계산회수에 비해 대단히 빠름을 알 수 있으며, 탄성계수 값이 작아짐에 따라 뉴튼랩슨법으로는 형상을 구할 수 없음을 알 수 있었다. 또한 탄성계수가 작을수록 부드러운 등장력곡면을 얻을 수 있었는데 이는 탄성

표 1. 동적이완법과 뉴튼랩슨법에 의한 해석결과

	동적이완법			뉴튼랩슨법		
	case 1	case 2	case 3	case 1	case 2	case 3
탄성계수(kg/cm ²)	0.0	0.001	0.01	0.0	0.001	0.01
총반복회수(번)	311	279	140	발산		216
총계산시간(초)	6.635	5.489	3.128			147.96

계수가 0으로 됨으로서 전단응력을 고려되지 않고 등장력곡면을 구할 수 있었기 때문이다.

동적이완법에 의해 강제변위를 주어 등장력곡면 형상해석을 수행한 결과는 그림 6과 표 2에 표시하였다.

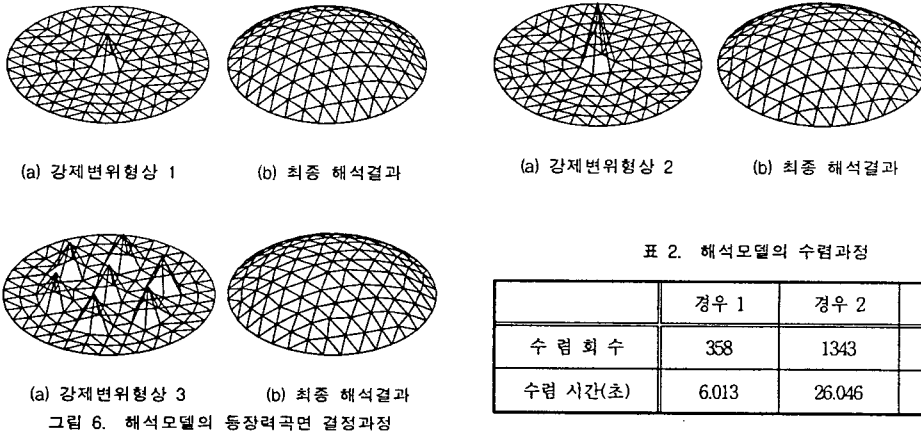


표 2. 해석모델의 수렴과정

	경우 1	경우 2	경우 3
수렴 회수	358	1343	628
수렴 시간(초)	6.013	26.046	12.914

초기 형상과 관계없이 같은 형상해석결과를 구할 수 있었고 이는 등장력곡면으로 수렴되기 때문이다. 첫 번째 경우가 훨씬 빠른 수렴과정을 통해 등장력곡면의 형상결정과정을 수행함을 보이는데 그 이유는 초기형상이 해석결과형상과 더 가까운 형상을 하고 있기 때문이고, 형상적으로 다른 두 경우보다 더 안정적이기 때문이다.

4. 응력해석

공기막구조물은 다른 구조물에 비하여 풍하중의 영향이 지배적이므로 바람의 영향을 고려하여야 한다. 본 논문에서는 지상에서 10m 위치의 풍속을 각각 50m/s, 40m/s, 30m/s로 가정하고 해석하였으며, 공기막돔의 형상계수는 참고문헌¹¹⁾의 풍동실험값을 사용하였다. 식(13)은 단위면적당 풍압에 관한 식으로 δ 는 공기밀도, C_p 는 바람에 대한 구조물의 형상계수, V_m 은 바람의 평균속도이다.

$$p = \frac{1}{2} \delta C_p V_m^2 \quad (13)$$

또한, 공기막은 자중에 비하여 적설하중이 크므로 이에 대하여 큰 영향을 받으며, 적설하중을 각각 50kg/m², 40kg/m², 30kg/m²으로 가정하여 해석을 하였고 가정된 하중에 대한 해석결과는 표 3과 같다.

구하여진 등장력곡면을 갖는 공기막구조물에 대하여 가정된 하중을 가하여 동적이완법과 뉴튼-랩슨법에 의하여 응력해석을 하였다. 표 3은 해석결과 구해진 구조물의 최대절점변위를 표시하고 있으며, 표에서 알 수 있듯이 뉴튼랩슨법과 동적이완법의 결과는 거의 일치하며, 가해진 하중의 형태에 따라 최대 변위가 발생하는 절점의 위치가 다르고 하중의 크기에 따라 변위의 크기가 다름을 알 수 있다.

표 3. 최대 절점변위 ((): 절점번호)

		동적이완법			뉴튼랩슨법		
		x축	y축	z축	x축	y축	z축
풍하중	50kg/s	-0.359 (51)	-0.675 (56)	3.245 (1)	-0.359 (51)	-0.674 (56)	3.242 (1)
	40kg/s	-0.380 (51)	-0.584 (56)	2.550 (1)	-0.379 (51)	-0.584 (56)	2.548 (1)
	30kg/s	-0.400 (50)	-0.513 (56)	1.989 (1)	-0.400 (50)	-0.512 (56)	1.988 (1)
설하중	50kg/m ²	-0.446 (77)	-0.408 (84)	-2.357 (1)	-0.446 (77)	-0.408 (84)	-2.358 (1)
	40kg/m ²	-0.393 (77)	-0.392 (84)	-1.613 (1)	-0.393 (77)	-0.392 (84)	-1.614 (1)
	30kg/m ²	-0.379 (78)	-0.390 (84)	-0.882 (1)	-0.379 (78)	-0.390 (84)	-0.882 (1)
풍하중(50kg/s) + 설하중(50kg/m ²)		-0.699 (20)	-0.608 (84)	-1.663 (20)	-0.699 (20)	-0.608 (84)	-1.663 (20)

응력해석시에는 공기막구조물이 충분히 내부에 공기압이 가해져서 외부하중과 평형을 이루어 함몰이 없을시에는 뉴튼랩슨법이 동적이완법에 비해 수렴속도가 상당히 빠름을 알 수 있었다. 공기막돔의 내압이 작아서 막면에 함몰현상이 발생할 시에는 해석시 강성행렬의 역행렬을 작성해야 하는 뉴튼랩슨법에 의해서는 해를 구할 수 없었지만 동적이완법에 의해서는 해를 구할 수 있었다. 뉴튼랩슨법은 강성행렬의 역행렬을 계산하여 변위를 구하므로 구조물의 자유도가 커질 경우 계산이 복잡해지고 그 만큼 수렴을 위한 수치해석 시간이 길어져 대단히 많은 반복계산이 요구되는 막구조의 형상해석에서는 비효율적인 수치해석법이다. 또한 강성행렬의 역행렬을 구하여야 하는 뉴튼랩슨법으로는 막구조물에서 함몰현상이 발생할 경우에는 형상탐색이나 응력해석을 수행할 수 없음을 알 수 있었다.

5. 결론

본 논문에서는 동적이완법을 이용하여 초기장력과 공기막돔의 내부공기압에 의한 막의 초기형상을 결정하는 해석기법을 제시하였고, 바람과 눈에 의한 응력해석결과로부터 동적이완법의 수렴에 대한 우수성을 알 수 있었다.

여기에서 제시된 해석기법을 이용하여 공기막구조물의 초기형상생성과 필요공기압을 산정할 수 있었고, 풍하중과 설하중을 고려한 응력해석의 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 동적이완법을 이용하여 공기막구조물의 형상탐색 및 응력해석을 할 수 있었다.
2. 초기 해석모델의 단성계수에 따라 수렴성과 구하여진 등장력곡면 형상의 차이를 알 수 있었다.
3. 바람과 눈에 의한 하중의 영향이 공기막구조물의 안정성에 큰 영향을 미침을 알 수 있었다.

6. 참고문헌

1. 石井一夫, "State-of-the-art report 膜構造の形状解析(形状決定の問題)概説", 日本膜構造協會, 1989, pp. 83-108
2. Suzuki, T., Hangai, Y., "An analytical method of minimal surfaces based on the finite element method", Proc. of the Third Summer Colloquium on Shell and Spatial Structures, 1990. pp. 343-356
3. Ishii, K., Suzuki, T., "Shape of membrane structures", Proc. IASS Pacific Symposium on Tension Structures and Space Frame, Tokyo 10, 1971
4. Day, A.S., "An Introduction to Dynamic Relaxation", The Engineer, London, 1965, vol. 219, pp. 18-221
5. Papadrakakis, M., "A method for automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 25, 1981, pp. 35-48
6. Underwood, P., Dynamic Relaxation, in "Computational Methods for Transient Analysis", Belytschko, T., Hyghes, T.J.R. editors, Elsevier Science Publishers, 1983, pp. 245-265
7. Wakefield, D., "Membrane engineering-principles and applications", Proc. Asia-pacific conf. on Shell and Spatial Structures. 1996, pp. 407-418
8. Gosling, P. D., Riches C. G. "Some results on the numerical representation of the load-deflection characteristic of pneumatic beams", IASS International Symposium 97, Singapore, pp. 297-306
9. Atai, A. A., "Numerical analysis of membrane structures", IASS International Symposium 97, Singapore, pp. 163-172
10. Barnes, M., "Non-linear numerical solution methods for static and dynamic relaxation", IL Publication number 15, 1982, pp. 150-166
11. Kato, S., Zhu, L., Yamada, S., "Effects of Sub-Structure on Wind Load Capacity of Single Layer Latticed Dome", Proceedings of the IASS INTERNATIONAL SYMPOSIUM '97 on SHELL & SPATIAL STRUCTURES vol. 1, pp. 403-408, 1997
12. 한상울, 이경수, "동적이완법에 의한 막구조의 등장력곡면 형태해석에 관한 연구", 대한건축학회 추계 학술 발표대회 논문집, 제 18권 제2호, pp. 147-152, 1998

감사의 글

본 연구를 수행하는데 지원을 아끼지 않은 초대형 구조시스템 연구센터(STRESS)에 감사를 표합니다