

단순지지 변단면 압축재의 임계하중 Elastic Critical Load of Tapered Columns

홍종국*
Hong, Jong-Guk

김순철**
Kim, Soon-Chul

이수곤***
Lee, Soo-Gon

ABSTRACT

One of the most important factors for a proper design of a slender compression member may be the exact determination of the elastic critical load of that member. In the cases of non-prismatic compression members, however, there are times when the exact critical load becomes impossible to determinate if one relies on the neutral equilibrium method or energy principle. Here in this paper, the approximate critical loads of symmetrically or non-symmetrically tapered members are computed by finite element method. The two parameters considered in this numerical analysis are the taper parameter, α and the sectional property parameter, m . The computed results for each sectional property parameter, m are presented in an algebraic equation, which agrees with those by F.E.M. The algebraic equation can be easily used by structural engineers, who are engaged in structural analysis and design of non-prismatic compression members.

1. 서 론

등단면 압축재에 비하여 부재의 폭(width)이나 춤(depth)이 부재축에 따라서 연속적으로 변하는 변단면 압축재의 임계하중 산정은 해석적 방법(analytical method)이나 energy원리 적용이 대단히 복잡하게 되거나 불가능하게 될 때가 많다. 이와 같은 경우에는 수치 해석법을 이용함이 편리하다.

여기서는 수치해석법의 하나인 유한요소법을 이용하여 양단이 단순지지된 비대칭 및 대칭 변단면의 임계하중을 산정하였다. 그러나 수치해석법의 결과는 좌굴지배 매개변수들이 특정값을 취할 경우에만 유효하므로 구조 기술자들이 쉽게 이용할 수 없다. 따라서 하나의 간단한 제안식으로부터 임계하중 추정이 가능한 식을 제안하였다. 대수식에 포함되는 몇 개의 상수(constant)들은 회귀법을 이용하여 결정하였다. 또한 대수식의 적합여부는 상관계수로부터 판정하였다.

2. 유한요소법의 정식화

그림 1(a)와 같은 비대칭과 그림 1(b)와 같은 대칭 변단면 기둥의 임계하중은 다음식으로 지배된다.

- * 전남대학교 대학원 석사과정
- ** 동신대학교 건축공학과 부교수
- *** 전남대학교 건축학과 교수

$$EI_x \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = 0 \quad (1-a)$$

또는

$$\frac{d^2}{dx^2} [EI_x \frac{d^2 v}{dx^2}] + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (1-b)$$

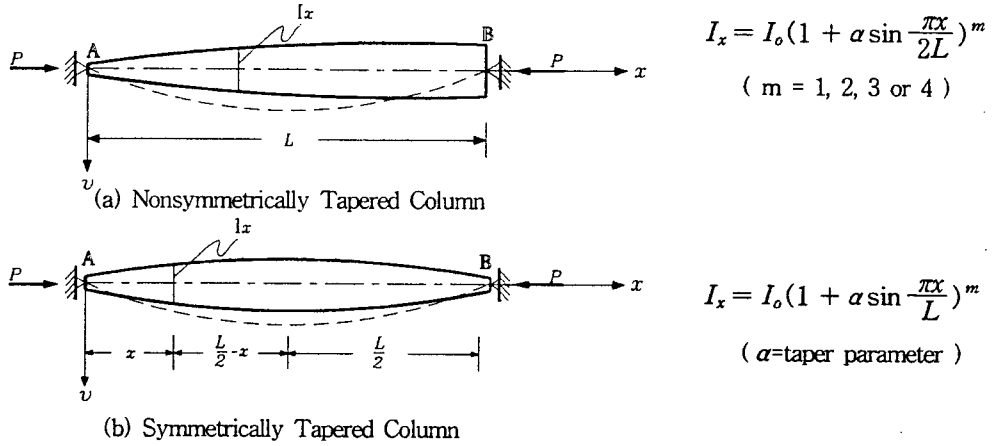


그림 1. 변단면 압축재

그러나 단면 2차 모멘트가 그림 1에서처럼 정현(sine)함수로 변하게 되면 식 (1)로 주어지는 미분방정식의 정해는 구할 수 없고 따라서 임계하중 산정도 불가능하게 된다. 이때에는 차분법이나 유한요소법과 같은 수치해석법에 의하여 임계하중을 산정할 수 있는데 이번 연구에 유한요소법을 이용하기로 한다.

강성행렬법을 이용하여 변단면 압축재의 좌굴하중을 구하기 위하여 먼저 그림 2와 같은 선형요소를 택한다. 이와 같은 선형요소의 변형성분 δ_i 와 절점력 성분 q_i 는 다음 그림 2와 같이 가정한다. 임의점의 처짐 v 는

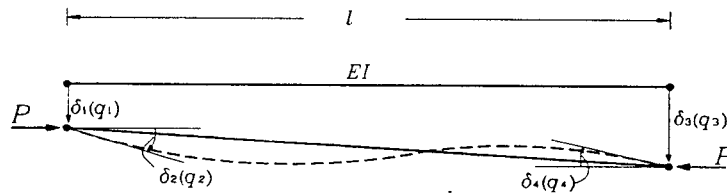


그림 2. 요소의 절점변형 및 절점력

$$v = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\} \quad (2)$$

식 (7)에서 $[K_b]$ 와 $[K_g]$ 는 요소의 강성행렬이 조합된 후 경계조건이 처리된 압축재 전체의 강성행렬을 뜻한다. 일반적으로 압축재의 임계하중은 식 (7)의 우측행렬의 행렬식을 0(zero)으로 놓아 산정한다. 이것을 식으로 표시하면

$$\det([K_b] - P[K_g]) = 0 \quad (8)$$

식 (8)은 전형적인 고유치 문제로서 행렬식의 차수(dimension)가 클 때는 computer를 이용한 반복법(iteration method)를 이용하여 임계하중을 산정함이 편리하다. 식 (8)에 그대로 반복법을 적용할 경우 최대 임계하중이 맨 처음 구해지므로 식 (8)을 다음과 같이 변형시켜 최소 임계하중 중 기본 mode에 대응하는 임계하중을 구한다.

$$\det\left([K_b]^{-1}[K_g] - \frac{1}{P}[I]\right) = 0 \quad (9)$$

식 (9)에서 $[I]$ 는 단위행렬(identity matrix)을 의미한다.

4. 임계하중 계산에

앞의 3절에서 전개한 이론을 그림 1(a)와 같은 비대칭 변단면 및 그림 1(b)와 같은 대칭 변단면 압축재의 좌끝에 응용하기로 한다. 일반적으로 요소를 세분할수록, 바꾸어 말하면 부재의 요소수를 증가할수록 수치해석법에 의한 결과는 정해치에 더욱 수렴하는 것으로 알려지고 있다. 이와같은 사실은 그림 1과 같은 변단면의 임계하중 산정에서 요소수 증가에 따른 임계하중의 수렴정도를 나타내는 다음의 그림 3으로부터 알 수 있다.

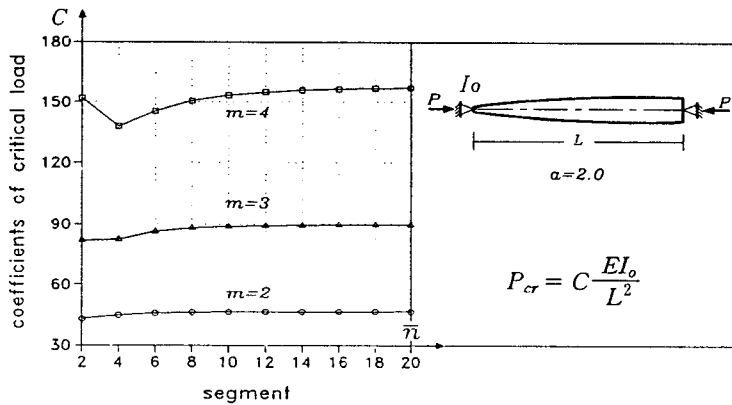


그림 3. 요소수의 증가와 수렴도

단면형태변화가 그림 1과 같을 때 정확한 임계하중식은 알 수 없으나 $N=16$ 부터는 거의 일정한 값을 유지하므로 여기서는 $N=20$, 즉 변단면 압축재를 20등분 한 다음 $\alpha = 0.1$ 에서 $\alpha = 2.0$ 까지 변할 때의 임계하중치를 산정하였고 그 결과는 표 1 및 표 2와 같다. 표에서 " C_{lem} "이란 열(column)이 유한요소법에 의한 결과이다.

표 1. 비대칭변단면 압축재의 임계하중 (그림 1(a))

$$P_{cr} = C_{est} \cdot \frac{EI}{L^2}$$

α	m = 1		m = 2		m = 3		m = 4	
	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}
0.0	9.8693	9.8888	9.8693	9.8232	9.8693	9.8107	9.8693	9.9620
0.1	10.5389	10.5391	11.2334	11.2213	11.9793	11.9548	12.7663	12.7806
0.2	11.1840	11.1859	12.6577	12.6664	14.2884	14.2944	16.1134	16.0775
0.3	11.8341	11.8291	14.1459	14.1585	16.8162	16.8294	19.9055	19.8529
0.4	12.4730	12.4689	15.6760	15.6975	19.5269	19.5600	24.1479	24.1066
0.5	13.1208	13.1051	17.2604	17.2834	22.4459	22.4860	28.8742	28.8387
0.6	13.7418	13.7377	18.8970	18.9166	25.5887	25.6076	34.0767	34.0493
0.7	14.3754	14.3669	20.5705	20.5966	28.8993	28.9246	39.7644	39.7382
0.8	15.0078	14.9925	22.3103	22.3236	32.4012	32.4372	45.9174	45.9055
0.9	15.6126	15.6146	24.0996	24.0976	36.1387	36.1452	52.5316	52.5512
1.0	16.2438	16.2331	25.9174	25.9186	40.0381	40.0487	59.6213	59.6753
1.1	16.8364	16.8481	27.8065	27.7866	44.1282	44.1477	67.2307	67.2778
1.2	17.4555	17.4596	29.7224	29.7015	48.4779	48.4422	75.3165	75.3587
1.3	18.0586	18.0676	31.6634	31.6635	52.9919	52.9322	83.9358	83.9180
1.4	18.6570	18.6720	33.6854	33.6724	57.6590	57.6177	92.9372	92.9557
1.5	19.2601	19.2729	35.7387	35.7283	62.4939	62.4987	102.4208	102.4717
1.6	19.8587	19.8702	37.8592	37.8312	67.6152	67.5752	112.4648	112.4662
1.7	20.4650	20.4641	40.0030	39.9811	72.8792	72.8472	122.9639	122.9391
1.8	21.0602	21.0544	42.2168	42.1779	78.3146	78.3146	134.0065	133.8903
1.9	21.6445	21.6412	44.3655	44.4218	83.9940	83.9776	145.2971	145.3200
2.0	22.2393	22.2244	46.6824	46.7126	89.7409	89.8361	157.2013	157.2280

표 2. 대칭변단면 압축재의 임계하중 (그림 1(b))

$$P_{cr} = C_{est} \cdot \frac{EI}{L^2}$$

α	m = 1		m = 2		m = 3		m = 4	
	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}
0.0	9.8693	9.8811	9.8693	9.8078	9.8693	10.4619	9.8693	12.0869
0.1	10.7022	10.7063	11.6079	11.5836	12.5768	12.7903	13.6348	14.1813
0.2	11.5297	11.5291	13.4586	13.4658	15.6868	15.6321	18.2482	17.7142
0.3	12.3534	12.3496	15.4344	15.4544	19.2161	18.9874	23.8603	22.6858
0.4	13.1686	13.1677	17.5174	17.5493	23.1678	22.8561	30.5056	29.0959
0.5	13.9776	13.9835	19.7034	19.7505	27.5799	27.2384	38.2950	36.9445
0.6	14.8115	14.7969	22.0243	22.0581	32.4422	32.1341	47.2418	46.2318
0.7	15.6310	15.6079	24.4493	24.4721	37.8027	37.5432	57.5867	56.9576
0.8	16.4208	16.4166	26.9626	26.9925	43.6334	43.4659	69.2625	69.1219
0.9	17.2305	17.2229	29.6192	29.6192	50.0039	49.9020	82.3064	82.7249
1.0	18.0236	18.0269	32.3613	32.3522	56.8047	56.8516	97.0227	97.7664
1.1	18.8258	18.8285	35.2118	35.1916	64.2012	64.3147	113.1292	114.2465
1.2	19.6172	19.6277	38.1732	38.1374	72.0452	72.2912	130.6720	132.1651
1.3	20.4251	20.4246	41.2212	41.1895	80.4965	80.7812	150.0019	151.5224
1.4	21.2103	21.2191	44.3751	44.3480	89.4541	89.7847	171.2479	172.3182
1.5	21.9938	22.0113	47.6505	47.6128	99.0309	99.3017	193.6790	194.5525
1.6	22.8002	22.8011	50.9614	50.9840	109.0645	109.3321	218.4140	218.2255
1.7	23.5752	23.5885	54.4866	54.4616	119.7284	119.8760	244.5312	243.3370
1.8	24.3750	24.3736	58.0626	58.0455	131.0469	130.9333	272.5061	269.8870
1.9	25.1671	25.1563	61.7016	61.7358	142.6699	142.5042	302.1071	297.8757
2.0	25.9503	25.9367	65.4916	65.5324	155.0469	154.5885	332.8216	327.3029

5. 회귀식

수치해석법에 의한 결과치는 어떤 특정 경우에만 적용할 수 있고 따라서 일반화 할 수 없는 것은 일반적으로 알려진 사실이다. 여기서는 구조설계 실무에 종사하는 기술자가 그림 1과 같은 압축재의 설계에 당면하게 될 때 부재의 내력평가를 보다 정확히 하는데 도움이 되도록 다음과 같은 추정식을 제안하였다.

$$C_{est} = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 \quad (10)$$

위의 추정식중의 상수 A, B 및 C는 표 1과 표 2의 C_{fem} 값을 기본으로 회귀법으로 구하였다. 또 식 (10)을 이용하여 추정한 값이 표 1과 2의 " C_{est} "란 열이다.

표 3. 회귀상수(I)

		A_0	A_1	A_2	r
Non -symm	$m = 1$	9.8888	6.5208	-0.1765	1.0
	$m = 2$	9.8232	13.7461	2.3493	1.0
	$m = 3$	9.8107	20.4633	9.7747	1.0
	$m = 4$	9.9620	25.7936	23.9197	1.0
Symm	$m = 1$	9.8811	8.2638	-0.1180	1.0
	$m = 2$	9.8078	17.2265	5.3179	1.0
	$m = 3$	10.4619	20.7161	25.6736	1.0
	$m = 4$	12.0869	13.7510	71.9285	1.0

식 (10)의 번거로움을 없애고 사용상의 편리를 도모하기 위하여 식 (10)의 2차식을 α 와 m 에 관한 함수가 되도록 다음의 식을 다시 제안해 보았다. 즉, 식 (10)의 각 항의 상수들을 다시 m 에 대한 2차식으로 나타내어 보면 다음과 같은 제안식을 유도할 수 있다.

$$C(\alpha, m) = (A_0 + A_1 m + A_2 m^2) + (B_0 + B_1 m + B_2 m^2)\alpha + (C_0 + C_1 m + C_2 m^2)\alpha^2$$

$$P_{cr} = C(\alpha, m) \cdot \frac{EI_0}{L^2} \quad (11)$$

표 4의 회귀상수들을 α 와 m 에 대하여 표 3의 상수들을 역시 회귀법을 이용하여 구한 것으로 정리해 보면 다음과 같다.

표 4. 회귀상수(II)

	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	C_0	C_1	C_2	r
Non-symm	10.0895	-0.2505	0.0542	-1.8699	8.8225	-0.4738	3.5616	-6.5527	2.9048	1.0
Symm	11.5904	-2.3131	0.6606	-13.1274	26.0353	-5.0689	19.6933	-30.0564	10.9106	1.0

식 (10)과 식 (11)의 추정식이 유한요소법에 의한 임계하중치를 얼마나 충실히 반영하는가를 나타내는 상관계수가 표 3과 표 4의 r 이다. 상관계수 r 은 다음식으로 계산된 값이다.

$$r = \frac{\sum (C_{fem} - \bar{C}_{fem}) \cdot (C_{est} - \bar{C}_{est})}{\sqrt{\sum (C_{fem} - \bar{C}_{fem})^2 \cdot \sum (C_{est} - \bar{C}_{est})^2}} \quad (12)$$

\bar{C}_{fem} 와 \bar{C}_{est} 는 각 C_{fem} 과 C_{est} 의 산술평균값을 의미한다.

다음은 정현함수로 변하는 변단면에서 taper parameter α 와 sectional parameter m 에 대해 좌굴하중의 변화가 어떻게 변화하는가를 보여주는 그래프이다.

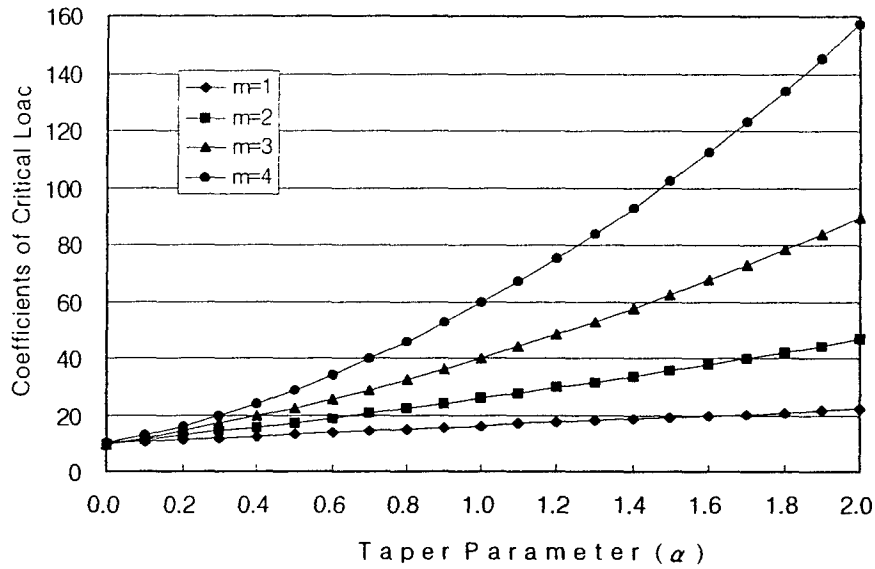


그림 4. 비대칭 변단면 기둥의 임계하중

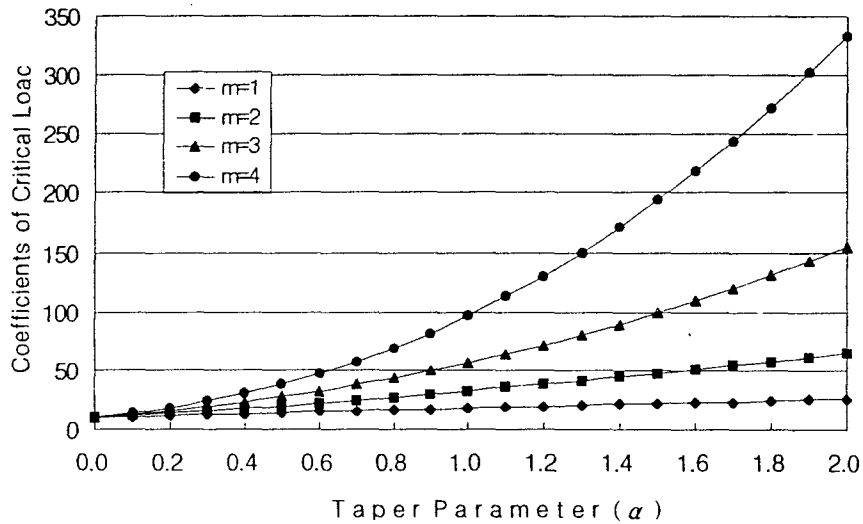


그림 5. 대칭 변단면 기둥의 임계하중

6. 결 론

양단이 단순지지된 변단면 압축재의 임계하중의 산정을 수치해석법의 하나인 유한요소법(finite element method)을 이용하여 구하였다.

유한요소법(finite element method)을 이용하여 얻은 좌굴하중의 표준치를 회귀분석법을 이용하여 간단한 2차식으로 제안하였다.

표준치인 유한요소법으로 산정한 임계하중과 제안식을 통한 임계하중을 비교해 보면,

1. 예상했던 대로 taper parameter α 와 sectional parameter m 이 증가함에 따라 임계하중이 증가함을 알 수 있다.
2. 계수 C 값을 보면 대칭 단면의 경우 최대 약 4%정도의 오차를 보일 뿐, 거의 모든 경우 1% 미만의 비교적 정확한 수치를 얻을 수 있어 산정된 임계하중 값들을 신뢰할 수 있다.
3. 따라서 재료의 절약이나 기능적인 측면에서 변단면 기둥의 설계나 구조 검토에 구조 실무자들이 위의 제안식을 이용할 경우 쉽게 이용할 수 있고 정확한 결과를 얻을 수 있어 편리하다.
4. 이러한 결과를 통해서 볼 때 지지조건이 다른 경우, 즉 단순-고정, 고정-고정의 경우에 대한 연구가 계속되어야 할 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

1. Stephen P. Timoshenko and James M. Gere, "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill Book Co., 1963
2. 이 수 곤, "Eigenvalue Problems of the Tapered Bars with Partially Fixed Ends", 서울대학교 대학원 박사학위 청구논문, 1979
3. Daniel J. Gorman, "Free Vibration Analysis of Beams and Shafts", John Wiley & Sons, Inc., 1975
4. Himat Solanki and Gajanan M. Sabnis, Buckling Load of Tapered Columns, pp436~442, Structures Congress, 1989
5. Moshe Eisenberger and Yoram Reich, Buckling of Variable Cross Section Columns, pp443~451, Structures Congress, 1989
6. Frank E. Weisgerber and Khalid Salahuddin, Elastic Stability of Non-Prismatic Columns, pp410~417, Structures Congress, 1989
7. 이 수 곤, "構造物の 安定理論", 전남대학교 출판부, 1995
8. Alexander Chajes, "Principles of Structural Stability Theory", Prentice-Hall, Inc., 1974
9. 이 상 재, "變斷面 棒의 近似 臨界荷重", 전남대학교 대학원 석사학위 청구논문, 1980
10. 建築構造學大系 編輯委員會, "固有値問題", 彰國社(日本), 1967
11. W.F.Chen and E.M.Lui, "Structural Stability", Elsevier, 1987
12. 사 중 엽, Professor's Numerical Analysis Home Page, Ch.4, 회귀분석, Ch.5, 수치적분,
13. Murray R. Spiegel, "Probability and Statistics", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1975