

지진시에 교량의 탄성 받침을 표현하는  
범용 연결 유한 요소 모델의 유도식  
Derivation of General Link Finite Element Equation  
representing Pad Shoe in Bridge under Earthquake

정 대 열\*  
Jeong, Dae-Yeol

ABSTRACT

When we numerically model the bridge under seismic condition, the full model combining the super-structure and the sub-structure is considered for the more accurate results than the separate model. In this case, the super-structure is connected with the sub-structure by the elastic pad shoe that is difficult to model, because it has the three translational elastic stiffness and the three rotational elastic stiffness. The two-node General Link element is derived in finite element equation representing such a pad shoe, and it is verified by comparing the one General Link element model with the corresponding three legacy spring element model. It is easy to model the pad shoe, if the General Link finite element is used. And the seismic analysis result of the bridge full model structure, which is modeled with the General Link element, has been compared with the one of the separate model structure. The present study gives more conservative result than that of the separate model, which does not consider the dynamic behaviour of the sub-structure.

1. 서 론

지진에 의한 교량 구조물의 거동에 있어서 상부 구조의 이동 시에 상부와 하부의 연결 고리인 슈(Shoe)에 의한 반력이 하부 구조물의 상단에 전달된다. 따라서 슈를 고정 단이나 이동 단으로 설계할 경우에는, 상부 구조물의 수평 반력은 고정 단 슈에만 집중되어 고정 단 슈가 놓인 하부 구조물만 지나치게 큰 수평력을 받고 상대적으로 이동 단 슈가 놓인 하부 구조물은 전혀 수평력을 받지 못함으로써, 하부 구조물의 설계가 불균형 설계 혹은 과대 설계가 될 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위한 한가지 방안으로 탄성 슈(Pad Shoe)를 사용할 수 있다. 탄성 슈란 고정 단도 이동 단도 아닌 탄성 이동 단의 성격을 띤 슈를 말한다.

지진 시에 복합 모드 스펙트럼 해석에 의한 하부 구조물의 거동을 해석하기 위해서는 상부 구조와 하부 구조를 모두 포함하는 교량 전체를 모델링할 필요가 있다. 이때 기존의 각각 1개의 축 방향 및 비틀림 강성을 지닌 스프링 요소로는, 그림 1의 (a)와 같이 각각 3 방향의 이동 및 회전 강성을 지닌 탄성 슈에 의해 연결된 교량 상부 구조와 하부 구조의 연결부를 모델링하는 것이 매우 어렵다. 이것은 기존의 스프링 요소가 그림 1의 (b)와 같이 요소 양단의 위치에 의해 그 방향으로 연결된 인장 스프링 및 회전 스프링의 물리적인 의미를 가지고 요

\* 에메랄드 소프트 기술사사부소 대표, 토목구조기술사, 공학박사

소의 강성을 표현하기 때문이다. 따라서 이를 해결하려면, 그림 1의 (c)와 같이 요소 양단의 위치와는 무관한 방향으로 각각 3 방향의 이동 및 회전 강성을 가지는 범용 연결 요소가 필요하다.

본 논문에서는 이러한 2 절점 범용 연결 요소(general link element)에 대한 유한 요소 식을 유도하고, 예제를 통해서 이를 검증하였다. 또한 탄성 받침을 사용하는 2 경간 연속형 교에 대하여 기존의 스프링 요소를 사용하여 상부 구조와 하부 구조를 분리하여 내진 해석한 결과와, 본 논문에서 개발한 범용 연결 요소를 사용하여 상부 구조와 하부 구조를 함께 모델링하여 내진 해석한 결과를 비교하였다. 내진 해석시에, 하부 구조물의 질량이 무시할 수 없을 정도로 큰 경우에는 상부 구조와 하부 구조를 함께 모델링하지 않으면 부정확한 해석 결과를 가져온다, 따라서, 이러한 경우에는 여기서 개발한 범용 연결 요소를 사용함으로써 상하부를 함께 모델링함으로써 정확한 해석을 기할 수 있다.

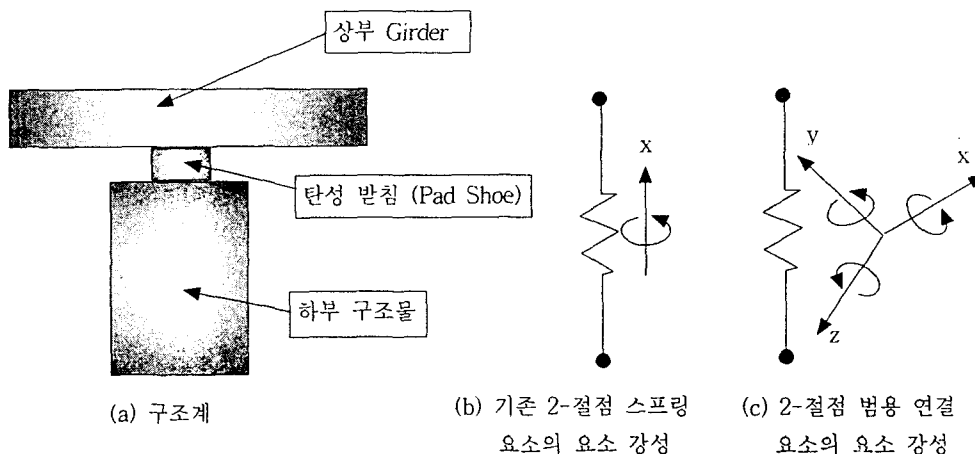


그림 1. 탄성 받침을 모델링할 때 사용되는 요소

## 2. 범용 연결 유한 요소 모델의 유도 식

### 2.1 가상 일의 원리에 의한 유한 요소 해석의 정식화

그림 2에서 가상 일의 원리에 의해 유한 요소 해석을 정식화하면 (1)식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \\
 &= \sum \int_V \delta \epsilon^T \cdot \sigma dV \\
 &= \sum \delta u^T \cdot T^T \left( \int_V B^T \cdot D \cdot B \cdot dV \right) \cdot T \cdot u \quad (1)
 \end{aligned}$$

여기서,  $u$  : 전체 좌표계의 절점 변위 벡터

$T$  : 변환 매트릭스

$u^e$  : 요소 좌표계의 절점 변위 벡터, 따라서  $u^e = T \cdot u$

$\sigma$  : 요소 응력 매트릭스

$\epsilon$  : 요소 변형도 매트릭스

$D$  : 응력-변형도 관계 매트릭스, 따라서  $\sigma = D \cdot \epsilon = D \cdot B \cdot u^e$

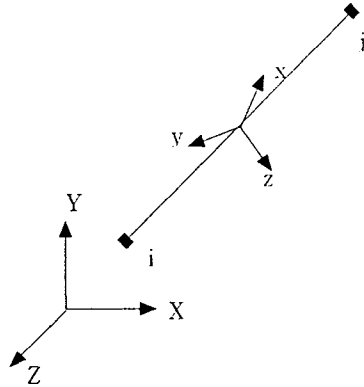


그림 2. 2-절점 범용 연결 요소와 요소 좌표 계

### 2.2 범용 연결 요소의 강성 매트릭스 유도

$k_x, k_y, k_z$  및  $r_x, r_y, r_z$  를 각각 범용 연결 요소의 요소 좌표계의 x,y,z 축에 대한 축방향 스프링 상수 및 회전 방향 스프링 상수라 하면,  $\epsilon_x = (u_{jx}^e - u_{ix}^e)$ ,  $\sigma_x = k_x \cdot \epsilon_x$ , 따라서 같은 방법을 사용하면,

$$D = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_z \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

가 된다. 또한,  $k_x, k_y, k_z$  및  $r_x, r_y, r_z$  를 각각 범용 연결 요소의 요소 좌표계의 x,y,z 축에 대한 축 방향 댐퍼 및 회전 방향 댐퍼로 두면, 댐퍼를 가진 범용 연결 요소가 된다.

### 3. 검증

본 논문에서 유도한 식을 사용하여 프로그램(PENTAGON-Bridge)을 작성하였으며, 탄성 고정단을 가진 외팔보에 대하여 기존의 스프링 요소 3개를 사용한 해석 모델과 범용 연결요소 1개를 사용한 해석 모델의 결과를 비교 검증하였다. 검증에 사용된 해석 모델은 그림 3과 같으며, 해석 조건은 표 1과 같다. 해석 결과, 그림 4 및 표 2와 같이 기존의 스프링 요소를 사용한 결과와 일치하였다. 주목할 점은 기존의 스프링 요소를 사용하면 3개의 스프링 요소 (x, y 및 z 방향 요소 각 1개)를 사용하게 되지만, 범용 연결 요소를 사용하면 1개의 요소만

사용하면 된다.

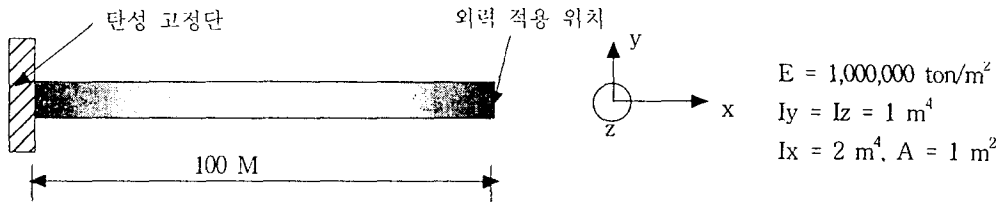


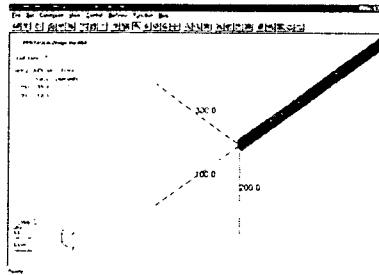
그림 3. 검증에 사용된 탄성 고정단 외팔보 모델

표 1. 검증 모델의 제 변수 값

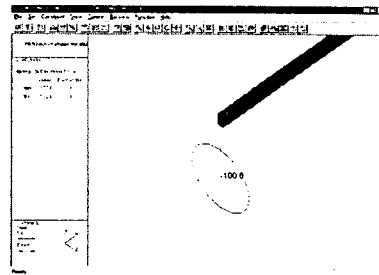
구 분	x 방향	y 방향	z 방향
축 방향 스프링 상수 (ton/m)	100	200	300
회전 방향 스프링 상수(ton.m/radian)	400	500	600
축 방향 외력 (ton)	100	200	300
회전 방향 외력 (ton.m)	400	500	600

표 2. 검증 모델의 해석 결과

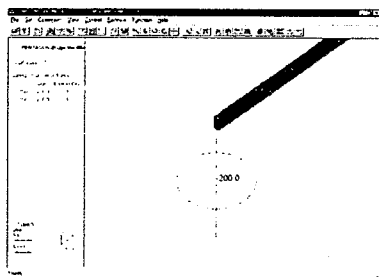
요소 구분	기존 스프링 요소			범용 연결 요소		
	x	y	z	x	y	z
축 방향 스프링 반력 (ton)	100	200	300	100	200	300
회전 방향 스프링 반력(ton.m)	400	29500	20600	400	29500	20600
축 방향 변위 (m)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
회전 변위 (radian)	1.0	59.0	34.3	1.0	59.0	34.3



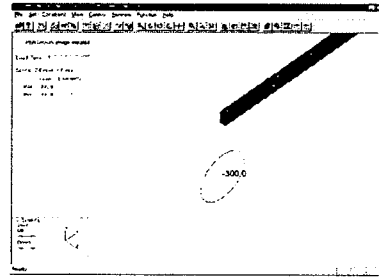
(a) 기존 스프링 요소의  
축 방향 반력



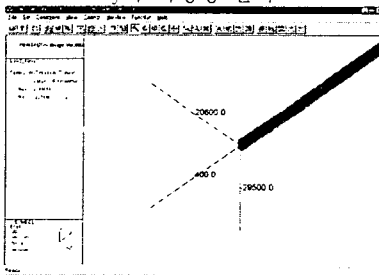
(b) 범용 연결 요소의  
x축 축방향 반력



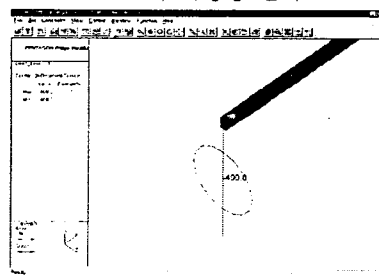
(c) 범용 연결 요소의  
y축 축방향 반력



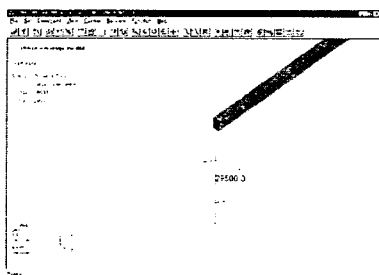
(d) 범용 연결 요소의  
z축 축방향 반력



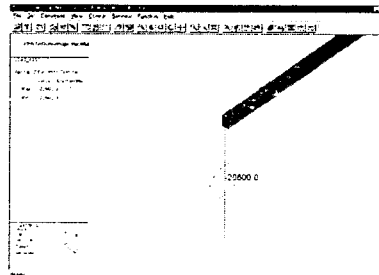
(e) 기존 스프링 요소의  
회전 방향 반력



(f) 범용 연결 요소의  
x축 회전 방향 반력



(g) 범용 연결 요소의  
y축 회전 방향 반력



(h) 범용 연결 요소의  
z축 회전 방향 반력

그림 4. 검증에 사용된 외관보의 해석 결과

#### 4. 적용 예

탄성 받침(Pad Shoe)을 사용하는 2경간 연속 교에 대하여, 범용 연결 요소를 사용함으로써, 교량 상부 구조와 하부 구조를 함께 모델링한 경우와, 기존의 스프링 요소를 사용함으로써, 교량 상부 구조와 하부 구조를 분리 모델링한 경우에 대하여 각각 복합 모드 스펙트럼 해석으로 내진 해석을 수행한 후, 그 결과를 비교 검토하였다. 해석 모델은 그림 5와 같고, Lumped Mass를 사용하여 2차원 해석을 수행하였다. 해석 조건은 표 3과 같고, 해석 결과를 그림 6, 그림 7 및 표 4에 정리하였다.

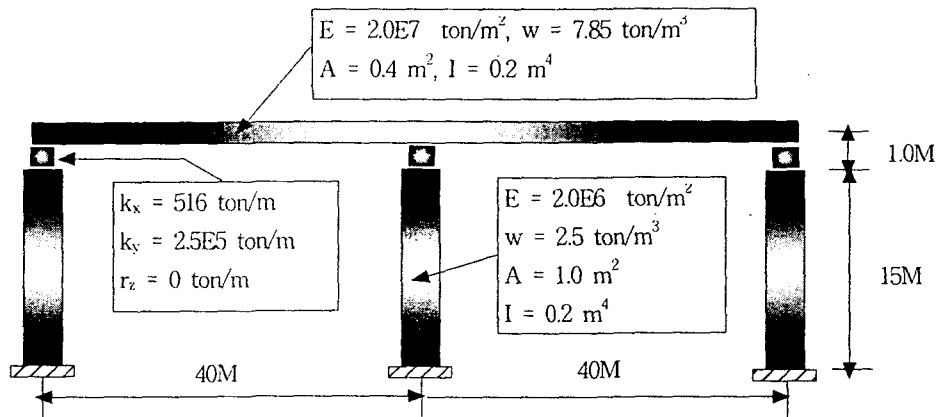


그림 5. 범용 연결 요소를 사용한 내진 해석 적용 모델

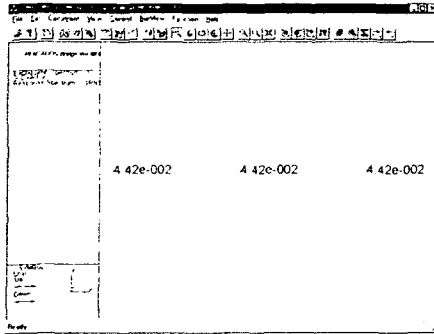
기존 스프링 요소를 사용하여 상하부 구조물을 별도로 모델링할 경우에 있어서, 상부 구조 지점의 스프링 상수는 탄성 받침과 하부 구조가 직렬로 연결된 것으로 취급하여, 탄성 받침의 스프링 상수를  $k_1$ , 하부 구조의 강성을 대표하는 스프링 상수를  $k_2$  라고 두면, 스프링 상수  $k$  는  $(k_1 \times k_2) / (k_1 + k_2)$ 로 구하였으며, 상부 동적 거동만 고려 시에는, 상부 구조 지점의 스프링 반력을 하부 구조의 상단에 외력으로 작용시켜 하부 구조의 단면력을 구하였다.

표 3. 적용 모델의 내진 해석에 사용한 제 변수 값

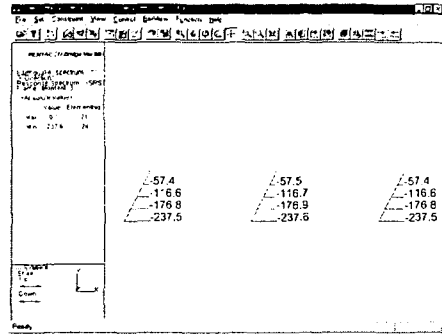
내진 등급	가속도 계수	지반 계수	사용 모드 수	기존 스프링 요소의 스프링 상수
1 등급	0.14	1.2	15	$k_x = 211, k_y = 8.0E4, r_z = 0$

표 4. 해석 결과 비교 (교축 방향) (단위 : Ton, M)

구 분	범용 연결 요소 (상하부 함께 모델)	기존 스프링 요소 (상하부 분리 모델)	
		상부 동적 거동만 고려	하부 동적 거동 합산
교각 하단 모멘트	237.6	216.7	281.4
교각 상단 변위	0.0442	0.0406	0.0511

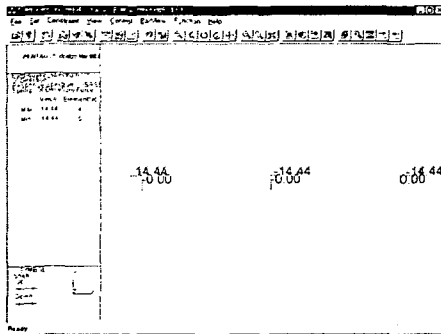


(a) 교각 상단 변위 (m)

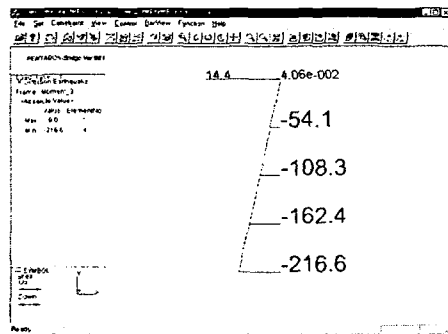


(b) 교각 모멘트 (ton.m)

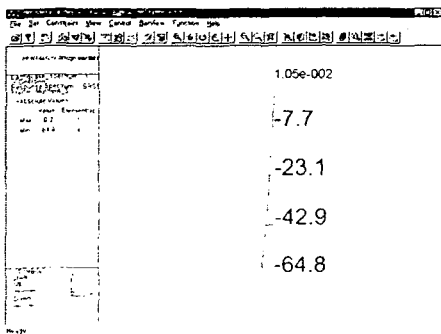
그림 6. 범용 연결 요소를 사용하여 상하부 구조를 함께 모델링 했을 경우의 내진 해석 결과



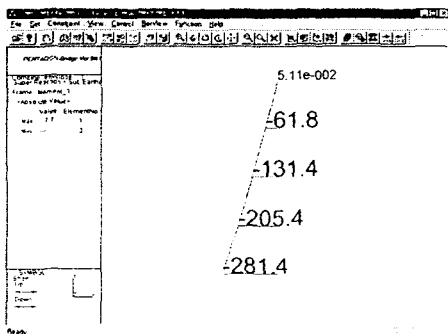
(a) 스프링의 반력 (ton)



(b) 교각 외력(ton), 변위(m) 및 모멘트 (ton.m)



(c) 하부 내진 거동시 변위(m) 및 모멘트 (ton.m)



(d) 합산 변위(m) 및 모멘트 (ton.m)

그림 7. 기존 스프링 요소를 사용하여 상하부 구조를 분리 모델링 했을 경우의 내진 해석 결과

## 5. 결론

탄성 받침(Pad Shoe)을 사용하는 교량의 내진 해석시에, 기존의 스프링 요소를 사용하면, 상부 구조와 하부 구조를 함께 모델링하는 것이 어렵다. 그러나, 범용 연결 요소를 사용하면 상부 구조와 하부 구조의 연결부로서의 탄성 받침(Pad Shoe)을 쉽게 모델링할 수 있다.

기존의 스프링 요소를 사용함으로써, 교량 상부 구조와 하부 구조를 분리 모델링할 경우에, 상부 구조물의 동적 거동으로부터 유발되는 반력을 하부 구조물의 상단에 정적 하중만 적용시킬 경우에는 하부 구조의 동적 거동이 고려되지 못함으로 인하여 불안전 축의 결과를 얻게 된다. 반면에 하부 구조물의 동적 거동을 고려하여 합산할 경우에는 하부 구조물의 동적 거동 모델에서 교각 상부의 구속을 고려하지 못한 관계로 비교적 큰 안전축의 결과가 얻어진다.

따라서 정확한 내진 해석 결과가 요구되는 경우에는 본 논문에서 유도한 범용 연결 요소를 사용하여 상부 구조와 하부 구조를 함께 모델링하여 해석하는 것이 바람직하다.

덧붙여, 본 논문의 범용 연결 요소는 두 절점 간의 다양한 연결 조건을 부여할 수 있기 때문에, 상부 슬래브와 하부 들보 간의 합성 작용 시의 연결부 모델링 (그림 8(a)), 중심 축이 일치하지 않으면서 연결되는 들보의 연결부 모델링 (그림 8(b)) 등에도 사용될 수 있다.

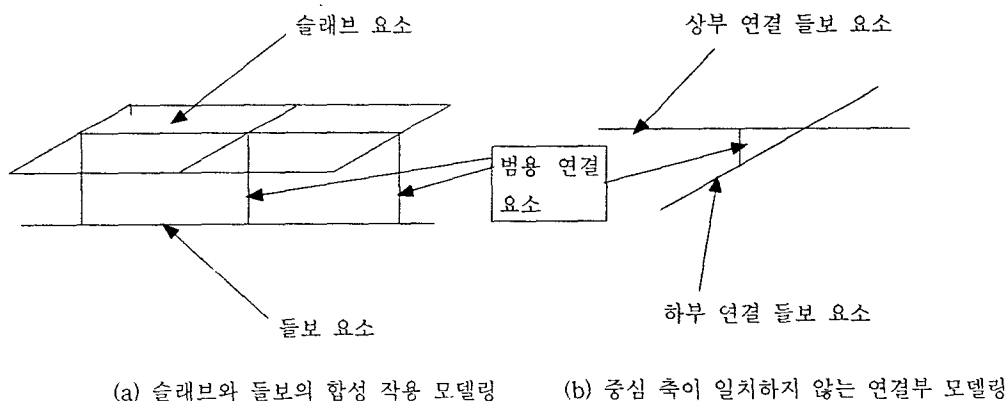


그림 8. 범용 연결 요소 적용 가능한 모델 들

### 참 고 문 헌

1. "PENTAGON-Bridge Manual", 에메랄드 소프트, 1998
2. "도로교 표준 시방서", 건설부, 1992, 1996
3. "Dynamics of Structures", Ray W. Clough, Joseph Penzien, McGraw-Hill, pp544-584, 1986
4. "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Klaus-Jurgen Bathe, Prentice-Hall, pp511-514, 1982