

곡률이 변하는 박벽 아치의 3차원 자유진동 및 좌굴해석

Spatial Free Vibration and Stability Analysis of Thin-Walled Arches with Variable Curvature

서 광 진*
Seo, Kwang-Jin

민 병 철**
Min, Byoung-Cheol

김 문 영***
Kim, Moon-Young

ABSTRACT

An improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled curved beams with variable curvature and non-symmetric cross sections are presented based on the displacement field considering the second order terms of finite semitangential rotations. By introducing Vlasov's assumptions, the total potential energy is derived from the principle of linearized virtual work for a continuum. In this formulation, all displacement parameters and the warping function are defined at the centroid axis so that the coupled terms of bending and torsion are added to the elastic strain energy. Also, the potential energy due to initial stress resultants is consistently derived corresponding to the semitangential rotation and moment. The cubic Hermitian polynomials are utilized as shape functions for development of the curved thin-walled beam element having eight degrees of freedom. In order to illustrate the accuracy and practical usefulness of this study, numerical solutions for free vibration of arches are presented and compared with results of other researchers and solutions analyzed by the ABAQUS's shell element.

1. 서 론

곡률이 변하는 곡선보는 교량, 지붕 구조물이나 항공 구조물 등과 같은 공학의 다양한 분야에서 주요한 구조 요소이며 일반적인 강 곡선교는 휨모멘트 외에 곡률의 영향으로 비틀림모멘트를 항상 받기 때문에 휨과 비틀림의 연계효과로 인하여 구조적인 거동특성이 매우 복잡한 양상을 보인다. 따라서 박벽단면을 갖는 부재를 이용하여 구조물을 설계하기 위해서는 박벽보의 좌굴 및 동적 거동특성을 정확히 파악할 수 있어야 하며 현재까지 이에 대한 많은 연구가 이루어졌다. Papangelis와 Trahair⁽¹⁾는 아치의 횡좌굴하중에 대한 이론식을 제시하였고 Yang과 Kuo⁽²⁾는 곡률효과를 고려한 안정성 해석을 수행하였으며 Kang과 Yoo⁽³⁾는 3차원 좌굴거동에 대한 이론해와 수치해를 조사 비교하였으며 Lee와 Oh^(4,5) 등은 비원형 아치의 면내 자유진동을 수행하였다. Tseng과 Huang⁽⁶⁾ 등은 동적강도행렬을 도입하여 포물선과 타원 아치의 면내 진동에 대하여 해석하였고 Kim과 Chang^(7,8) 은 단면회전각의 2차항을 일관성 있게 고려하여 직선 박벽보의 안정성 및 자유진동해석을 수행하였다. 이외에도 현재까지 박벽보에 대한 여러 가지 해석이론이 제시되어 왔지만, 다양한 지지조건과 곡률이 변하는 아치의 면외거동에 대한 이론이 국제적으로 아직도 확립되어 있지 않은 상태라 사료된다. 따라서 본 연구에서는 면내에 대하여 곡률이 변하며 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 3차원 안정성 및 동적

* 성간관대학교 토목공학과 석사과정

** 성간관대학교 토목공학과 박사수료

*** 성간관대학교 토목공학과 부교수

기동특성을 파악할 수 있는 해석이론과 유한요소 프로그램을 개발하였고, 비원형(non-circular) 곡선 형태에 대한 안정성 및 자유진동 해석을 수행하여 기존의 문헌과 비교함으로써 본 연구의 타당성을 입증하고자 한다.

2. 선형화된 가상일의 원리

박벽 곡선보의 3차원 좌굴 및 자유진동해석을 수행하기 위하여, 회전변위의 2차항을 포함하는 연속체의 선형화된 가상일의 원리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_V (\tau_{ij} \delta e_{ij} + {}^o\tau_{ij} \delta \eta_{ij} + {}^o\tau_{ij} \delta e_{ij}^*) dV + \int_S {}^oT_i \delta U_i^* dS - \omega^2 \int_V \rho U_i \delta U_i dV = \int_S T_i \delta U_i dS \quad (1)$$

여기서 첫 번째 항은 탄성변형에너지를 나타내고 두 번째는 초기응력으로 인한 포텐셜에너지, 세 번째 항은 단면 회전에 대한 2차항을 고려했을 때 나타나는 초기응력으로 인한 포텐셜에너지 그리고 네 번째 항은 초기 표면력에 의한 포텐셜에너지이다. 마지막 항은 요소 결점력에 대응하는 포텐셜에너지를 나타내며 곡물이 변하는 곡선보의 전체좌표계 및 요소좌표계는 그림 1과 같다.

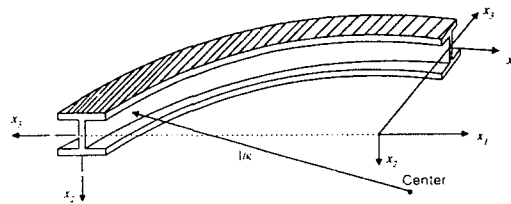


그림 1. 곡선보의 전체좌표계 및 요소좌표계

2.1 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 변위장

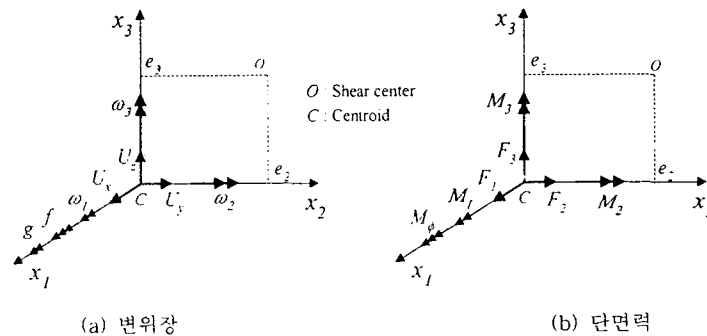


그림 2. 박벽곡선보의 변위장 및 단면력

그림 2는 부재좌표계에 대하여 박벽단면을 갖는 공간뼈대요소의 변위장을 8개의 변위파라미터로 나타낸 것으로 x_1 은 도심축, x_2 와 x_3 는 주축을 나타낸다. U_x, U_y, U_z 와 w_1, w_2, w_3 는 각각 x_1, x_2, x_3 축방향의 강체이동변위(rigid body translation) 및 강체회전변위(rigid body rotation)를 나타내고 g 는 U_x 의 변화율이며 f 는 단면회 돌림변형에 의한 x_1 축방향으로의 변화율이다. 전단변형효과가 무시되는 경우 변위파라미

터 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$w_1 = \theta, \quad w_2 = -U_z' + \kappa U_x, \quad w_3 = U_y', \quad f = -\theta' - \kappa U_y', \quad g = U_x' + \kappa U_z \quad (2)$$

여기서 윗첨자 'prime'은 x_1 에 대한 미분을 나타낸다

2.2 박벽 곡선보의 변형도-변위관계

부재의 단면이 강체거동하고 축방향에 대하여 뒹변형만 발생한다고 가정하면, 부재 내 임의의 한 점이 휨과 비틀 그리고 축방향 변위가 결합하여 변형을 일으켰을 때 박벽 공간뼈대요소의 임의의 단면에 대한 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_1 = U_x - x_2 U_y' - x_3 (U_z' - \kappa U_x) - (\theta' + \kappa U_y') \phi(x_2, x_3) \quad (3a)$$

$$U_2 = U_y - x_3 \theta \quad (3b)$$

$$U_3 = U_z + x_2 \theta \quad (3c)$$

그리고

$$U_1^* = \frac{1}{2} [-\theta (U_z' - \kappa U_x) x_2 + \theta U_y' x_3] \quad (4a)$$

$$U_2^* = \frac{1}{2} [-(\theta^2 + U_y'^2) x_2 - (U_z' - \kappa U_x) U_y' x_3] \quad (4b)$$

$$U_3^* = \frac{1}{2} [-(U_z' - \kappa U_x) U_y' x_2 - \{\theta^2 + (U_z' - \kappa U_x)^2\} x_3] \quad (4c)$$

여기서 식(3)과 식(4)는 각각 변위파라미터에 대한 1차 및 2차항을 나타내고 ϕ 는 도심에서 정의된 뒹함수를 나타낸다.

박벽단면의 면내응력은 평면응력(plane stress), 면내변형은 강체로 가정하는 경우에 도심축에 대한 단면력을 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_A \tau_{11} dA, \quad F_2 = \int_A \tau_{12} dA, \quad F_3 = \int_A \tau_{13} dA \\ M_1 &= \int_A (\tau_{13} x_2 - \tau_{12} x_3) dA, \quad M_2 = \int_A \tau_{11} x_3 dA, \quad M_3 = - \int_A \tau_{11} x_2 dA, \quad (5) \\ M_p &= \int_A \tau_{11} (x_2^2 + x_3^2) dA, \quad M_\phi = \int_A \tau_{11} \phi dA \end{aligned}$$

여기서 F_1 은 축방향력, F_2 와 F_3 는 전단력을 나타낸다. M_2 와 M_3 는 각각 x_2 와 x_3 에 대한 휨모멘트이고 M_1 은 비틀모멘트이다. 그리고 M_p 는 Wagner 효과를 나타내는 단면력이다.

2.3 곡률이 변하는 박벽 아치의 총포텐셜에너지

박벽 곡선보의 안정성 해석을 수행하기 위하여 곡률이 변하는 3차원 곡선보 요소의 총포텐셜에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_G - T \quad (6)$$

여기서 Π_E , Π_G 그리고 T 는 각각 탄성 변형에너지와 초기 단면력에 의한 포텐셜에너지 그리고 운동에너지를 나타낸다. 식(6)에 나타난 탄성변형에너지 Π_E 를 구체적으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_E = & \frac{1}{2} \int_0^L [EA(U_x' + \kappa U_z)^2 + E\hat{I}_3(U_y'' - \kappa \theta)^2 \\ & + E\hat{I}_2(U_z'' + \kappa^2 U_z - \kappa' U_x)^2 + E\hat{I}_\phi(\theta'' + (\kappa U_y')')^2 \\ & + 2E\hat{I}_{\phi 3}(U_y'' - \kappa \theta)(\theta'' + (\kappa U_y')') + GJ(\theta' + \kappa U_y')^2 \\ & - 2\kappa EI_{223}(U_y'' - \kappa \theta)(U_z'' + \kappa^2 U_z - \kappa' U_x) \\ & + 2E\hat{I}_{\phi 2}(\theta' + (\kappa U_y')')(U_z'' + \kappa^2 U_z - \kappa' U_x)] dx_1 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서

$$\begin{aligned} \hat{I}_2 = I_2 - \kappa I_{222}, \quad \hat{I}_3 = I_3 - \kappa I_{233}, \quad \hat{I}_\phi = I_\phi - \kappa I_{\phi\phi 2}, \\ \hat{I}_{\phi 3} = I_{\phi 3} - \kappa I_{\phi 23}, \quad \hat{I}_{\phi 2} = I_{\phi 2} - \kappa I_{\phi 22} \end{aligned} \quad (8)$$

또한, 곡률이 변하는 박벽 곡선보의 운동에너지 T 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_L [A(U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) + \tilde{I}_0 \theta^2 + \tilde{I}_3 U_y'^2 + \tilde{I}_2 (U_z' - \kappa U_x)^2 \\ & + \tilde{I}_\phi (\theta' + \kappa U_y')^2 + 2\tilde{I}_{\phi 3} U_y' (\theta' + \kappa U_y') + 2\tilde{I}_{\phi 2} (U_z' - \kappa U_x) (\theta' + \kappa U_y') \\ & - 2\kappa I_{\phi 2} U_x (\theta' + \kappa U_y') - 2\kappa I_2 (U_y \theta) - 2\kappa I_2 U_x (U_z' - \kappa U_x) \\ & + 2\kappa I_{223} U_y' (U_z' - \kappa U_x)] dx_1 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 = I_2 + \kappa I_{222}, \quad \tilde{I}_3 = I_3 + \kappa I_{233}, \quad \tilde{I}_\phi = I_\phi + \kappa I_{\phi\phi 2}, \quad \tilde{I}_{\phi 2} = I_{\phi 2} + \kappa I_{\phi 22}, \\ \tilde{I}_{\phi 3} = I_{\phi 3} + \kappa I_{\phi 23}, \quad I_o = I_2 + I_3, \quad \tilde{I}_o = I_o + \kappa (I_{222} + I_{233}) \end{aligned} \quad (10)$$

한편, 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 포텐셜에너지 Π_G 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \frac{1}{2} \int_0^L [F_1\{U_y'^2 + (U_z' - \kappa U_x)^2\} + M_\rho(\theta' + \kappa U_y')^2 - F_3(U_y' \theta) \\ & + M_2(\theta U_y'' - U_y' \theta' - \kappa U_y'^2 - \kappa \theta^2) + 2\kappa M_\phi(U_z' - \kappa U_x)(\theta' + \kappa U_y') \\ & + M_3\{\theta(U_z'' - (\kappa U_x)') - (U_z' - \kappa U_x)(\theta' + \kappa U_y')\} + F_2 \theta (U_z' - \kappa U_x) \\ & + M_1\{(U_z' - \kappa U_x)(U_y'' - \kappa \theta) - U_y'(U_z'' - (\kappa U_x)')\}] dx_1 \end{aligned} \quad (11)$$

3. 비대칭 박막단면을 갖는 곡선보의 곡률 κ

비원형 아치의 경우, 직교좌표계에서 변화하는 곡률 κ 에 대한 정의는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (12)$$

또한, 포물선과 타원에 대한 곡률은 각각 식 (13)과 (14)로 정의된다.

$$\text{포물선 : } y = \frac{4h}{L^2} \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right), \quad \kappa = \frac{8h}{L^2 \left(1 + \frac{64h^2 x^2}{L^4} \right)^{3/2}} \quad (13)$$

$$\text{타원 : } y = b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2}, \quad \kappa = \frac{b}{a \left(\frac{a^2(a^2 - x^2) + b^2 x^2}{a^2} \right)^{3/2}} \quad (14)$$

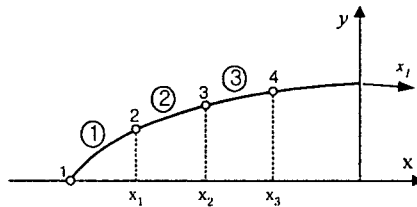


그림 3. x_1 과 x 과의 관계

포물선과 타원의 형태를 갖는 아치의 길이는 식 (15)를 이용하여 얻어질 수 있으며, 유한요소 해석을 수행하는 경우에 24점 가우스 적분을 적용하였다.

$$ds = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (15)$$

그림 4에서 ϵ 의 값을 0.5로 가정하여 지간길이에 해당하는 L 값을 포물선과 타원이 일치하도록 하여 부재의 길이를 구하고 이에 해당하는 x 의 값은 Bisection method를 적용하여 계산하였다. 얻어진 x 값을 이용하여 각 절점의 곡률을 계산하였고 요소강도행렬을 산정하는 경우에는 요소당 5점 가우스적분을 수행하게 되므로 역시 각각의 가우스점에 대응하는 곡률을 계산함으로써 전체 곡선보에 대한 곡률변화를 고려하였다.

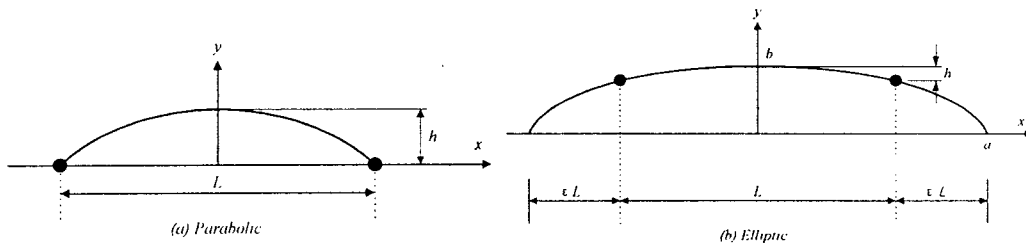


그림 4. 곡률이 변하는 아치의 형상

5. 해석예제

본 연구에서는 곡률이 변하고 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 3차원 좌굴 및 자유진동해석이 가능한 해석이론과 유한요소 프로그램을 개발하였고 이를 검증하기 위하여 포물선과 타원 아치에 대한 다양한 해석을 수행하였다.

5.1 곡선아치의 면내 자유진동 해석

단순지지된 포물선과 타원 아치를 해석하기 위하여, 20개의 곡선보 요소를 이용하였고 지간길이에 대한 높이의 비(h/L) 그리고 세장비(L/r)에 따른 자유진동해석을 수행하였으며, 해석에 사용된 단면은 직사각형이고 식(16)에 제시한 무차원 진동계수(Frequency Parameter)를 이용하여 면내 자유진동 해석결과를 제시하였다.

$$C_i = \omega L^2 \sqrt{\rho A / EI} \quad (16)$$

포물선과 타원 아치에 대한 본 연구의 해석 결과를 각각 표1에 나타내었으며 그 결과, 전단변형을 고려하지 않은 본 연구의 결과(표1, ①)가 이를 고려한 다른 연구자⁽⁵⁾의 해석결과(표1, ②)에 비해 다소 큰 값을 나타내었으나 전체적으로 일관성있는 결과가 얻어졌고 세장비가 증가함에 따라 C_i 값이 증가하는 양상을 보였으며 일부 모드를 제외하고 포물선의 경우가 타원의 경우보다 약간 큰 값을 나타내었다.

표1. 단순지지된 아치의 면내 자유진동

mode		포물선								타원							
		n=1		n=2		n=3		n=4		n=1		n=2		n=3		n=4	
h/L	L/r	①	②	①	②	①	②	①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
0.1	30	22.36	22.48	35.40	34.21	80.02	74.94	94.72	93.87	22.52	22.59	35.15	34.05	79.98	75.00	94.89	93.82
	60	35.97	35.64	41.80	41.67	83.54	82.26	145.3	141.1	35.73	35.47	41.78	41.56	84.21	83.02	144.4	140.2
	100	36.11	35.95	65.15	64.76	88.74	88.35	147.6	146.0	35.86	35.79	63.15	62.69	92.18	91.79	146.9	145.3
0.2	30	28.85	27.40	36.69	36.79	68.73	64.52	91.39	91.23	28.29	27.04	36.78	36.75	68.70	64.73	91.76	91.01
	60	29.38	28.57	65.67	64.64	78.31	77.88	125.6	122.2	28.74	28.20	63.02	61.99	81.67	81.33	124.3	120.8
	100	29.78	28.83	69.35	68.68	123.9	123.3	127.3	125.9	28.93	28.46	67.30	68.68	126.1	124.7	137.3	126.8
0.3	30	22.91	20.89	45.57	45.42	55.73	52.51	84.96	85.65	22.23	20.48	45.35	44.81	55.91	53.16	85.41	85.09
	60	23.88	21.73	56.79	55.52	91.56	91.03	103.7	101.0	22.96	21.30	55.78	54.57	92.89	91.03	102.6	99.99
	100	25.58	21.90	57.64	56.37	104.9	103.4	145.0	148.5	24.13	21.47	56.51	55.54	103.8	102.5	150.4	148.9
0.4	30	18.65	15.86	43.97	41.58	49.69	49.28	76.98	73.95	17.98	15.48	43.67	41.22	49.85	49.58	77.50	73.85
	60	20.77	16.42	45.21	43.96	84.00	81.37	99.00	97.77	19.72	16.03	44.82	43.61	83.11	80.79	99.25	98.19
	100	24.84	16.52	46.47	44.49	85.83	81.69	132.8	130.1	23.09	16.13	45.89	44.14	84.60	82.41	131.7	129.2

5.2 경계조건에 따른 곡선아치의 3차원 자유진동 해석

본 예제에서는 곡률이 변하는 박벽 곡선아치의 3차원 자유진동을 수행하였으며 해석에 사용된 물성치 및 단면상수는 아래와 같다.

$$L = 100.0 \text{ cm}, h = 20.0 \text{ cm}, E = 2,040,000 \text{ kg/cm}^2, G = 784615.0 \text{ kg/cm}^2, \\ A = 18.0 \text{ cm}^2, J = 13.5 \text{ cm}^4, I_2 = 216.0 \text{ cm}^4, I_3 = 3.375 \text{ cm}^4$$

두 가지 경계조건(구속-구속, 구속-자유)에 대하여 포물선과 타원 아치를 해석하였고 면내거동과 면외거동을 분류하여 표 2에 제시하였다. 곡선보 요소를 이용하여 해석하는 경우, 전체구조에 대하여 20개를 사용하였고 이를 검증하기 위하여 ABAQUS의 9절점 쉘요소를 960개로 모델링하여 해석하였다. 그 결과, 본 연구

에 의한 해석결과가 ABAQUS를 이용한 결과와 면내진동은 전단변형 효과로 인하여 다소 오차가 발생하였으나 면외의 경우에는 서로 잘 일치하였다.

표2. 박벽 곡선 아치의 3차원 자유진동해석

경계조건		고정-자유				고정-고정			
		포물선		타원		포물선		타원	
곡선형태		포물선		타원		포물선		타원	
진동모드		ABAQUS	curved beam	ABAQUS	curved beam	ABAQUS	curved beam	ABAQUS	curved beam
면내 진동	n=1	287.2	348.2	285.3	309.6	42008.0	43205.9	41004.0	42542.3
	n=2	5980.3	6334.7	6027.6	6427.5	49234.0	47730.0	48723.0	56216.8
면외 진동	n=1	4.97	4.90	4.96	4.97	145.60	143.45	146.04	143.13
	n=2	112.2	112.9	112.9	113.71	1185.9	1172.3	1179.8	1163.7
	n=3	1021.1	1023.6	1017.0	1019.3	4658.5	4616.5	4659.0	4605.9
	n=4	2000.3	1999.6	1973.1	2063.1	6292.7	6077.8	6224.3	6909.6
	n=5	4639.9	4624.2	4657.2	4627.3	12922.0	12843.7	12865.0	12778.3
	n=6	12144.0	12121.2	11931.0	12540.2	22783.0	21557.2	22821.0	26213.5
	n=7	13039.0	12973.5	13189.0	13678.1	28916.0	28832.4	28771.0	28714.2
	n=8	28794.0	28755.2	28591.0	28673.2	52010.0	56349.8	52034.0	62166.0
	n=9	33825.0	32975.8	33896.0	38120.9	56297.0	64889.3	56001.0	63345.2
	n=10	56195.0	58253.7	55870.0	56562.2	95809.0	84403.7	95858.0	99845.6

5.3 수평하중을 받는 캔틸레버 아치의 3차원 안정성 해석

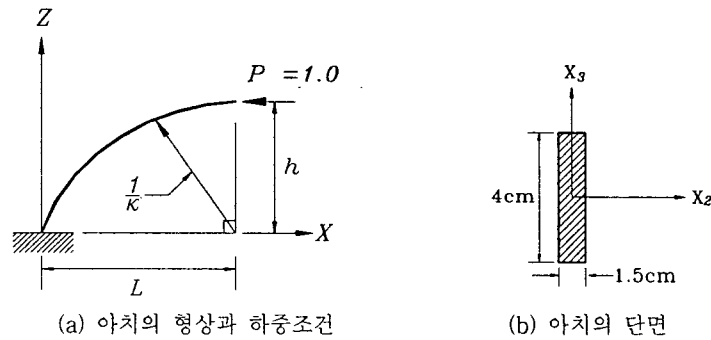


그림 5. 캔틸레버 포물선 아치의 형상

그림 5는 수평 단위하중을 받는 캔틸레버 포물선 아치를 나타내고 있다. 아치의 단면은 그림 5(b)에서와 같고 해석에 사용된 재료상수 및 단면계수는 다음과 같다.

$$L = 50 \text{ cm}, \quad h = 20 \text{ cm}, \quad E = 2,040,000 \text{ kg/cm}^2, \quad G = 784,615 \text{ kg/cm}^2, \\ A = 6.0 \text{ cm}^2, \quad J = 3.4 \text{ cm}^4, \quad I_2 = 8.0 \text{ cm}^4, \quad I_3 = 1.125 \text{ cm}^4$$

본 예제는 수평력에 의한 내력분포가 전단력, 휨모멘트 그리고 축방향력이 함께 발생하는 경우이며 단면의 두께는 구조물 전체에 대하여 일정하다. 캔틸레버 포물선 아치의 안정성 해석을 수행하기 위하여, 20개의 곡선보 요소를 이용하여 모형화하였고 ABAQUS를 이용한 해석에서는 단면에 대하여 4개, 길이방향으로 40개를 이용하여 총 160개의 셀요소를 사용하였으며 셀요소는 9절점 감차적분을 적용하였다. 표 3은 캔틸레버의

자유단에 수평하중 P 가 작용하는 경우와 그 반대 방향으로 작용하는 경우에 대하여 좌굴해석 결과를 나타낸 것이다. 표에서 알 수 있는 바와 같이 본 연구에서 제시한 곡선보 요소에 의한 해석결과가 ABAQUS를 이용한 해석결과와 일치하고 있음을 보여주고 있다.

표 3. 박벽 캔틸레버 포물선 아치의 좌굴하중

buckling loads	thin-walled curved beam element	ABAQUS (shell elements)
P_{cr}	1992.8 -28277.5	1991.5 -28938.0

6. 결 론

본 연구에서는 비대칭 박벽단면의 구속된 뒹(warping)효과를 고려하고 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 곡선보의 변위장을 도입하여 도심에 대해 정의함으로써 곡률이 변하는 비대칭 박벽 곡선보의 좌굴 및 자유진동 해석이 가능한 해석이론을 제시하였고 Hermitian 다항식을 형상함수로 가정한 유한요소 프로그램을 개발하였다. 본 연구의 타당성을 검증하기 위하여 다른 연구자 및 ABAQUS를 이용하여 비교하였으며 그 결과, 다음과 같은 결론에 도달하였다.

1. 단순지지된 포물선과 타원 아치의 면내에 대한 자유진동 해석을 수행하여 다른 연구자의 해석과 비교한 결과 서로 잘 일치하였다.
2. 경계조건에 따른 포물선과 타원 아치의 3차원 자유진동 해석을 수행하여 ABAQUS의 셸요소를 이용한 해석결과와 비교하였으며 그 결과, 면내 진동은 전단변형 효과로 인하여 다소 오차가 발생하였으나 면외의 경우에는 서로 잘 일치하였다.
3. 캔틸레버 포물선 아치의 3차원 좌굴해석을 수행한 결과, 본 연구에 의한 해석 결과와 ABAQUS에 의한 해석 결과가 서로 잘 일치하였다.
4. 본 연구에서는 임의의 지지조건과 비대칭 박벽단면을 갖고 곡률이 변하는 곡선보의 안정성 및 자유진동해석이 가능한 이론을 제시하였고 이를 이용하여 유한요소 프로그램을 개발함으로써, 곡률이 변하는 곡선 구조물의 안정성 및 동적해석에 유용하게 쓰여질 수 있을 것으로 판단된다.

7. 참고문헌

1. Papangelis, T.P., Trahair, N.S.(1987). "Flexural-torsional buckling test on arches." J. Engrg. ASCE, 113(7), 1433-1443.
2. Yang, Y.B. Kuo, S.R.,(1987). "Effect of curvature on stability of curved beams." J. Struct. Engrg., ASCE, 113(6), 1185-1202.
3. Kang, Y. J., Yoo, C. H.(1994). "Thin-walled curved beams. II : Analytical solution for buckling of arches." J. Engrg. Mech., ASCE, 120(10), 2102-2125.
4. Lee, B. K., Wilson, J. F.(1989). "Free Vibrations of Arch with Variable Curvature." J. of Sound and Vibration, 136(1), 75~89
5. Oh, S. J., Lee, B. K., Lee, I. W.(1999). "Natural frequencies of non-circular arches with rotatory inertia and shear deformation." J. of Sound and Vibration, 219(1), 23~33.
6. Tseng, Y. P., Huang, C. S., Lin, C. J.(1997). "Dynamic Stiffness Analysis For In-Plane Vibrations Of Arches with Variable Curvature.", J. of Sound and Vibrations, 207(1), 15~31
7. Chang, S. P., Kim, M. Y., Kim, S. B.(1996). "Stability of Shear Deformable Thin-Walled Space Frames and Circular Arches." ASCE Journal of Eng. Mechanics, 122, 844~854.
8. Kim, M. Y., Chang, S. P., Kim, S. B.(1996). "Spatial Stability Analysis of Thin-walled Space Frames." Int. J. Numer. Methods Engineering, 39, 499~525.