

고유 진동수를 고려한 구조물의 위상 최적설계

Structural Topology Optimization for A Natural Frequency

임 오 강* 이 진 식**
Lim, O-Kaung Lee, Jin-Sik

ABSTRACT

Topology optimization is used for determining the best layout of structural components to achieve predetermined performance goals. In the present study, we consider that the objective function is to maximize the natural frequency of the structure for a designated mode and the constraint function is to constrain a total material usage. In this paper, using a topology optimization technique based on the homogenized material and the chessboard prevention strategy, we obtain the optimal layout and the reinforcement of an elastic structure. Several examples are presented to show the ability of the topology optimization technique used in this paper to deal with an optimal layout problem for a free vibration structure.

1. 서 론

최근 경량화 및 고도화를 추구하는 구조물의 설계경향에 따라, 많은 부재가 거의 임계치에 가까운 상태로 설계되는 경우가 많다. 이럴 경우 일부 부재의 설계변경은 다른 부재의 거동에 큰 영향을 끼치게 되므로 경험에 의한 설계변경이나 직관에 의한 변경은 매우 어렵게 된다. 따라서, 많은 설계자들은 주어진 제한조건에서 구조물을 설계할 때 신뢰성, 안전성 및 경제성을 고려한 최적설계기법을 사용한다. 자동차와 항공기 분야에서 많은 관심을 받고 있는 위상 최적화기법은 공간상의 모든 위치에서 재료의 유무를 표시하는 함수를 통하여 구조물의 형상을 직접적인 방법으로 표현한다. 따라서, 위상 최적화기법을 구조물의 개념설계에 적용하면, 설계자의 경험에만 의존하지 않는 구조물의 초기위상(initial topology)을 얻을 수 있다.

동적인 특성을 고려한 많은 구조물의 설계에서는 구조물의 과도한 변위를 감소시키기 위하여 특정 진동 모드의 고유 진동수를 높이는 구조물의 형상을 필요로 한다. 이와같은 문제를 해결하기 위한 위상 최적화 연구로는 Yoshiko와 Shinobu의 Voigt 및 Reuss모델을 이용한 균질재료와 최적조건법을 사용한 연구¹⁾ 및 Yang과 Ghuang의 가상재료와 선형계획법을 사용한 위상 최적화 연구²⁾등이 있다.

* 정회원, 부산대학교 기계공학부, 기계기술연구소, 교수

** 부산대학교 기계공학과, 박사과정

본 연구에서는 벌칙인자를 도입한 균질재료³⁾와 체스판무늬 형성 방지책⁴⁾을 사용한 위상 최적화기법을 이용하여 평면응력 상태로 가정한 구조물의 특정 자유진동(free vibration) 모드의 고유 진동수를 높이는 형상을 구한다. 본 연구에서는 각 절점의 부피분율(volume fraction)을 설계변수로 선택하고, 특정 고유 진동수의 최대화를 목적함수로 선택하며, 구조물에 사용하는 재료의 양을 제약함수로 선택한다. 또한, 구조물의 고유 진동수는 Subspace 방법⁵⁾을 사용하여 구하고, 최적화 알고리즘으로는 순차이차계획법인 PLBA 알고리즘을 이용한다. 그리고, 본 연구에서는 위상 최적화로 얻어진 고유 진동수와 형상을 ANSYS 상용 패키지를 통하여 검증한다.

2. 위상 최적화문제

2.1 정식화

본 연구에서는 그림 1에서와 같이 구조물이 차지할 부피만 알려진 상태에서, 구조물에 이용 가능한 최대 재료의 양을 제약함수로 선택하고, 특정 자유진동 모드의 고유 진동수를 최대화시키는 위상을 도출한다. 따라서, 본 연구의 위상 최적화문제의 정식화는 다음과 같다.

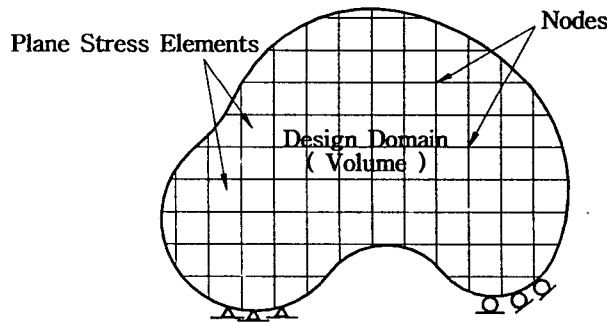


그림 1 위상 최적화를 위한 구조물

$$\begin{aligned}
 \text{Maximize} & : f_i(c_j) \\
 \text{Subject to} & : K(c_j)y = \lambda M(c_j)y \\
 & m_{total}(c_j) - m_o \leq 0 \\
 & 0 < c_{min} \leq c_j \leq c_{max}, j = 1 \dots n
 \end{aligned} \tag{1}$$

식 (1)에서, f_i 는 특정 자유진동모드의 고유 진동수를 나타내고, K 와 M 은 각각 유한요소모델인 구조물의 강성 및 질량행렬을 표시한다. 또한, λ 와 y 는 각각 구조물의 고유값 및 고유벡터를 표시하고, m_{total} 과 m_o 는 각각 구조물의 총 질량과 이용 가능한 재료의 양을 표현한다. 그리고, c_j 는 본 연구의 설계변수로서

각 절점들의 부피분율을 표현하고, c_{\min} 과 c_{\max} 는 각각 설계변수의 하한과 상한을 나타내며, n 은 총 설계변수의 개수로서 유한요소모델의 총 절점수를 표현한다.

2.2 민감도 해석 (Sensitivity Analysis)

목적함수와 제약함수의 설계변수에 대한 민감도 해석은 본 연구에서 사용한 최적화 알고리즘인 순차이차계획법 PLBA 알고리즘이 최적화 방향을 탐색하는데 이용하는 정보이다. 유한요소법을 이용하여 설계 민감도를 구하는 방법으로는 유한차분법과 해석적 방법이 있다. 유한차분법은 설계변수에 섭동을 주어 계산하고, 해석적 방법에는 직접미분법과 보조변수법이 있다.

본 연구에서는 다음 질(균질재료의 특성)에서 보는바와 같이 설계변수와 등가 탄성계수 관계식이 명시적으로 표현되기 때문에 단순한 이론을 사용하여 계산의 이해가 쉽고, 프로그램의 작성이 용이한 직접미분법을 이용하여 설계 민감도를 해석한다.

2.2.1 목적함수의 민감도 해석

목적함수인 고유 진동수는 고유값과 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$f_i = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{2\pi} \quad (2)$$

본 연구에서는 고유값의 민감도를 계산하여, 식 (2)의 관계식을 이용하여 고유 진동수의 민감도를 계산한다. 먼저, 식 (1)에서 주어진 $K(c_j)$ $y = \lambda M(c_j)$ y 의 관계식 양변에 y^T 를 곱하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$y^T K(c_j) y = \lambda y^T M(c_j) y \quad (3)$$

식 (3)에 고유값, 고유벡터 및 설계변수에 대하여 1차 변분을 취하고, $y^T M(c_j) y = 1$ 인 관계를 이용하여 정리⁶⁾하면, 다음과 같은 고유값의 설계변수에 대한 민감도를 얻을 수 있다.

$$\frac{\delta \lambda_i}{\delta c_j} = y_i^T \frac{\partial K(c_k)}{\partial c_j} y_i - \lambda_i y_i^T \frac{\partial M(c_k)}{\partial c_j} y_i \quad (4)$$

2.2.2 제약함수의 민감도 해석

식 (1)에 제시된 제약함수, $m_{total}(c_j) - m_o \leq 0$ 를 평면응력 4절점 선형요소로 분할한 구조물을 이용하여 다시 표현⁷⁾하면 다음과 같다.

$$g = \sum_{e=1}^N \rho_e a_e \left(\sum_{j=1}^4 L_j c_j \right) - m_o \leq 0 \quad (5)$$

식 (5)에서 ρ_e 와 a_e 는 각각 각 요소의 밀도 및 면적을 나타내며, L_j 는 형상함수를 나타내고, N 은 총 요소의 개수를 표현한다.

식 (5)에서 알 수 있듯이 주어진 제약함수는 설계변수에 대하여 선형함수이다. 따라서, 설계변수 c_j 에 대하여 직접미분을 취하면 제약함수의 민감도를 다음과 같이 간단히 구할 수 있다.

$$\frac{\delta g}{\delta c_j} = \sum_{k=1}^N a_k L_k \quad (6)$$

식 (6)에서 N_e 는 설계변수로 선택된 절점에 인접한 요소의 개수를 표시하고, L_k 는 인접한 요소들의 중심에서의 형상함수 값을 표현한다.

3. 균질재료의 특성

본 연구에서 사용한 균질재료는 기지재(matrix)와 미시구멍(micro voids)으로 구성된 복합재료에 평균장 근사이론⁷⁾(mean field approximation theory) 및 등가원리⁸⁾(equivalence principle)를 적용하여 균질화시킨 재료를 기초로 요소내부의 부피분율을 설계변수로 고려한 경우 설계변수가 중간값을 갖는 것을 방지하기 위하여 벌칙인자를 도입한 재료³⁾이다. 이와같은 재료를 이용하여 복합재료의 등가 탄성계수와 기지재의 탄성계수와의 관계를 요소내부의 부피분율로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{E}{E_o} = \frac{c_e^p}{2 - c_e} \quad (7)$$

식 (7)에서 E_o 와 E 는 각각 기지재의 탄성계수 및 복합재료의 등가 탄성계수를 나타내고, c_e 는 요소 내부의 부피분율을 표시하며, p 는 벌칙인자로 본 연구에서는 '3'을 사용한다.

일반적인 위상 최적화기법에서는 계산의 효율성을 감안하여 설계변수로 선택하는 선형요소 내부의 밀도 또는 부피분율을 상수로 가정한다. 이와같은 경우 선형요소의 수치적 안전성 때문에 설계영역 내부에 그림 2와 같은 체스판무늬(chessboard)가 보통 나타난다. 즉, 하중이 크게 걸리는 요소들에서는 설계변수가 상한에 가까워지고, 하중이 거의 걸리지 않는 요소들에서는 하한에 가까워진다. 그러나, 하중이 중간정도 걸리는 요소들에서는 재료를 효과적으로 이용하려는 체스판무늬 형태가 요소들에 나타난다. 이와같은 체스판무늬 형태의 구조물은 현실적으로 제작하기 곤란하므로 본 연구에서는 체스판무늬 방지책⁴⁾을 이용하여 식 (7)을 수정한 다음과 같은 관계식을 이용한다.

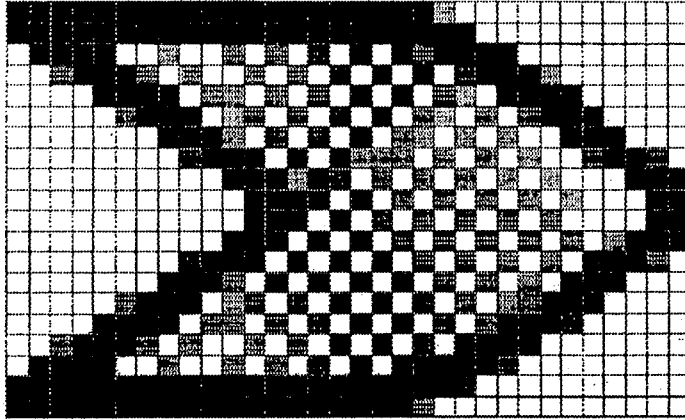


그림 2 체스판무늬가 나타난 구조물

$$\frac{E}{E_o} = \frac{\left(\sum_{j=1}^4 c_j L_j \right)^p}{2 - \left(\sum_{j=1}^4 c_j L_j \right)} \quad (8)$$

식 (8)에서 c_j 는 본 연구의 설계변수로서 각 요소를 구성하는 절점의 부피분율이고, L_j 는 각 요소 중심에서의 형상함수 값을 나타낸다.

식 (8)을 이용하여 평면응력요소의 응력과 변형률의 관계를 나타내는 다음과 같은 행렬 D_e 을 이용함으로써 구조물의 강성행렬은 설계변수에 대하여 명시적으로 표현된다.

$$[D_e] = \frac{\left(\sum_{j=1}^4 c_j L_j \right)^p}{2 - \left(\sum_{j=1}^4 c_j L_j \right)} \frac{E_o}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

식 (9)에서 ν 는 기지재의 프와송의 비를 나타낸다.

그리고, 구조물의 질량행렬을 본 연구의 설계변수인 절점의 부피분율로 표시하려면, 다음과 같은 관계식을 이용하여 각 요소의 질량행렬을 구성한다.

$$\rho_c = \rho_o \sum_{j=1}^4 c_j L_j \quad (10)$$

식 (10)에서 ρ_c 는 복합재료의 밀도이며, ρ_o 는 기지재의 밀도를 표현한다.

4. 수치예제 및 고찰

본 연구의 수치예제들은 공통으로 $E_o = 207 \text{ Gpa}$, $\rho_o = 7700 \text{ Kg/m}^3$ 및 $\nu = 0.3$ 인 재료를 사용하였으며, 설계변수인 절점의 부피분율의 하한값으로는 ' 10^{-3} ', 상한값으로는 ' 1 ', 구조물의 구멍이 없는 초기상태를 표현하기 위하여 초기값으로는 ' 1 '을 주었다.

4.1 양단 중심이 고정된 구조물

본 예제는 두께와 높이가 각각 1 m 이고, 길이가 7 m 인 구조물을 그림 3과 같이 평면응력상태로 가정하여 특정 자유 진동모드의 고유 진동수를 최대화시키는 위상을 찾는다. 본 예제에서는 그림 3의 x방향인 길이방향을 32개의 요소로 분할하고, y방향인 높이를 8개의 요소로 분할하였다. 따라서, 총 요소수는 256개이고, 절점 수는 297개이다.

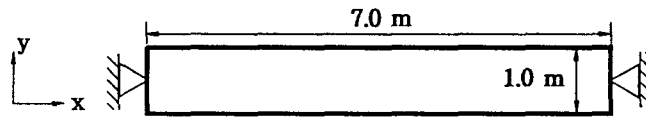


그림 3 양단 중심이 고정된 구조물

4.2 z축 방향의 굽힘모드

본 예제에서는 식 (1)과 같은 관계식을 적용하여, 전체 구조물에 사용하는 재료의 최대 40%을 이용하여 z축 방향의 굽힘모드의 고유 진동수를 최대화 시키는 위상을 찾는다. 그 결과는 그림 4와 같으며, 그림 4에서 흰부분은 재료가 제거된 부분을 표시하고, 진한색으로 표시된 부분일수록 두께가 두꺼운 것을 표시하며, 가장 진한 부분은 최대두께를 표시하고 그 크기는 1 m 이다. 그림 5는 위상 최적화 결과를 ANSYS 상용 패키지를 이용하여 고유 진동수를 고찰한 그림이다. 그림 5에서 알 수 있듯이, 두께와 높이가 각각 1 m 이고, 길이가 7 m 인 초기 구조물의 고유 진동수는 46.899 Hz 였으나, 위상 최적화 이후의 고유 진동수는 58.320 Hz 로 증가하였다. 아울러 그림 6은 그림 4를 3차원 형태로 표현한 그림이다.



그림 4 양단 중심이 고정된 구조물의 위상 최적화
(z축 방향의 굽힘모드)

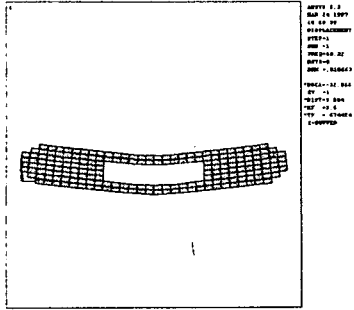


그림 5 z축 방향의 굽힘모드



그림 6 3차원 형태의 위상 최적설계

4.3 z축 방향의 비틀림모드

본 예제에서는 전체 구조물에 사용하는 재료의 최대 60%를 이용하여 z축 방향의 비틀림모드의 고유 진동수를 최대화 시키는 위상을 찾는다. 그 결과는 그림 7과 같으며, 그림 7에서 흰부분은 재료가 제거된 부분을 표시하고, 진한색으로 표시된 부분일수록 두께가 두꺼운 것을 표시하며, 가장 진한 부분은 최대두께를 표시하고 그 크기는 1 m이다. 그림 8은 위상 최적화 결과를 ANSYS 상용 패키지를 이용하여 고유 진동수를 고찰한 그림이다. 그림 8에서 알 수 있듯이, 두께와 높이가 각각 1 m이고, 길이가 7 m인 초기 구조물의 고유 진동수는 171.54 Hz였으나, 위상 최적화 이후의 고유 진동수는 210.66 Hz로 증가하였다. 아울러 그림 9는 그림 7을 3차원 형태로 표현한 그림이다.



그림 7 양단 중심이 고정된 구조물의 위상 최적화
(z축 방향의 비틀림모드)

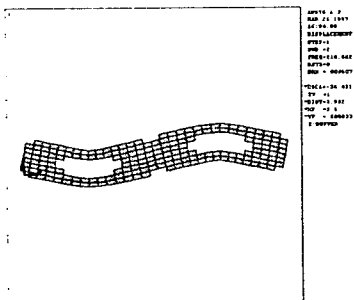


그림 8 z축 방향의 비틀림 모드



그림 9 3차원 형태의 위상 최적설계

5. 결 론

동적특성을 고려한 구조물의 설계에서는 구조물의 과도한 변위를 감소시키기 위하여 특정 진동모드의 고유 진동수를 높이는 구조물의 형상을 필요로 한다. 본 연구에서는 벌칙인자가 도입된 균질재료와 체스판무늬 방지책을 이용한 위상 최적화기법을 평면응력상태로 가정한 구조물의 고유 진동수를 고려한 위상 최적설계에 적용하였다. 본 연구에서 해석한 z축 방향의 굽힘모드와 비틀림모드에 대한 고유 진동수는 ANSYS 상용 패키지를 이용하여 계산한 결과, 초기 구조물의 고유 진동수에 비하여 각각 24%와 23% 증가하였다. 그리고, 최대 사용재료의 제약조건을 이용함으로써 구조물에 사용되는 재료의 양을 절감시킬 수 있었다. 따라서, 본 연구에서 이용한 위상 최적화기법은 특정 고유 진동수를 고려한 구조물의 위상 최적설계에 용이하게 이용될 수 있을 것으로 판단된다.

6. 참 고 문 헌

1. Yoshiko Kawabe and Shinobu Yoshida, "An Approach to The Problem of Vibration : Structural Modification by Optimizing Density Distribution", *ASME*, Vol.2, 1994, pp.291~298.
2. R. J. Yang and C. H. Chuang, "Optimal Topology Design Using Linear Programming", *Computers & Structures*, Vol.52., No.2, 1994, pp.265~275.
3. 임오강, 이진식, "입자보강 복합재료의 등가 재료상수 예측기법을 이용한 위상 최적설계", 한국전산구조공학회 논문집, 제 11권, 제 4호, 1998, pp.267~274.
4. 임오강, 이진식, "체스판무늬 형성 방지책을 이용한 위상 최적설계", 한국전산구조공학회(논문 심사중).
5. K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1996, p.1037.
6. E. J. Haug and J. S. Arora, *Applied Optimal Design*, Wiley, New York, 1979, p.506.
7. T. Mori and K. Tanaka, "Average Stress in Matrix and Average Energy of Materials with Misfitting Inclusions", *Acta Metall.*, Vol.21, 1973, pp.571~574.
8. J. D. Eshelby, "The Determination of The Elastic Field of An Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems", *Proc.Roy.Soc.London*, Vol.A241, pp.376~396.