

입체 트러스구조물의 최적설계를 위한 SA기법

Simulated Annealing Algorithm for Optimum Design of Space Truss Structures

정 제 원* 박 효 선**
Jeong, Je won Park, Hyo Seon

Abstract

Two phase simulated annealing algorithm is presented as a structural optimization technique and applied to minimum weight design of space trusses subjected to stress and displacement constraints under multiple loading conditions. Univariate searching algorithm is adopted for automatic selection of initial values of design variables for SA algorithm. The proper values of cooling factors and reasonable stopping criteria for optimum design of space truss structures are proposed to enhance the performance of optimization process. Optimum weights and design solutions are presented for two well-known example structures and compared with those reported in the literature.

1. 서론

철골 구조물의 경우 이미 단면특성이 결정된 형태로 생산되므로 이산형 변수로 최적화 문제에 접근하는 것이 이상적이나 최적화 알고리즘의 난이성으로 인하여 연속형 변수로 취급하여 사용되어왔다. 최근 컴퓨터 관련 기술이 발달함에 따라 이산형 설계변수의 함수의 최적점을 찾는 조합최적화(combination optimization)문제가 여러 분야에서 적용되고 있으며, 조합최적화문제의 한 해법으로 Kirkpatrick¹⁾(1983) 등에 의해 제안된 SA(simulated annealing)가 관심의 대상이 되고 있다. 이는 기존 최적화기법과는 달리, 초기 설계에 무관하게 전역적 최소점(global minimum)에 수렴하거나 또는 설계 가능영역이 분리된 경우에도 최적해로 수렴하는 가능성을 가지는 장점 등이 있다.²⁾ 그러나 이러한 장점에도 불구하고 기존 SA에서는 비교적 높은 초기설정온도에서 최종온도로 낮추는 냉각스케줄, 최저온도 또는 최대 반복수행회수로 정의되는 종료기준, 그리고 구조 반응의 정보에 무관한 무작위적(random search)탐색 등으로 인해 많은 반복 수행시간이 요구되는 단점을 가지고 있다.³⁾ 그러므로 본 논문에서는 이러한 단점들을 보완하고 구조최적화에 적합한 SA기법을 냉각스케줄, 종료기준, 그리고 효과적인 초기설계 선택법 등에 초점을 맞추어 개발하고자 한다.

* 영남대학교 건축공학과 석사과정

** 영남대학교 건축공학과 조교수

2. SA의 이론적 배경과 알고리즘

SA는 반복적 개선법(iterative improvement)을 기본으로 통계학의 확률적 기준을 이용하여, 고체 물리학에서 가장 낮은 에너지상태의 결정을 얻기 위해 담금질과정을 모사한 것으로 안정된 결정상태의 고체를 얻는 과정을 어닐링(annealing)이라 하며, 가장 낮은 에너지수준일 때의 결정상태를 최적해라 한다.

Metropolis⁴⁾(1953)는 Monte Carlo Method에 의해 초기온도 T_0 에서 열평형(thermal equilibrium)상태에 도달하는 과정을 시뮬레이션하였다. 고체의 초기상태를 무작위적(random generator)으로 선택하여 현재 상태 (X^{old})에서 약간의 변동(perturbation)을 주어 다음 상태(X^{new})인 새로운 위치로 이동하며, 이때 에너지의 차이 $\Delta E = E(X^{new}) - E(X^{old})$ 를 계산한다. 만약 에너지가 감소되면($\Delta E \leq 0$) 새로운 이동을 받아들이고, 에너지가 증가되면($\Delta E > 0$) 식(1)과 같은 확률로서 받아들여진다.

$$P = \text{EXP}\left(-\frac{\Delta E}{k_b T}\right) \quad (1)$$

여기서 k_b 는 볼츠만 상수(Boltzman constant)이고, T는 냉각 계수에 의해 변하는 온도로 알고리즘의 제어파라미터 역할을 한다. 이러한 기본적인 SA알고리즘의 순서는 그림 1과 같다.

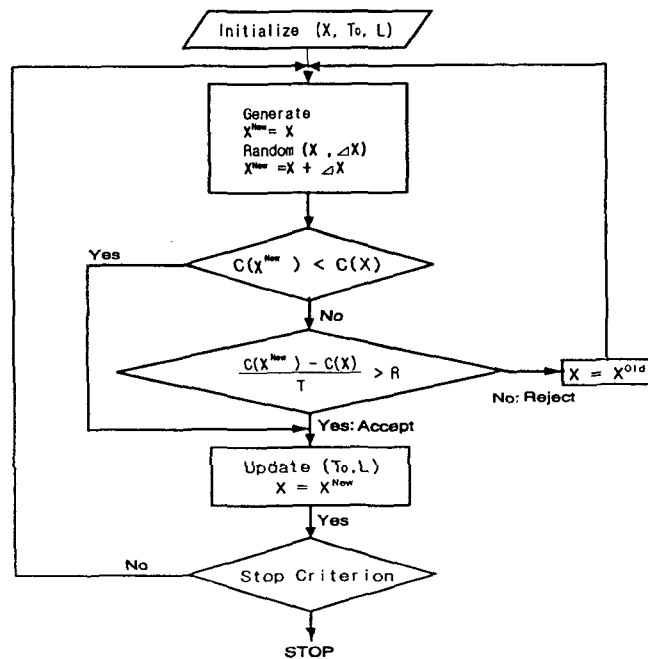


그림 1. 기본 SA알고리즘의 순서도

초기 설정으로 초기온도 (T_0), 초기해 (X), 반복수(L)를 설정해 주는데 이 때 L은 Metropolis 알고리즘에서의 고정된 온도T에서 평형상태에 도달할 때까지 필요한 반복수에 해당하는 파라미터이다. 알고리즘 SA는 두 개의 반복루프를 가지고 있는데 초기설계가 설정된 후 외부루프에서 우선 T를 고정시키고 내부루프에서 적절한 방법으로 현재의 해와 근접한 새로운 해(X^{new})를 만들어서(Perturb) 식 (1)과 같은 확률적

수용기준을 만족할 때 새로운 해를 현재 해로 받아들이고, 그렇지 않을 경우에도 무조건 기각하지는 않고 적절한 확률(acceptance probability)로 새로운 해를 현재 해로 받아들이는 과정을 L회 반복하게 된다. 그 후 외부루프에서 일반적으로 식 (2)와 같은 기하 냉각스케줄에 의해 T를 낮추어 주고(UPDATE) 다시 내부루프의 과정을 반복하게 된다.

$$T = \alpha \cdot T_0 \quad (2)$$

여기서 $\alpha : 0.9 \sim 0.95$ 이다. 외부루프의 중단시점은 어닐링에서 충분히 냉각된 기저상태(ground state)에 해당하는 최소 비용 함수값이 얻어졌을 때로 설정해야 하지만 이 상태를 실제로 판정하기가 불가능하여 실제로는 근사적으로 설정하게 된다. 내부루프에서는 현재 해보다 더 높은 비용 함수값을 가지는 해도 받아들일 가능성을 열어 둬으로써 지역적 최솟점(local minimum)에서 벗어날 수 있게 하여 전역최솟점(global minimum)을 찾아갈 수 있다. 외부루프에서 T를 낮추는 과정이 바로 담금질(annealing)에서의 냉각과정에 해당하는데 지역최솟점에 빠지지 않도록 서서히 주의 깊게 낮추어야 할 것이다.

3. 구조최적화를 위한 SA 알고리즘

본 논문에서의 구조최적화문제는 구조물의 전체 중량을 목적함수로 그리고 절점 변위 및 부재의 강도에 대한 제한을 제약함수로하는 최소중량설계를 대상으로 한다. 설계변수(X)는 최적화 대상 구조물이 3차원 트러스이므로 각 부재의 단면적으로 한다. 그리고 구조최적화를 위한 SA 알고리즘은 다음과 같은 세 가지 측면을 - 초기의 반복수행 수를 줄이고 초기설계 선택의 자동화, 다양한 냉각 스케줄을 분석하고 트러스 구조물에 적합한 냉각스케줄, 기존의 최종 온도나 최대 반복수행 수로서 종료하는 방식을 구조물의 종류와 규모에 무관한 종료기준 - 고려하여 개발되었으며 각각은 다음과 같다.

3.1 두 단계의 SA알고리즘.

SA의 초기 설계변수를 선택하기 위해 단일 변량탐색법(univariate search)과 구조물의 최적설계를 위한 SA(simulated annealing)으로 두 단계로 나눌 수 있다. 단일 변량탐색법(Univariate Search)은 SA 수행에 앞서, 많은 반복 수로 인한 계산시간을 감소시키는 목적과 좀 더 나은 초기 설계(good initial starting point)를 얻기 위한 방법이다. 이 과정은 유용 설계영역내에서 후보 설계를 무작위적 추출(random generator)에 의해 설계 변수와 변량($X_i + \Delta X$)을 선택하며 연속적으로 변경하는 과정을 반복한다. 다음 단계는 단일변량 탐색의 최종해를 SA의 초기설계로 하여 random generator에 의해 후보 설계를 정하고 확률적 기준에 의해 수용한다. 이러한 연속적 반복과정을 통하여 구조물의 최적해로 수렴할 수 있다.

3.2 SA의 확률(acceptance probability)과 냉각 스케줄(cooling schedule)

후보 설계는 제한 조건을 만족하는 설계로, 현 설계보다 중량이 많을 경우 수용 확률(acceptance probability)기준으로 임의의 수(random number) R와 비교하여 $R < P$ 이면 후보 설계는 현재 설계로 받아들인다.

$$P = \exp\left(\frac{-W_{diff}}{C_s \cdot T}\right) \quad (3)$$

여기서 P는 후보설계 수용확률이며, W_{diff} 는 후보 설계와 현재 설계의 중량 차이이고, R은 임의의 수로 0과 1 사이값이다. T는 온도(temperature)이고, C_s 는 표준 상수로 초기치를 1로 하며 M는 수용 확

물의 수행회수로 초기치가 0이다. 그리고 수용 확률을 계산하기 전에 C_s 와 M 을 update한다.

$$C_s = \frac{(M \times C_s + W_{diff})}{(M+1)} \quad (4)$$

$$M = M + 1 \quad (5)$$

온도 T 는 냉각 스케줄에 의해 점차적으로 감소시킨다. 첫 번째 사이클에서 $W_{diff} = C_s$ 이므로 식 (3)의 수용확률(acceptance probability)은 P_s 와 같다. 그러면 초기 온도는 식 (6)와 같이 표현된다.

$$T_0 = \frac{-1}{\ln(P_s)} \quad (6)$$

$$T = T_0 \times f \quad (7)$$

냉각 스케줄은 식 (7)과 같으며, 여기서 T_0 는 초기온도이고, f 는 냉각 계수(cooling factor)로 zero에서 1 사이이다

SA에서 냉각 스케줄(cooling schedule)의 형태에 따라 최적해의 수렴성과 수행시간을 좌우한다. 고체물리학에서 가장 안정된 결정상태의 고체를 얻는 과정 중, 가열된 고체가 액화상태의 분자들이 자유롭게 움직이다가 온도를 내림에 따라 점점 일정한 구조로 배열하게 되는데 온도를 급격히 내리면(quenching) 가변적 안정(meta-stable)상태 비정질구조(amorphous structure)가 얻어지게 된다. 이와 같이 구조물의 최적해를 탐색하는데 있어서도 온도를 급격히 내릴 경우 global minimum에 이르는 확률이 낮아지므로 냉각 스케줄을 문제의 특성에 맞는 설정할 필요성이 있다. 본 연구에서는 Ingber⁵⁾의 논문을 근거로 철골 트러스 구조물에 적합한 냉각 계수(cooling factor) f 를 heuristic한 방법을 통하여 정하였다. 간략히 정리하면 BA(boltzmann annealing)에서는 온도는 $T(k) = T_0 / \ln k$ 형태를 가진다. FA(fast annealing)기법에서 식 (8)의 Cauchy 함수는 볼츠만의 형태에서 몇 가지 장점을 취하여 BA기법보다 더 빠른 수렴을 가지며 온도는 식 (9)와 같다.

$$g(x) = \frac{T}{(\Delta x^2 + T^2)^{(D+1)/2}} \quad (8)$$

$$T(k) = \frac{T_0}{k} \quad (9)$$

VFA(very fast annealing)에서는 D -차원의 변수의 공간을 가진 경우의 냉각계수를 식 (10)과 같고 냉각 계수의 지수는 $C = 1/D$ 로 표현하였다. 여기서 k 는 어닐링 회수이다.

$$T(k) = \frac{T_0}{k^C} \quad (9)$$

VFA에서는 냉각 스케줄은 $g(x)$ 함수에 따라 여러 형태로 표현되어져 있으며 상세한 내용은 참고문헌을 참조하기로 한다. 본 연구에서 냉각 스케줄의 형태는 Cauchy 함수에서 D 차원의 변수의 공간을 고려한 것으로 식 (10)을 트러스구조물에 적합하게 변형하였으며, 확률식은 본문의 식 (3)과 냉각 스케줄 식 (10)을 적용한다.

$$f = \frac{1}{N^C} \quad (10)$$

여기서 N 은 외부루프의 반복 수행 수이며 지수 C 는 0.3~0.4로 정한다.

3.3 SA알고리즘의 종료기준

일반적으로 SA에서의 난점 중에 하나는 적절한 종료시점의 판정이다. 종료기준은 알고리즘이 끝나는 조

건으로서 이론적으로는 초기온도 100도에서 0도에 이를 때 수행을 마치도록 한다. 충분한 시간이 주어진다면 최적해(global minimum)에 수렴할 수 있으나 낮은 온도에서 보내는 시간이 상당히 많다는 단점을 가지고 있다. 그래서 본 연구는 SA의 원리가 반복적 개선법(iterative improvement)을 기초로 한 방식으로 최적화 문제의 수렴기준 검토과정인, 목적함수의 상대 변화량(Relative change in the objective function)과 후보설계와 현재설계를 구성하는 각 변수의 분포의 변화량으로 종료여부를 판단한다. 목적함수의 상대적 변화량은 연속적인 반복수행에서 현재값과 이전값 $F(\mathbf{X})$ 에서의 상대적인 변화량을 점검하는 것으로 식 (11)과 같이 나타낸다.

$$\frac{|F(\mathbf{X}^q) - F(\mathbf{X}^{q-1})|}{|F(\mathbf{X}^q)|} \leq \epsilon_R \quad (11)$$

여기서 ϵ_R 은 허용할 수 있는 범위의 극소 변화량 10^{-3} 을 나타낸 것으로 상대적 변화가 허용할 수 있는 범위의 목적함수 $F(\mathbf{X})$ 가 연속하여 3번 이상이 될 경우 종료하는 것으로 하였다.

또 다른 한가지는 후보 설계 변수 (\mathbf{X}^{new})와 현재 설계 변수 (\mathbf{X}^{old})의 각 변화량이 허용할 수 있는 범위의 극소 변화량 $\epsilon_A = 10^{-3}$ 보다 작으면서 해의 향상 없이 외부루프가 연속 반복될 때에 종료하는 방식으로 식 (12)같이 표현할 수 있다.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{n_i} \Delta G_j \right)^2} \leq \epsilon_A \quad (12)$$

$$\Delta G_i = \mathbf{X}^{new} - \mathbf{X}^{old} \quad (13)$$

여기서 n_i 는 i 번째 그룹 설계변수의 수, 즉 한 그룹의 부재 단면적 개수이며, m 은 설계변수의 수이고, ΔG_i 는 i 번째 그룹핑된 후보 설계의 단면적(\mathbf{X}^{new})와 현재 설계의 단면적(\mathbf{X}^{old})의 차를 말한다.

두 가지의 수렴 기준을 동시에 사용하여 문제의 규모와는 무관하게 적절한 반복회수를 가지면서 근사 최적해로 수렴할 수 있게 된다. 그러나, 여기서 적어도 두 번 이상 연속적인 반복수행에서 이 기준을 만족되어야 한다는 것이 중요하다. 이러한 수렴기준의 성능은 다소 알고리즘의 성능에 좌우된다고 할 수 있다.

3.4 SA 기법

SA 기법은 반복적으로 현재 설계를 후보 설계로 개선한다. 철골 구조물의 후보 설계는 매 반복시 한 개씩 m 개의 설계 변수 벡터의 한 요소(\mathbf{X}_i)를 임의로 변화시켜 개선한다. 그러므로 하나의 사이클은 총 설계 변수의 개수 만큼 후보 설계를 구성하는 것을 말한다. 이 때, 온도는 총 설계변수의 수만큼 무작위적으로 반복 변화할 때까지 일정한 값을 가지며, 다음 사이클에서 온도를 낮추어 수행한다. 이산변수의 변화정도 ($\Delta \mathbf{X}$)는 임의로 선택되어진다. 이에 따라서 전체 구조물의 중량은 증가하거나 감소될 수 있다. 전체 사이클의 후반부에 갈수록 현재 설계치가 바뀌지 않고 후보 설계치가 연속적으로 거부되는(rejection)것을 반복할 것이다. 후보 설계가 자동적으로 거부(automatic rejection)되면 현재 설계가 변하지 않고, 후보 설계가 동일하면 그 결과는 다시 자동적으로 거부(automatic rejection) 될 것이다. 이와 같은 경우 “반복적 거부”이라 말해지고 후보 설계에 관한 다른 근사 해석 실행할 필요가 없다. 모든 가능한 후보 설계(동일 사이클 내에서 총 설계변수만큼 변화시켜도 계속적으로 받아들이지 않을 때)가 종국적으로 반복적인 거부(repeated rejection)가 되며, 최대 사이클 N_{max} 전부를 수행하지 않고 종료하게 된다. 이것은 초기 설계가 제한 조건을 만족하지 않는 불용 영역(feasible region)에 있거나, 후보 설계로 가능한 모든 것들이 현재 설계보다 불용 영역에 있을 때 발생한다.

4. 예제 적용

4.1 25부재 철골 트러스 구조물

그림 2는 25개의 부재가 x, y 축에 대하여 대칭으로 8개로 그룹화 하여 구성되어 있다. 탄성 계수 $E = 10000 \text{ ksi}$ (68.95 GPa)와 단위 중량 $\rho = 0.1 \text{ lb/in}^3$ (27.14 kN/m^3)이다. 하중 조건과 부재의 그룹핑된 상태는 참고문헌 3, 4, 5을 참조한다. 절점 1과 2에서 최대 변위는 $\pm 0.35 \text{ in}$ ($\pm 0.889 \text{ cm}$)로 하고, 최대 허용 압축 응력과 인장 응력은 $\pm 40 \text{ ksi}$ ($\pm 275.6 \text{ MPa}$)로 제한한다. 4개의 변위, 25개의 응력 제약조건을 가지고 있다. 변수의 절점수와 제약 조건은 각각 8와 29개이다. 유효 단면적 list는 이산형 단면적으로 표 2와 같이 주어진다. 단면적 순서는 가장 큰 단면적 3.4 in^2 을 부재 번호 1로, 단면적이 작아짐에 따라 부재 번호는 커진다. 초기설계로 설정된 변수 값들과 함께 각 그룹별로 선택부재의 하한치와 상한치를 각각 0.1 in^2 , 3.4 in^2 로 설정하였다. 부재 탐색 범위도 이 사이에서 이루어진다.

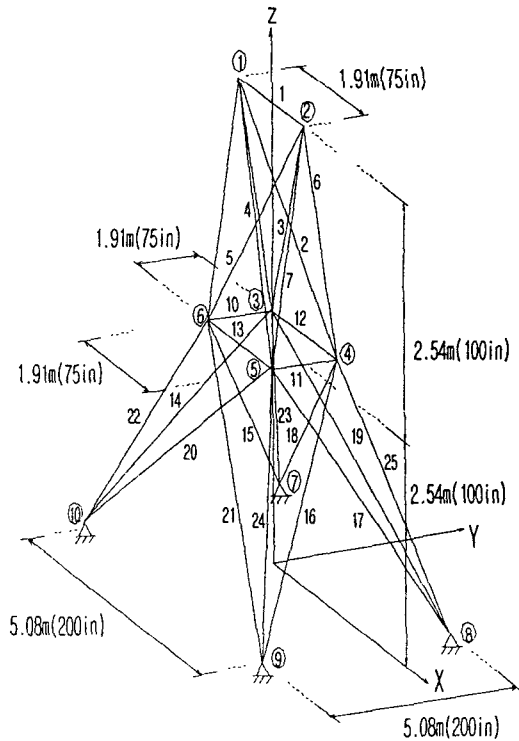


그림 2. 25부재 입체 트러스 구조물

표 1. Cross-Sectional Area List

부재 번호	단면적 (in ²)	부재 번호	단면적 (in ²)	부재 번호	단면적 (in ²)
1	3.4	11	2.0	21	1.0
2	3.2	12	1.9	22	0.9
3	3.0	13	1.8	23	0.8
4	2.8	14	1.7	24	0.7
5	2.6	15	1.6	25	0.6
6	2.5	16	1.5	26	0.5
7	2.4	17	1.4	27	0.4
8	2.3	18	1.3	28	0.3
9	2.2	19	1.2	29	0.2
10	2.1	20	1.1	30	0.1

표 2. 25부재 입체 트러스의 최적해 비교

설계 변수	Zhu	Rajeev	Neural dynamis	SA
G ₁	0.1	0.1	0.6	0.1
G ₂	1.9	1.8	1.4	1.4
G ₃	2.6	2.3	2.8	2.6
G ₄	0.1	0.2	0.5	0.1
G ₅	0.1	0.1	0.6	0.2
G ₆	0.8	0.8	0.5	0.9
G ₇	2.1	1.8	1.5	1.3
G ₈	2.6	3.0	3.0	3.2
총 중량 (lb)	562.93	546.95	543.95	519.62

그리고 최적화 과정에서 요구되는 단면 특성은 단면적으로 하였으며, 각 설계 변수의 초기설정 단면적은 단면적 list중에 하나를 택한다. 예제 적용시 구조물의 각 부재군의 최적 설계를 위한 초기설계의 부재 단면적을 3.0 in^2 로 지정하였다. 본 예제의 구조물의 최소중량은 $519.62(\text{lb})$ 로 Zhu⁽⁶⁾(1986), Rajeev⁽⁷⁾와 Krishnamoorthy (1992), Adeli와 Park⁽⁸⁾(1996)과 비교한 결과, 최적해(global minimum)로의 수렴성을 표 2와

그림 3을 통하여 확인할 수 있고, 타 최적 알고리즘의 구조물의 중량에 비해 약 4.5%로 감소하였다.

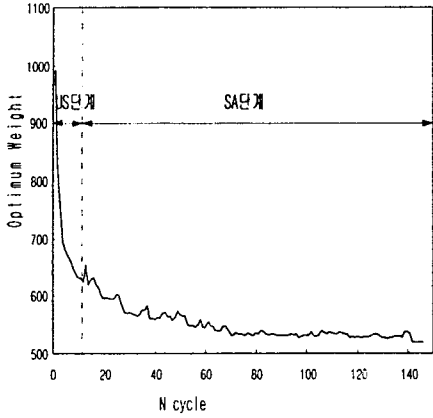


그림 3. 25부재 입체 트러스구조물의 수렴곡선

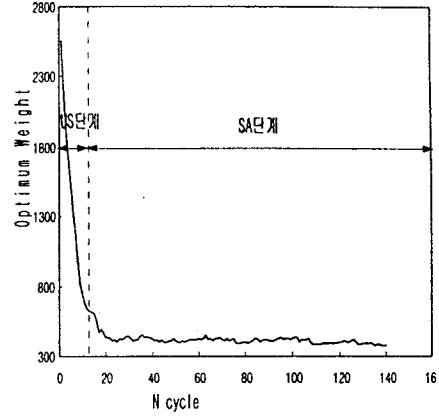


그림 5. 72부재 입체 트러스구조물의 수렴 곡선

4.2 72부재 입체 철골 트러스 구조물

72부재는 그림 4에서 보는 것같이 2축 대칭이며 16개 설계변수로 그룹화 되어져 있다. 수평면에 대칭적으로 X와 Y, Z방향으로 하중 조건을 가질 때 최적해를 찾고자 한다. 하중조건과 부재의 그룹별 지정은 참고 문헌 5, 6을 참고한다. 탄성 계수 $E = 10000 \text{ ksi}$ (68.95 GPa)와 단위 중량 $\rho = 0.1 \text{ lb/in}^3$ (27.14 kN/m^3)이다. 최상층의 X와 Y축에 대한 최대 변위는 $\pm 0.25 \text{ in}$ ($\pm 0.635 \text{ cm}$)이다. 최대 허용 압축 응력과 인장 응력은 $\pm 25 \text{ ksi}$ ($\pm 172.4 \text{ MPa}$)로 제한한다. 최소 단면적은 0.1 in^2 (0.0645 cm^2)로 주어진다. 그리고 16개의 독립 변수와 각 하중 조건에 대한 80개의 제약조건을 가지고 있다. 부재의 단면적 List는 25부재의 예와 동일한 표 1의 이산형 단면적 List를 사용한다. 초기 설계값은 모든 부재가 같은 단면적 3.0 in^2 로 하였다.

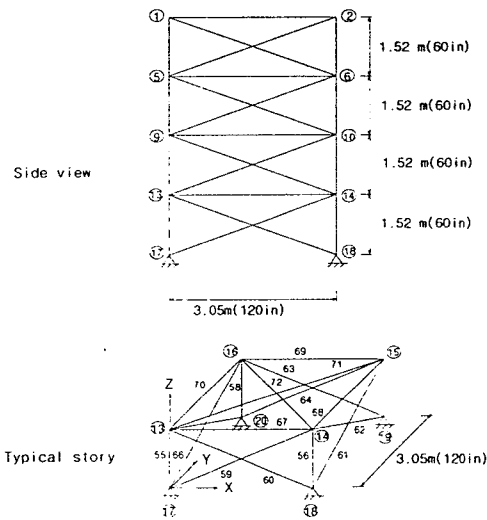


그림 4. 72부재 3차원 철골 트러스 구조물

표 3. 최적해의 비교

설계 변수	Adeli and Kamal	Neural dynamics	SA
1	0.1579	0.2151	0.1
2	0.5501	0.5179	0.5
3	0.3449	0.4190	0.5
4	0.4984	0.5039	0.4
5	0.5137	0.4807	0.4
6	0.4791	0.5084	0.6
7	0.0100	0.0100	0.1
8	0.0100	0.0643	0.1
9	1.1567	1.3696	1.3
10	0.5689	0.5070	0.6
11	0.0100	0.0100	0.1
12	0.0100	0.0100	0.1
13	2.0259	2.7547	1.5
14	0.5332	0.5102	0.5
15	0.0100	0.0100	0.1
16	0.0100	0.0100	0.1
중량 (lb)	379.31	376.50	377.49

본 SA알고리즘에 의한 구조물의 최소중량은 377.49(lb)이며, 연속형 변수를 사용한 Adeli와 Kamal⁹⁾(1986), Adeli와 Park⁸⁾(1995)에 의한 결과와 비교하여 해의 신뢰성을 검토하였다. 그림 5와 표 3의 결과에 나타난 것같이 부재 단면적을 이산형 변수로 사용한 것을 고려하면 다소 오차가 생기나, 본 SA알고리즘은 전역적 최소점을 찾을 수 있음을 확인할 수 있다.

5. 결론

본 연구에서 구조최적화에 적합한 SA기법을 개발하여 3차원 철골 트러스 구조물의 최소중량설계에 적용하였으며 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 전체 알고리즘을 두 단계로 하여 SA 자체의 초기설계 선택을 자동화하였으며 최적화 초기 단계의 반복회수를 감소시켜 수렴시간을 단축할 수 있었다.
2. 3차원 철골 트러스 구조물의 최소중량설계를 위한 SA기법의 적용은 냉각 스케줄의 냉각 계수가 $f = 1/N^{(0.3-0.4)}$ 일 때 최적해로 수렴하는 과정과 수행시간이 적절함을 알 수 있었다.
3. 초기 온도에서 주어진 최저온도에 도달할 때 종료하는 기존 SA는 낮은 온도(근사 최적해)에서 비교적 많은 반복회수가 소요된다. 그러나 식 (11), (12)와 같은 종료 기준을 적용한 결과 SA를 이용한 최적화 과정의 효율성을 높이면서 다른 최적화 알고리즘에 의한 최적해와 최대 4.5 % 이내의 최적해를 구할 수 있었다.
4. SA 기법은 기존 구조최적화 알고리즘에 비하여 여러 가지 장점을 가지고 있으나 전체 최적화에 소요되는 시간이 과도한 단점을 가지고 있다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 많은 연구가 진행되고 있으며 특히 병렬 SA 알고리즘의 개발은 SA 알고리즘 자체의 장점을 유지하면서 최적화 과정의 효율성을 높일 수 있는 것으로 평가되고 있다.

참 고 문 헌

1. Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D., and Vecchi, M.P., Optimization by simulated annealing. *Science* 220, 1983, 671-680.
2. Tzan, S-R., and Pantelides, C.P., Annealing Strategy for Optimal Structural Design. *Journal Structural Engineering, ASCE*, Vol. 122, No. 7, 1996, pp. 815-827
3. Balling, R.J., Optimal steel frame design by simulated annealing. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 117, pp. 1780-1795, 1991
4. Metropolis, N., A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller and E. Teller, Equation of State Calculations by Fast Computing Machines, *J. of Chem. Physics*, 21(6), 1087-1092, (1953).
5. L. Ingber, Genetic Algorithms and Very Fast Simulated Reannealing: A Comparison, *Mathl. Comput. Modeling* Vol. 16, No. 11, pp. 87-100, 1992.
6. Zhu, D. M., An improved Templeman's algorithm for optimum design of trusses with discrete member sizes, *Engineering Optimization*, 9(1986), 303-312
7. Rajeev, S. & Krishnamoorthy, C. S., Discrete optimization of structures using genetic algorithms, *Journal of Structure Engineering, ASCE*, 118(5) (1992), 1233-1250.
8. Adeli, H., and Park, H. S., Hybrid CPN-Neural Dynamics Model for Discrete Optimization of Steel Structures, *Microcomputer in Civil Engineering*, Vol. 11, No. 5, 1996, pp. 355-366
9. H. Adeli and O. Kamal, Efficient Optimization of Space Trusses, *Computers & Structures*, Vol. 24, No. 3, pp. 501-511, 1986.
10. 박효선, 박철림, "Neural Dynamics 모델에 의한 철골구조물의 최적설계", 대한건축학회 논문집, 제 12권, 제 8호, 1996, pp.195-202
11. Vanderplaats, G. N., *Numerical Optimization technique for Engineering Design*, Mcgraw-Hill Inc., New York, 1984.