

수치해석법에 의한 비대칭 변단면 기둥의 탄성 임계하중

Elastic Critical Load of Non-symmetrically Tapered Columns by Numerical Method

신 세 옥* 김 선 혜** 이 수 곤***
Shin, Sai-Wook Kim, Sun-Hye Lee, Soo-Gon

ABSTRACT

For the proper design of a slender compression member, the exact determination of the elastic critical load is crucial. In the cases of non-prismatic compression members, the determinations of the elastic critical load cannot be usually expressed in closed forms. In this paper, the non-symmetrically tapered compression members with arbitrary boundary conditions are analysed by using the finite element method to determine the elastic critical load. The main parameters considered in the numerical analysis are the taper parameter, α and the sectional property parameter, m . To generalize, the unnumerical analysis, of the computed results for each sectional parameter, m are presented in algebraic equations, which agrees fairly well with those by F.E.M. in most cases.

1. 서 론

비대칭 변단면 압축재는 우리 주위에서 흔히 볼 수 있는 압축재이나 이들 압축재의 구조설계나 안정해석(stability analysis)에 임하게 되면 여러 가지 난관에 부딪치게 된다. 그 이유는 이들 비대칭 압축재의 좌굴을 지배하는 미분방정식의 정해(exact solution)를 구할 수 없거나 구할 수 있더라도 이들이 원주함수(cylindrical function)나 삼각함수등 복잡한 함수로 주어지기 때문이다.^{1,2} 더구나 미분방정식의 해(solution)로부터 부재 양단의 경계조건 처리후 얻어지는 좌굴방정식(buckling equation)은 더욱 지루한 과정을 거쳐야 얻을 수 있고 그 형태 또한 복잡하게 된다. 끝으로 등단면 압축재와는 달리 좌굴방정식의 해 또한 쉽지 않다.

이때에는 수치해석법을 응용하여 임계하중을 산정할 수 있다. 수치해석법으로는 차분법(finite difference method)⁹도 대단히 편리한 방법이나 여기서는 유한요소법(finite element method)을 이용하기로 한다. 어떤 계(系, system)가 특정조건을 가질 때의 수치해석결과의 유효성은 계가 일반적인 조건을 가질 때까지 확장할 수 없다는 단점이 있다. 수치해석법으로 얻어진 특정조건에 대응하는 임계

* 정회원, 전남대학교 대학원 석사과정

** 정회원, 전남대학교 대학원 석사과정

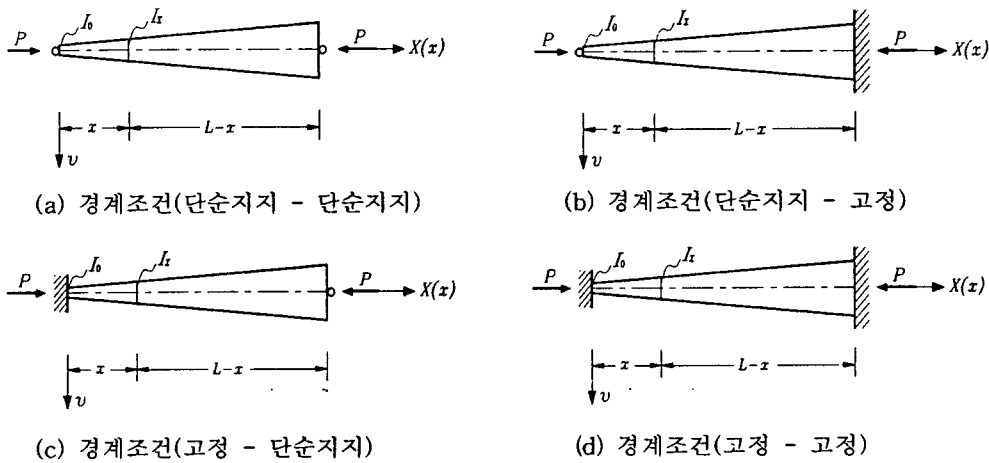
*** 정회원, 전남대학교 건축학과 교수

하중치는 회귀 분석기법을 이용한 회귀 곡선 식으로 일반화 시켰다. 이번 연구에서는 양단이 단순지지된 비대칭 변단면재의 임계하중 산정 결과를 기본으로 하여 경계조건 변화에 따른 임계하중산정에 등단면 압축재에서와 같이 유효길이 계수(effective length factor) 또는 좌굴길이 계수 개념을 도입키로 한다.

제안한 방법에 의한 양단 단순지지 기둥의 임계하중 추정치는 수치해석 결과와 잘 일치하였다. 또한 등단면 기둥에서의 유효길이 계수 개념은 변단면 압축재에서도 큰 오차 없이 확장 할 수 있다.

2. 연구의 범위와 좌굴지배식

여기에서는 그림 1.과 같은 비대칭 변단면 압축재의 임계하중을 유한요소법에 의하여 산정키로 한다.



$$I_x = I_0 \left(1 + \alpha \frac{x}{L}\right)^m, \quad 0 < x < L$$

그림 1. 경계조건이 다른 비대칭 압축재

단, 부재 축에 따라 taper의 정도를 나타내는 taper parameter, α 와 단면의 성질을 지배하는 sectional property parameter, m 은 다음 범위로 국한한다.

$$\begin{aligned} \text{taper parameter } \alpha &: \alpha = 0.0, 0.1, 0.2, \sim 2.0 \\ \text{sectional property parameter } m &: m = 1, 2, 3 \text{ 또는 } 4 \end{aligned} \quad (1)$$

단면의 성질을 지배하는 sectional property parameter, m 이 $m = 1, 2, 3$ 또는 4를 취할 때의 기하학적 의미는 안정론에 관한 문헌들을 참고하기 바란다.

그림 1.과 같은 비대칭 압축재의 좌굴을 지배하는 식은 다음 식으로 주어진다.

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(X^m \frac{d^2 v}{dX^2} \right) + k^2 \frac{d^2 v}{dX^2} = 0 \quad (2)$$

식(2)에서 X 와 k^2 은 각각 무차원 좌표 및 무차원 하중으로 그 내용은 다음과 같다.

$$X = 1 + \alpha \frac{x}{L}, \quad k^2 = \left(\frac{L}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{PL^2}{EI_0} \quad (3)$$

단면성질 매개변수 m 이 $m = 1, 2, 3$ 또는 4를 취할 때, 식(2)의 제차해(homogeneous solution)는 원주함수나 삼각함수로 주어진다. 그림 1(a)와 같이 양단이 단순지지된 경계조건을 제외한 나머지 경우에는 특수해(particular solution)를 구하여야 일반해가 가능하게 된다.

다시 말하여 해석적 방법(analysis method)¹¹에 의한 임계하중 산정은 대단히 복잡하게 된다. 따라서 해석적 방법보다는 수치 해석법에 의한 임계하중 산정이 바람직한데 여기서는 유한요소법을 택하였다.^{4,5,6}

3. 유한요소법의 정식화

그림 2와 같은 beam-column 선형요소의 강성행렬은 다음의 두 단계로 나누어 유도함이 편리하다. 즉 처음 단계에서는 일정크기의 축방향력 P 만이 작용하고, 다음 단계에서는 일정크기의 P 가 그대로 유지되면서 요소력 $\{q\}$ 가 작용한다고 가정한다. 이렇게 가정할 때 요소에 작용하는 외력에 의한 일(external work, V)은 다음 식으로 된다.

$$V = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \cdot \{q\} + \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (4)$$

한편 요소에 축적된 변형에너지(strain energy, U)는 다음과 같이 된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (5)$$

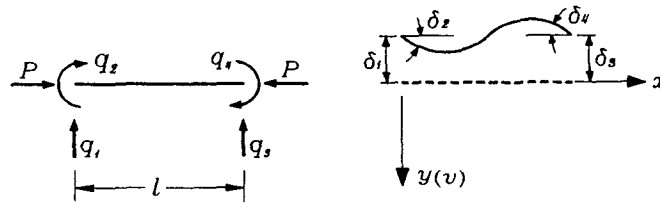


그림 2. 요소의 힘성분과 변형성분

요소의 강성행렬을 $[k]$ 라 하면 정의에 따라서 $\{q\} = [k]\{\delta\}$ 이다, 단 식(4)에서 $\{q\}$ 는 절점력 vector, $\{\delta\}$ 는 절점 변형 vector를 표시한다. 이제 식(4)와 (5)가 같다고 놓으면

$$\{\delta\}^T [k] \{\delta\} = \int_0^l EI_x \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx - P \int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (6)$$

각 node에서의 자유도가 그림 2.에서 처럼 2개씩이면 식(6)중의 처짐 함수는 다음과 같은 다항식을 택할 수 있다.

$$v = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

$$\frac{dv}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2$$

윗식의 미정계수 A, B, C 및 D 를 절점 변형성분 δ_i 로 표시한 다음, 위의 첫 번째 식에 대입하여

정리하면 아래 식이 얻어진다.^{7,8}

$$v = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\} \quad (7)$$

식(7)에서 N_i 는 shape function의 성분으로 그내용은 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} N_1 &= 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 1 \\ N_2 &= x\left(\frac{x}{l} - 1\right)^2 \\ N_3 &= 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 \\ N_4 &= x\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)\right] \end{aligned} \quad (8-a,d)$$

여기서 식(7)을 차례로 미분하면,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \left[\frac{dN}{dx} \right] \{\delta\} = [C]\{\delta\} \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \left[\frac{d^2N}{dx^2} \right] \{\delta\} = [D]\{\delta\} \end{aligned} \quad (9-a,b)$$

식(6)에 식(9-a,b)를 대입한 후 정리하면 요소의 강성행렬 $[k]$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} [k] &= \frac{1}{2} \int_0^l EI_x [D]^T \cdot [D] dx - \frac{1}{2} P \int_0^l [C]^T \cdot [C] dx = [k]_b - P[k]_g \\ &= \frac{EI_{(e)}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & \\ -6l & 4l^2 & & \\ -12 & 6l & 12 & \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{symm} \\ \\ \\ \end{matrix} - \frac{P}{30l} \begin{bmatrix} 36 & & & \\ -3l & 4l^2 & & \\ -36 & 3l & 36 & \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{symm} \\ \\ \\ \end{matrix} \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)에서 우변의 첫째 항은 순수 휨(pure bending)에 관한 강성행렬, 두 번째 항은 축방향 압축력의 영향을 나타내는 geometric stiffness matrix이다. 식(10)의 휨강성행렬 $[k]_b$ 의 유도에서 각 요소의 단면 2차모멘트 I_x 는 계산 편의상 각 요소 중앙점에서의 I_x 값을 $I_{(e)}$ 로 하였는데 I_x 를 변수로 생각한 수치적분결과¹²와 요소의 중앙점에서의 값 $I_{(e)}$ 를 이용한 약산치와의 차이는 무시할 수 있을 만큼 작다.

요소의 강성행렬을 변단면 부재 전체에 걸쳐 조합한 후 부재 양단에서의 경계조건을 처리하면 최종적으로 다음 형태의 식을 얻는다.

$$\{Q\} = [K]\{\Delta\}, \quad [K] = [K]_B - P[K]_C \quad (11)$$

식(11)에서 $\{Q\}$ 는 외력 vector, $\{\Delta\}$ 는 이에 대응하는 변형 vector이다. 여기서 구조부재 또는 구조 system의 불안정성(instability)을 “외력 $\{Q\}$ 에 의한 변형 $\{\Delta\}$ 의 급격한 증가”라 정의하면, 이는 $[K]^{-1}$ 가 무한대로 될 때, 바꾸어 말하면 다음식이 성립할 때를 말한다.

$$\det [[K]_B - P[K]_C] = 0 \quad (12-a)$$

식(12-a)는 전형적인 고유치 문제(eigenvalue problem)로 computer를 이용한 반복법으로 최소의 고유치(여기서는 1차 좌굴모드에 대응하는 임계하중)를 구하기 위하여 식(12-a)의 []내를 다음과 같은 식으로 변형시킨다.^{8,10}

$$[K]_B^{-1}[K]_C - \frac{1}{P_{cr}}[I] \quad (12-b)$$

다 알고 있는 것처럼 수치해석법에서 요소수의 증가는 일반적으로 정해치와 밀접한 관계가 있다. 그림 3.에서 보듯이 16등분 이상이면 어떤 일정한 값에 수렴하므로 여기서는 그림 1.과 같은 압축재를 20등분하였다. 수치해석 결과로 부터 얻어진 임계하중 산정 결과는 어느 경우에도 식(13)으로 표시할 수 있는데 다음의 표 1에서 " C_{fem} "이 여기에 해당한다

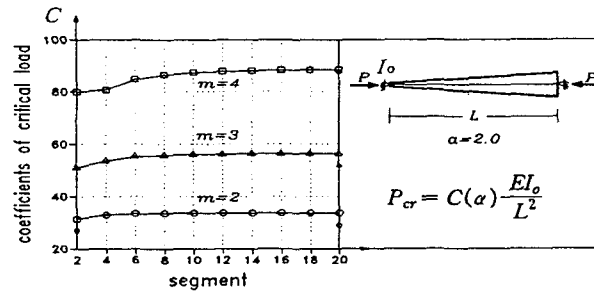


그림 3. 요소의 증가와 수렴도

$$P_{cr} = C(\alpha) \frac{EI_o}{L^2} \quad (13)$$

표 1. 단순지지 비대칭 압축재의 좌굴하중계수 (C)

α	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 4$	
	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}
0.0	9.8693	9.8880	9.8693	9.8547	9.8693	9.8348	9.8693	9.8573
0.1	10.3589	10.3653	10.8622	10.8590	11.3962	11.3808	11.9511	11.9377
0.2	10.8402	10.8394	11.8847	11.8830	13.0063	13.0092	14.2080	14.2131
0.3	11.3205	11.3102	12.9182	12.9268	14.7084	14.7200	16.6781	16.6833
0.4	11.7857	11.7777	13.9801	13.9902	16.4926	16.5132	19.3464	19.3485
0.5	12.2517	12.2419	15.0744	15.0733	18.3710	18.3889	22.2079	22.2086
0.6	12.7153	12.7029	16.1729	16.1762	20.3208	20.3468	25.2429	25.2636
0.7	13.1739	13.1605	17.2839	17.2987	22.3647	22.3872	28.5132	28.5135
0.8	13.6113	13.6149	18.4349	18.4409	24.5137	24.5100	31.9377	31.9583
0.9	14.0693	14.0660	19.5990	19.6029	26.7053	26.7152	35.5817	35.5980
1.0	14.5116	14.5138	20.7819	20.7845	29.0086	29.0028	39.4448	39.4327
1.1	14.9537	14.9583	21.9914	21.9858	31.3734	31.3728	43.4708	43.4623
1.2	15.3864	15.3996	23.2188	23.2069	33.8406	33.8252	47.6700	47.6867
1.3	15.8283	15.8375	24.4489	24.4476	36.3859	36.3599	52.1334	52.1061
1.4	16.2682	16.2722	25.7177	25.7081	38.9775	38.9771	56.7294	56.7205
1.5	16.6944	16.7036	26.9993	26.9882	41.7006	41.6767	61.5451	61.5297
1.6	17.1267	17.1317	28.2952	28.2881	44.4841	44.4586	66.5301	66.5338
1.7	17.5587	17.5566	29.6037	29.6076	47.3271	47.3230	71.7837	71.7329
1.8	17.9772	17.9781	30.9526	30.9469	50.2619	50.2697	77.1052	77.1268
1.9	18.4027	18.3964	32.2967	32.3058	53.3035	53.2989	82.6787	82.7157
2.0	18.8220	18.8114	33.6742	33.6845	56.3703	56.4104	88.5007	88.4995

4. 회귀분석 및 유효길이 계수

일반적으로 차분법이나 유한요소법 등의 수치해석 결과로부터 얻은 정보는 어떤 계(系, system)의 거동을 지배하는 몇 개의 parameter들이 특정한 값을 취할 때만 유효하고 이들 parameter들이 바뀌면 무효하다는 단점을 가지고 있다. 표 1의 유한요소법으로 얻어진 임계하중치 역시 단면성질 parameter m 에 대하여 taper parameter a 가 특정 값을 가질 때만 유효하다.

본 연구에서는 단면성질 parameter m 이 확정된 변단면 기둥의 임계하중치는 taper parameter a 의 2차식으로 표시되는 것으로 가정하였다.

$$C = A_0 + A_1 a + A_2 a^2 \quad (14)$$

식(14)의 미정계수 A_1, A_2 및 A_3 는 흔히 이용되는 회귀분석기법으로 결정하였다.¹² 즉

$$\begin{aligned} \sum C &= nA_0 + A_1 \sum a + A_2 \sum a^2 \\ \sum aC &= A_0 \sum a + A_1 \sum a^2 + A_2 \sum a^3 \\ \sum a^2 C &= A_0 \sum a^2 + A_1 \sum a^3 + A_2 \sum a^4 \end{aligned} \quad (15-a,c)$$

식(15-a,c)에서 좌변의 C 는 유한요소법으로 얻은 임계하중치, 즉 알려진 값들이고 a 역시 주어진 값이다. 따라서 식(15)는 A_0, A_1 및 A_2 에 관한 3원 1차식으로 된다. 이와 같은 기법에 의하여 결정된 상수들은 표 2에 표시하였다. 표 1에서 " C_{est} "는 식(14)에 이들 값을 대입했을 때 특정 a 에 대한 임계하중의 추정치(estimated value)들을 표시한다.

표 2. 회귀식상수 및 상관계수

$$P_{cr} = C(a) \frac{EI_0}{L^2},$$

$$C(a) = A_0 + A_1 a + A_2 a^2$$

경계조건	매개변수 (m)	A_0	A_1	A_2	r
양단	1	9.8880	4.7899	-0.1641	1.0
	2	9.8547	9.9447	0.9851	1.0
단순지지	3	9.8348	15.0482	4.1198	1.0
	4	9.8573	19.8297	9.7457	1.0

회귀분석법에 의하여 얻어진 추정치가 기준치(reference value), 즉 유한요소법에 의한 임계하중치를 얼마나 충실히 반영하고 있는가?를 판정하는 하나의 방법으로 택하는 것이 상관계수(correlation coefficient) r 인데 r 의 수학적 표현은 다음의 식(16)과 같다.¹³

$$r = \frac{\sum (C_{fem} - \bar{C}_{fem})(C_{est} - \bar{C}_{est})}{\sqrt{\sum (C_{fem} - \bar{C}_{fem})^2 \cdot \sum (C_{est} - \bar{C}_{est})^2}} \quad (16)$$

식(16)에서 \bar{C}_{fem} 과 \bar{C}_{est} 는 각각 유한요소법과 추정식에 의한 좌굴하중계수의 산술평균치를 의미한다. 이들의 계산 과정은 생략하고 그 결과만 표시한 것이 표 2의 마지막 열이다. 이 표에서 알 수 있듯이 r 값은 어느 경우에도 1.0에 아주 가까운 값이고 따라서 추정식의 값들이 기준치들을 충실히 반영하고 있다고 판정할 수 있다.

그림 1(b)에서 그림 1(d)까지 각각 다른 경계조건에 대응하는 임계하중은 앞에서와 똑같은 과정을 되풀이하여 얻을 수 있다. 그 결과는 표 1과 같은 형태를 취하나 여기서는 지면관계상 생략한다.

등단면 압축재의 임계하중은 흔히 다음과 같은 일반식으로 표시된다.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (17)$$

다 알고 있듯이 등단면일때의 유효길이 계수 K 는 그림 1(a)같이 양단 단순지지일 때는 $K=1.0$, 그림 1(b)나 1(c)와 같이 일단 단순지지 타단 고정일 때는 $K=0.7$, 끝으로 그림 1(d)와 같이 양단 고정일 때는 $K=0.5$ 로 된다.

이번의 변단면에서도 경계조건 변화에 따른 임계하중의 변화를 식(17)과 비슷한 다음식으로 표시하였다.

$$P_{cr} = \frac{1}{K^2(\alpha)} \cdot C(\alpha) \frac{EI_0}{L^2} \quad (18)$$

윗식에서 $C(\alpha)EI_0/L^2$ 은 식(13), 즉 양단이 단순지지된 변단면 압축재의 임계하중 산정식이다. 이제 식(18)의 유효길이 계수 K 도 식(14)와 같은 형태로 가정한다. 즉

$$\frac{1}{K^2(\alpha)} = B_0 + B_1\alpha + B_2\alpha^2 \quad (19)$$

식(19)의 B_0, B_1 및 B_2 와 상관계수 r 은 식(14)에서 처럼 회귀분석을 통하여 결정하는데 그 결과는 표 3과 같다.

표 3. 유효길이 계수의 회귀분석결과

$$P_{cr} = \frac{1}{K^2(\alpha)} \cdot C(\alpha) \frac{EI_0}{L^2},$$

$$\frac{1}{K^2(\alpha)} = B_0 + B_1\alpha + B_2\alpha^2$$

경계조건	매개변수 (m)	B_0	B_1	B_2	r
	1	2.0470	-0.0142	-0.0019	1.0
	2	2.0494	-0.0256	0.0003	1.0
	3	2.0473	-0.0147	-0.0039	1.0
	4	2.0452	-0.0006	-0.0001	1.0
	1	2.0470	-0.0130	-0.0039	1.0
	2	2.0480	-0.0166	-0.0036	1.0
	3	2.0472	-0.0103	-0.0010	1.0
	4	2.0453	0.0040	0.0032	1.0
	1	4.0040	-0.0392	-0.0086	1.0
	2	4.0066	-0.0511	-0.0110	1.0
	3	4.0044	-0.0358	-0.0060	1.0
	4	3.9987	0.0056	0.0074	1.0

5. 결론

단순 지지된 대칭 또는 비대칭 변단면 압축재의 임계하중을 Rayleigh-Ritz법이나 Galerkin법으로 산정한 결과는 정해치나 기준치 보다 크게 되는데, 이는 가정한 좌굴곡선이 계(system)을 강(剛, stiff)하게 만들기 때문이다. 가정 좌굴곡선의 변위 parameter 또는 자연 좌표수를 증가시킴으로서 계를 다소 연(軟, flexible)하게, 다시 말하면, 임계 하중값의 오차를 감소시킬 수 있다.

유한요소법에 의하여 임의의 경계조건을 갖는 비대칭 변단면 압축재에서 taper parameter와 sectional property parameter를 고려하여 20등분할 때의 임계하중치를 산정 하였다. 그 결과를 살펴보면 다음과 같다.

1. 경계조건은 단순지지-단순지지, 단순지지-고정, 고정-단순지지, 고정-고정의 경우를 다루었고, 일반적으로 taper parameter α 의 증가는 물론, sectional parameter m 과 양단의 고정도 증가에 따라 임계하중도 증가하였다.
2. 특정 m 및 경계조건에 대하여 α 의 변화에 따른 임계하중의 변화를 간단한 대수식으로 표현하였고 제안한 대수식으로 추정된 임계하중치는 유한요소법에 의한 결과와 대체로 일치하였다.

참고문헌

1. Stephen P. Timoshenko and James M. Gere, "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill Book Co., 1963
2. 이 수 곤, "Eigenvalue Problems of the Tapered Bars with Partially Fixed Ends", 서울대학교 대학원 박사학위 청구논문, 1979
3. Daniel J. Gorman, "Free Vibration Analysis of Beams and Shafts, John Wiley & Sons, Inc., 1975
4. Himat Solanki and Gajanan M. Sabnis, *Buckling Load of Tapered Columns*, pp436~442, Structures Congress, 1989
5. Moshe Eisenberger and Yoram Reich, *Buckling of Variable Cross Section Columns*, pp443~451, Structures Congress, 1989
6. Frank E. Weisgerber and Khalid Salahuddin, *Elastic Stability of Non-Prismatic Columns*, pp410~417, Structures Congress, 1989
7. 이 수 곤, "構造物의 安定理論", 전남대학교 출판부, 1995
8. Alexander Chajes, "Principles of Structural Stability Theory", Prentice-Hall, Inc., 1974
9. 이 상 재, "變斷面 棒의 近似 臨界荷重", 전남대학교 대학원 석사학위 청구논문, 1980
10. 建築構造學大系 編輯委員會, "固有値問題", 彰國社(日本), 1967
11. W.F.Chen and E.M.Lui, "Structural Stability", Elsevier, 1987
12. 사 중 엽, Professor's Numerical Analysis Home Page, Ch.4, 회귀분석, Ch.5, 수치적분,
13. Murray R. Spiegel, "Probability and Statistics", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1975