

국부적 통계성을 이용한 웨이블렛 영역에서의 잡음 제거

임 현, 박순영

목포대학교 전자공학과

Denoising in the Wavelet Domain Using Local Statistics

H. Lim, S. Y. Park

Dept. of Electronics Engineering, Mokpo National Univ.

Tel: 0636) 450-2878, FAX: 0636) 454-0841

hlim,sypark@chungkye.mokpo.ac.kr

Abstract

This paper presents a denoising algorithm that can suppress additive noise components while preserving signal components in the wavelet domain. The algorithm uses the local statistics of wavelet coefficients to attenuate noise components adaptively. Then thresholding operation is followed to reject the residuary noise components in the wavelet coefficients.

Simulations are carried out over 1-D signals corrupted by Gaussian noise and the experimental results show the effectiveness of the proposed algorithm.

1. 서 론

최근의 잡음제거 기술들은 원래의 신호공간에서 보다 어떤 직교성을 갖는 변환을 이용하여 처리하는 방법들을 활용하고 있으며 이것은 변환된 신호가 원래 신호와 잡음의 특징을 구분할 수 있는 성질을 나타내므로 원하는 신호로의 추정을 더욱 쉽게 할 수 있기 때문이다. 또한 이러한 변환을 이용한 방법은 신호나 영상에서 잡음을 제거할 때 나타나게 되는 두 가지 주된 관심인 잡음 제거 효율과 에지의 보존성이라는 *trade-off*를 효과적으로 잘 표현할 수 있는 방법으로 제시된다.

일반적으로, 잡음화된 신호에서 변환을 이용한 잡음 제거의 전형적인 방법들은 스무딩(smoothing)을 기본으로 하는데 이것은 변환 후 원래 신호의 큰 부류(class)는 작은 변환 계수에 집중되어지며 잡음은 신호와는 상대적인 고주파 영역에 넓게 분포하게 된다. 그리고 이와 같은 고주파 영역에서의 계수를 제거하므로써 잡음을 제거할 수 있는 방법이 된다. 웨이블렛 변환 영역에서의 기술은 계수의 국부

화된 특성으로 인해 기존의 방법에서 나타나는 문제인 블러링과 잡음제거측면에서 보다 좋은 에지의 보존과 효율적인 잡음제거 방법으로 적절하다고 평가되어 있다. 이것은 영상 신호에서의 웨이블렛 해석이 시간과 주파수 분석에 의해 다해상도 해석을 가능하게 하여 원래의 신호 공간에서 보다 웨이블렛 영역에서 원 신호를 더욱 효율적으로 추정할 수 있기 때문에 웨이블렛 변환을 이용한 신호 및 영상의 잡음 제거에 관한 많은 연구가 진행되어 왔다 [1-7].

본 논문에서는 영상 신호에 적용할 수 있는 잡음 제거 방법으로 먼저, 신호의 웨이블렛 변환을 통한 해석을 이끌며 이 변환된 영역에서 국부적인 통계적 특성을 이용하여 신호와 잡음의 특징을 명확하게 구분하게 된다. 그리고 이러한 특징화된 변환영역에서 간단하면서 강력한 성능을 보이는 thresholding 방법을 적용하여 신호와 영상 등에서 나타나는 잡음을 제거하는 방법을 제안한다. 본 논문의 구성은 2절에서 웨이블렛 변환과 웨이블렛 신호 해석에 대해 간략하게 기술하고 3절에 웨이블렛 변환 영역의 국부적 통계성을 이용한 해석 및 잡음 제거, 4절에 잡음 제거 방법에 의한 실험 및 결과, 그리고 마지막으로 5절은 결론으로 구성된다.

2. 웨이블렛 변환

웨이블렛의 간단한 방법은 다양한 다른 함수공간에 속한 함수들의 수학적인 급수(series) 전개에 의한 정규직교(orthonormal) 기저함수로 표현하며 일반적으로 간단하게 정규직교 웨이블렛 기저를 만들기 위해 두 개 상호간의 정규직교 웨이블렛을 근원으로 하는 scaling 함수 ϕ 와 mother wavelet ψ

로 구성된다. 여기서 두 함수의 관계는 scaling 함수의 *translation*과 mother wavelet에 대한 *translation*과 *dilation*을 이용하여 정의된다.

$$\begin{aligned}\phi_{j_0,k}(t) &\equiv 2^{j_0/2} \psi(2^{j_0}t - k) \\ \phi_{j,k}(t) &\equiv 2^{j/2} \psi(2^jt - k)\end{aligned}\quad (1)$$

여기서 j, j_0 , 그리고 k 은 0보다 큰 정수이다. 원 함수의 웨이블렛 급수에 의한 표현은

$$y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (2)$$

으로 여기서 $c_{j_0,k} = \langle y, \phi_{j_0,k} \rangle$ 이고 $w_{j,k} = \langle y, \phi_{j,k} \rangle$ 이다. 이러한 웨이블렛의 구조는 주파수 영역에서 *dilation*을 이용하여 국부화되며, 흔히 시간에 관한 해석이라고 하는 데이터 영역의 *translation*에 의해 국부화된다는 것을 나타낸다.

웨이블렛 영역에서 잡음제거 과정을 설명하기 위하여 주어진 신호 x 가 잡음 z 에 의하여 손상된 신호를 y 라 가정하면

$$y_i = x_i + z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

이다. 여기서 잡음 z 는 시간적으로 서로 독립적이며 동일하게 분포된(independent and identically distributed : i.i.d.) 백색 잡음으로서 $N(0, \sigma^2)$ 의 정규분포를 갖으며 신호 x 에 독립적이다.

식 (3)의 양변에 웨이블렛 변환을 취하여서 신호 x 에 대한 웨이블렛 계수를 $\{s_{j,k}\}$, 잡음 z 에 대한 웨이블렛 계수를 $\{e_{j,k}\}$ 라 하면 식 (4)와 같이 웨이블렛 영역에서 잡음화된 신호 $w_{j,k}$ 를 원래 신호 $s_{j,k}$ 와 웨이블렛 영역에서도 백색 잡음의 특성이 유지되는 잡음 $e_{j,k}$ 의 합으로 표현할 수 있다.

$$w_{j,k} = s_{j,k} + e_{j,k}, \quad (4)$$

for $j = j_0, \dots, J; k = 0, \dots, 2^j - 1$

결국, 이러한 웨이블렛의 결과로 나타나는 계수들의 특성은 원 신호공간에서의 에지 영역에서는 큰 계수 값을 나타내게 되며 이와 대조적으로 에지가 뚜렷하게 보이지 않는 어떤 평탄한 영역에서는 거의 0으로 나타나거나 작은 계수 값들로 분포하게 된다. 이것은 신호와 잡음의 분리에 통계적 특성을 용이하게 적용할 수 있게 된다.

식 (3)에서 최소 *risk* 함수 $R(\hat{x}, x)$ 를 갖는 추정치 \hat{x}_i 를 찾는 문제는 신호와 잡음의 특성이 잘 분리된 웨이블렛 영역에서 최소 *risk* 함수 $R(\hat{s}, s)$ 를 갖는 추정치 $\hat{s}_{j,k}$ 를 구하는 문제로 전환되며 Donoho와 Johnstone의 *hard*-와 *soft*-thresholding 방법[3]은 웨이블렛 영역에서 잡음을 효과

적으로 제거할 수 있도록 설계되어 있다. 이 방법을 수식적으로 표현하면 웨이블렛 계수 $w_{j,k}$ 와 threshold λ 에 대해, *soft-thresholding*은

$$\hat{s}_{j,k} = T(w_{j,k}) = \begin{cases} w_{j,k} - \lambda & \text{if } w_{j,k} > \lambda \\ 0 & \text{if } |w_{j,k}| \leq \lambda \\ w_{j,k} + \lambda & \text{if } w_{j,k} < -\lambda \end{cases} \quad (5)$$

이 되고 *hard-thresholding*은

$$\hat{s}_{j,k} = T(w_{j,k}) = \begin{cases} w_{j,k} & \text{if } |w_{j,k}| > \lambda \\ 0 & \text{if } |w_{j,k}| \leq \lambda \end{cases} \quad (6)$$

이다. 위와 같은 thresholding 알고리즘에서는 threshold λ 를 효과적으로 선택하여야 하는데 Donoho와 Johnstone은 고정된(universal) threshold $\lambda = \sigma\sqrt{2\log n}$ 과 soft-thresholding을 적용한 VisuShrink 방법[3] 그리고 soft-thresholding를 기본으로 하고 각각의 분해 level에 대한 적응적인 threshold $\sigma\sqrt{2\log 2^j}$ 를 선택하는 SureShrink 방법[7]을 제안하였다.

3. 웨이블렛의 국부적 해석과 잡음제거

웨이블렛 변환에 따른 원래 신호에서의 잡음에 의한 계수들의 분포는 중요한 시각적인 특성을 보인다. 특히 웨이블렛의 직교성에 의하여 잡음의 가우시안 특성은 웨이블렛 공간에서도 그대로 유지되며 잡음이 부가되는 경우에 많은 영역에서 0이 아닌 작은 값들로 분포된다.

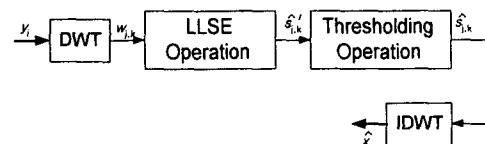


그림 1. 제안된 방법의 블록도

이러한 사실을 바탕으로 본 절에서는 그림 1의 블록도에 제시한 잡음제거 과정과 같이 웨이블렛 영역의 국부적 통계성에 의한 해석과 thresholding 을 기술한다. 여기서 제안되는 국부적 해석은 원래 신호공간에서 신호의 국부적 통계특성을 적용적으로 이용하는 LLSE(linear least square error) 알고리즘[10]을 적용한다. Lee가 제안한 이 알고리즘은 에지를 높은 국부적인 신호분산을 갖고 있는 것으로 모델링하여서 가우시안 특성의 잡음을 제거하며 에지를 보존할 수 있도록 하였는데 본 연구에서는 식 (7)과 같이 변경하여서 값이 큰 웨이블렛 계수들로부터 적용적으로 잡음을 제거하면서 에지성분을 보존할 수 있는 필터로 동작시킬 수 있도록 개발하였다.

$$\hat{s}_{j,k} = \frac{\sigma_{s_{j,k}}^2}{\sigma_{s_{j,k}}^2 + \sigma_{e_{j,k}}^2} [w_{j,k} - \bar{w}_{j,k}] + \bar{s}_{j,k} \quad (7)$$

여기서 $\bar{s}_{j,k}$ 와 $\sigma_{s_{j,k}}^2$ 은 웨이블렛 영역에서 신호성분의 국부적인 평균과 분산이며 $\sigma_{e_{j,k}}^2$ 은 잡음의 국부적인 분산이고 $\bar{w}_{j,k}$ 는 웨이블렛 계수 $w_{j,k}$ 의 국부평균이다. 식 (3)에서 가정한 바와 같이 잡음의 기대값은 0이므로 웨이블렛 변환후에도 그 특성이 유지된다고 가정하면 신호성분의 국부적인 평균값은 $w_{j,k}$ 의 국부적인 평균과 같게 되며 식 (8)과 같이 크기가 $2M+1$ 의 이동 윈도우내에서 구할 수 있다.

$$\bar{s}_{j,k} = \bar{w}_{j,k} = \frac{1}{2M+1} \sum_{l=-M}^{M} w_{j,k+l} \quad (8)$$

그리고 신호성분의 국부적인 분산은 웨이블렛 계수들의 국부적인 분산과 잡음의 국부적인 분산을 이용하여 구할 수 있는데 이들은 식 (9)와 같다.

$$\sigma_{s_{j,k}}^2 = \begin{cases} \sigma_{w_{j,k}}^2 - \sigma_{e_{j,k}}^2 & \text{if } \sigma_{w_{j,k}}^2 > \sigma_{e_{j,k}}^2 \\ 0 & \text{if o.w.} \end{cases} \quad (9)$$

여기서 $\sigma_{w_{j,k}}^2 = \frac{1}{2M+1} \sum_{l=-M}^{M} (w_{j,k+l} - \bar{w}_{j,k})^2$ 이며 $\sigma_{e_{j,k}}^2$ 은 level J 의 웨이블렛 영역에서 얻어진 분산값으로서 이 값은 웨이블렛 분해에서 잡음의 영향을 가장 잘 반영하게 된다.

이와 같은 결과로서 식 (7)을 이용한 웨이블렛의 국부적 해석은 필터계수를 $Q_{j,k} = \frac{\sigma_{s_{j,k}}^2}{\sigma_{s_{j,k}}^2 + \sigma_{e_{j,k}}^2}$ 라 할 때 다음의 동작으로 유추된다. 에지성분과 같이 공간적 변화가 큰 신호위치에 나타나는 웨이블렛 계수들은 상대적으로 잡음의 분산에 비하여 신호의 분산이 증가하여서 $Q_{j,k}$ 가 1로 접근하게 된다. 따라서 출력으로는 신호성분으로 간주되는 계수 $w_{j,k}$ 가 그대로 나타날 확률이 증가하게 된다. 반면에 계수들의 작은 값들로 이루어진 잡음영역에서는 신호의 분산이 상대적으로 감소하여서 $Q_{j,k}$ 는 0으로 접근하게 되며 출력으로는 잡음성분의 국부적 평균값이 나타나게 되어 잡음의 영향이 줄어들게 된다.

LLSE operation을 통과한 웨이블렛 계수들은 신호성분을 잘 유지하고 있으며 잡음성분으로 간주되는 계수들은 잡음 영향의 감소때문에 더 작은 계수값으로 분포하게 된다. 여기서 본 논문은 국부적 통계성에 의해 줄어든 잡음의 계수 값을 추가적으로 제거하기 위해 2절에 제시한 hard-thresholding을 수행한다. 이 과정은 웨이블렛 분해에 의한 모든 계수들의 MAD(median absolute deviation)을 구한 값과 적응적인 threshold 조건으로 $\sqrt{2 \log 2}$ 를 이용한다.

웨이블렛 영역에서 두 과정을 통하여 얻어진 추정치 $\hat{s}_{j,k}$ 는 수축을 행하지 않은 scaling 함수를 이용하여 원신호의 추정치 \hat{x} 으로 역변환하게 된다.

$$\hat{x} = \sum_{j_0,k} W^T w_{j,k}^* + \sum_{j_0 \leq j \leq J, k} W^T \hat{s}_{j,k} \quad (10)$$

이 결과의 \hat{x} 은 원래 신호 공간에서도 최소 risk $R(\hat{x}, x)$ 의 결과를 보이게 된다.

4. 실험 및 결과

이 절에서는 1차원 신호에 대해 본 논문에서 제안한 국부적 해석을 이용한 웨이블렛 계수의 잡음제거 실험과 결과를 고찰한다. 본 논문에서의 웨이블렛 변환은 신호에서 존재하는 에지와 평坦한 영역의 성분을 잘 구분할 수 있는 Daubechies 8-tap 웨이블렛[1,9]을 적용한다.

실험을 위하여 그림 2와 같은 1차원 신호인 Blocks, Doppler, Bumps, Heavisine을 발생하였으며 $\sigma=1$ 인 가우시안 잡음으로 손상시킨 후에 기존의 잡음제거 방법인 VisuShrink, SureShrink와 본 논문에서 제안한 방법의 특성을 분석하는데 이용된다.

실험에서 사용한 4개의 신호중에 Blocks에 대한 처리 결과는 그림 3에 보여준다. 1차원 신호에 대한 실험 결과에서 보듯이 적절한 threshold에 의한 선형적인 수축으로 나타나는 VisuShrink는 많은 부분에서 에지가 손상된 결과를 보여준다. 또 SureShrink는 level에 따른 적응적인 threshold와 Sure's 조건에 의해 향상된 결과를 나타내었지만 선형적인 thresholding 동작에 의해 에지를 보존하고 잡음만을 제거하는데 미흡한 결과를 보였으며 또한 다양한 신호에서도 적응적으로 동작하지 않았다. 하지만 본 논문에서 제안된 방법은 다양한 신호에 robust한 결과를 나타냈으며 그림 4의 결과에서 볼 수 있듯이 고주파와 저주파 영역 모두에서 잡음제거와 에지의 보존에 있어서 좋은 결과를 이끌었다. 결론적으로 1차원 신호의 비교에서 제안한 방법은 국부적인 통계성을 이용하여 적응적으로 웨이블렛 계수를 수축하고 thresholding한 결과, 에지 성분을 잘 보존하고 잡음도 잘 제거하는 결과를 나타내었다. 표 1에 4개의 1차원 신호에 대한 NMSE 결과를 보여준다. NMSE 결과에서 알 수 있듯이 제안된 방법은 4개 신호 모두에서 뛰어난 잡음제거 성능을 보였다.

5. 결 론

본 논문은 백색 잡음으로 손상된 신호에서 웨이블렛 변환을 이용하여 국부적 해석을 기반으로 한 잡음제거 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 웨이블

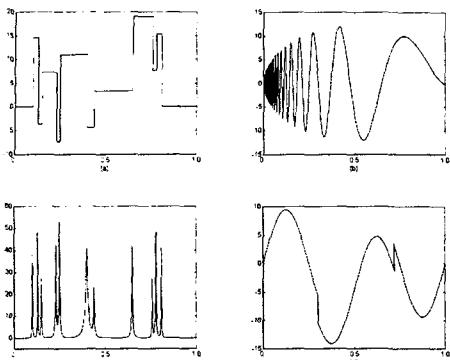


그림 2. 실험에 이용된 4개 신호, (a) Blocks, (b) Doppler, (c) Bumps, (d) Heavisine

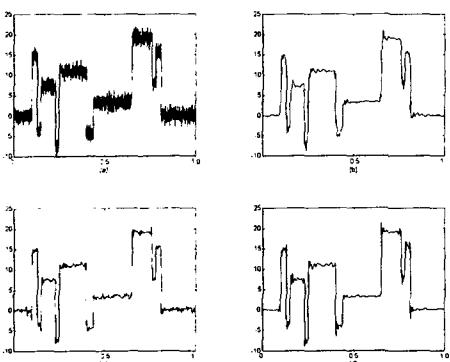


그림 3. 잡음화된 Blocks 신호의 필터링 결과, (a) Noisy signal, (b) VisuShrink, (c) SureShrink, (d) 제안된 방법

렛 영역에서 잡음 및 에지에 대한 계수들의 국부적인 특징을 이용하여 적응적으로 신호 및 잡음의 웨이블렛 계수들을 수축하고 간단한 통계적 접근 방법인 hard-thresholding을 적용하였다. 실험 결과, 다양한 신호에서 NMSE의 수치를 통해 알 수 있듯이 뛰어난 잡음 제거 성능을 보였으며 복원된 신호의 시각적인 판별도 다른 선형적인 수축 방법들에 비해 에지를 잘 보존하고 평탄한 영역에서 잡음을 잘 제거하는 결과를 보였다. 향후 연구는 이러한 1차원 신호에 의한 결과를 토대로 하여 잡음으로 손상된 영상에서의 웨이블렛 변환과 국부적 해석을 기반으로 한 효율적인 잡음 제거 방법의 적절한 유도가 필수적이다.

참고문헌

- [1] C. S. Burrus, R. A. Gopinath, H. Guo, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A primer*, Prentice-Hall, 1998.

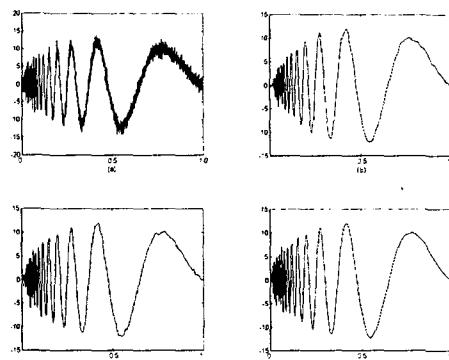


그림 4. 잡음화된 Doppler 신호의 필터링 결과, (a) Noisy signal, (b) VisuShrink, (c) SureShrink, (d) 제안된 방법

표 1. 1차원 신호에 대한 NMSE 결과

잡음 제거 방법	VisuShrink	SureShrink	제안된 방법
실험신호			
Blocks	0.73	0.35	0.27
Doppler	0.38	0.20	0.10
Bumps	0.94	0.25	0.25
Heavisine	0.09	0.08	0.05

- [2] S. G. Chang, M. Vetterli, "Spatial adaptive wavelet thresholding for image denoising", Proceedings ICIP Conference, Oct. 1997.
- [3] D. L. Donoho and I. M. Johnstone, "Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage", Biometrika, Vol. 81, pp. 425-455, 1994.
- [4] A. G. Bruce, D. L. Donoho, H-Y Gao, R. D. Martin, "Denoising and robust non-linear wavelet analysis", Proceedings SPIE Conference, 1994.
- [5] S. P. Ghosh, A. M. Sayeed, and R. G. Baraniuk, "Improved wavelet denoising via empirical wiener filering", Proceedings of SPIE, Mathematical Imaging, San Diego, Jul. 1997.
- [6] A. Bruce and H-Y Gao, "WaveShrink: Shrinkage functions and thresholds", Preceedings of SPIE, 1995.
- [7] D. L. Donoho and I. M. Johnstone, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage", journal of the American Statistical Association, 90, 1200-1224, 1995.
- [8] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, New York, 1992.
- [9] S. Mallat, *A Wavelet Tour of signal processing*, Academic Press, 1998.
- [10] J. S. Lee, "Digital Image Enhancement and Noise Filering by Use of Local Statistics", IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-2, Mar. 1980.