

단일변수 변환 행렬을 이용한 3치 RM 상수 생성

이철우, 최재석, 신부식, 심재환, 김홍수
인하대학교 전자공학과

Derivation of ternary RM coefficients using single transform matrix

Chol U Lee, Jae-sok, Bu-Sik Shin, Jae-Hwan Shim, Heung-Soo Kim

Dept. of Electronics Eng. In-Ha Univ.
E-mail : cwlee@ee.inha.ac.kr
FAX : 82-32-860-7413

abstract

This paper propose the method to derive RM(Reed-Muller) expansion coefficients for Multiple-Valued function. The general method to obtain RM expansion coefficient for p valued n variable is derivation of single variable transform matrix and expand it n times using Kronecker product. The transform matrix used is $p^n \times p^n$ matrix. In this case the size of matrix increases depending on the augmentation of variables and the operation is complicated. Thus, to solving the problem, we propose derivation of RM expansion coefficients using $p \times p$ transform matrix and Karnaugh-map.

I. 서론

현재 사용되고 있는 논리회로 시스템은 부울(Boolean)함수를 기초로 2진 논리회로로 구성되어 있다. 그러나 2진 논리회로가 갖는 회로 복잡성, 단자수 제한문제 등으로 인하여 Boolean체의 확장체인 유한체(Galois Field)를 기초로 한 다치 논리에 대한 연구가 활발히 진행중이다[1-2]. 유한체는 p 를 소수, m 을 양의 정수라 할 때 p^m 개의 원소로 구성된 체를 말한다. Galois 체에서는 2진 논리에서와 마찬가지로 교환법칙, 결합법칙, 분배

법칙이 성립한다[3-4]. 다치 논리 함수는 일반적으로 입력 값의 조합에 의하여 출력 값이 주어지는 진리표를 일반화한 연산영역(Operational Domain)과 입력변수를 함수적으로 표현한 함수영역(Functional Domain)에서 해석이 가능하여 영역간의 변환은 RM(Reed-Muller) 전개식을 이용한다. RM 전개식을 사용하는 이점은 소자 수와 게이트의 상호 연결 수에 있어서 타 함수의 논리회로 실현보다 경제적이며 테스트가 용이하기 때문에 RM 전개식의 계수들을 연산하는 여러 가지 방법들이 제안되었다[5-6]. RM 상수를 구하는 방법은 변환행렬을 이용하여 구하는 방법이 일반적이고 변환 행렬을 이용하여 구하는 방법, 결정도를 이용하여 구하는 방법 등 여러 가지가 있지만 그 중에서 변환행렬을 이용해서 구하는 방법이 많이 이용되고 있다. 그러나 변환행렬을 이용하는 방법은 변수가 증가할수록 행렬의 차수가 커진다는 단점을 가지고 있으므로 본 논문에서는 단일 변수 변환행렬을 이용한 RM 상수를 구하는 방법을 제시하였다.

II. GF(3)에서의 RM expansion

GF(p)상에서 단일 변수에 대한 Multiple-Valued Reed-Muller 전개식은 식(1)과 같이 표현이 가능하다.

$$f(x_i) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \cdots + c_{p-1} x^{p-1} \quad (1)$$

만약 $p=3$, GF(3)상에서의 RM 전개식은 식(1)에

의하여 식(2)와 같이 나타난다.

$$f(x_i) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 \quad \text{over GF}(3) \quad (2)$$

그리고 GF(3)상에서의 덧셈과 곱셈 연산에 대한 진리표는 그림 1과 같다.

.	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

modulo-3 승산

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

modulo-3 가산

그림 1.

연산 영역에서의 함수 $f(x)$ 의 계수 값을 d_i , 함수 영역에서의 계수 값을 c_i 라 할 때 두 영역의 계수들간의 관계는 식(3)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} d_0 &= f(0) = c_0 \\ d_1 &= f(1) = c_0 + c_1 + c_2 \\ d_2 &= f(2) = c_0 + 2c_1 + c_2 \end{aligned} \quad (3)$$

식(3)을 행렬의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$d = S_1 c$$

$$(S_1 c : \text{function domain} \rightarrow \text{operational domain}) \quad (4)$$

또는

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{over GF}(3)$$

S_1 의 역변환을 T ($T = S_1^{-1}$)라 하면 T 는 연산 영역에서 함수 영역으로의 변환을 의미하며 다음과 같이 표현된다.

$$c = T_1 d$$

$$(T_1 : \text{operational domain} \rightarrow \text{functional domain}) \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \text{over GF}(3)$$

GF(3)상에서 입력변수가 2개인 경우의 Reed-

Muller expansion은 다음과 같이 표현된다.

$$f(x_2, x_1) = c_0 + c_1 x_1^1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_2 + c_4 x_2 x_1^1 + c_5 x_2^2 + c_6 x_2^2 x_1 + c_7 x_2^2 x_1^2$$

식(6)을 식(3)을 이용하여 T_2 의 전달행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{bmatrix} = T_2 d \quad (6)$$

위의 행렬식은 n변수에 대한 Kronecker 행렬 곱으로 표현이 가능하며 다음 식(7)과 같이 나타난다.

$$S_n = S_1 \otimes S_{n-1}$$

(S_1 을 n번 곱함)

$$T_n = T_1 \otimes T_{n-1}$$

(T_1 을 n번 곱함)

(7)

예제 1.

GF(3)상에서 입력변수가 2개인 경우 연산 영역에서의 K-map이 그림.1과 같은 경우 함수 영역에서의 RM 전개식 상수 값을 구하여 본다.

.	0	1	2
0	0	2	0
1	2	1	2
2	0	0	0

그림2. 2입력변수
연산영역

.	0	1	2
0	0	1	1
1	1	2	2
2	1	1	1

그림3. 2입력변수
함수영역

식(8)에 의하여 함수 영역에서의 RM 전개식은 다음과 같으며 k-map으로 표시하면 그림.2와 같다.

$$[c] = [0 1 1 1 2 1 1 2 1]^t$$

위의 경우에서와 같이 p치 n변수인 경우에는 변환행렬은 $p^n \times p^n$ 의 행렬로 표현된다. p와 n의

증가에 따른 변환행렬의 행과 열의 차수가 증가함을 알 수 있다.

III. 단일 변수 변환 행렬을 이용한 RM expansion 상수 유도

단일변수 입력에 대한 RM상수를 구하여 k-map에서 각각의 입력변수에 대하여 상수를 구함으로서 다 변수에 대한 RM상수를 구한다. 이 때 이용되는 전달 행렬은 연산 영역에서 함수 영역으로 변환하는 전달행렬 T이다. 변환하는 과정을 다음과 같이 3단계로 나타낼 수 있다.

[단계1.] 함수를 k-map으로 표현한다.

[단계2.] 각 행과 열에 번호를 매긴다.

[단계3.] 전달행렬 T와 연산한다.

예제를 통하여 2가지 방법을 비교해 본다.

예제2.

그림4. 와 같이 연산 영역의 2변수 함수를 RM 변환을 이용해 함수 영역으로 나타내 보면

.	0	1	2	
0	0	2	0	④
1	2	1	2	⑤
2	0	0	0	⑥

그림4. 연산 영역의 함수

일반적으로 RM 상수를 구하려면 전달 행렬을 식(6)을 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

위의 결과에 나타나듯이 9×9 행렬을 연산하면 함수 영역의 계수들을 구할 수 있다.

본 논문에서 제안한 단계들로서 변환을 하면 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{①열}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{②열}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{③열}$$

x_1 의 변환행렬에 의하여 k-map은 ①, ②, ③열이 변환된 값으로 다음과 같다.

.	0	1	2	
0	0	2	0	④
1	1	2	1	⑤
2	1	0	1	⑥

그림5. 각 행을 단일변수 전달행렬과 연산한 결과

x_2 변수에 대한 계수 값은 k-map의 ④, ⑤, ⑥행을 변환행렬을 사용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{④행}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{⑤행}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{⑥행}$$

변환행렬에 의한 행의 값을 k-map에 대입하면 함수 영역에서의 RM 상수 값을 얻을 수 있으며

그림6.과 같다.

.	0	1	2
0	0	1	1
1	1	2	2
2	1	1	1

그림 6. 합수 영역으로 변환된 합수 값

변환된 결과를 합수의 계수로 표현하면
 $[c] = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1]'$

위의 결과에서 알 수 있듯이 $3^2 \times 3^2$ 행렬의 계산보다 단순하게 RM 상수의 계수들을 구할 수 있다.

IV. 결론

본 논문은 단일변수 변환행렬을 이용하여 RM 상수를 구하는 방법을 제시하였다. 변수의 개수에 따라 $p^n \times p^n$ 로 차수가 증가하는 행렬을 통하여 RM 상수를 구하는 기존의 방법보다 단일 변수 변환 행렬을 사용하면 전달행렬(9×9)과 연산 영역의 계수행렬(1×9)을 연산하는 것보다 3×3 행렬을 연산하는 것이 더욱 간단하다는 것을 예제를 통해 증명했다.

추후의 연구과제로는 단일 변수 변환 행렬을 이용해 GRM(Generalized Reed-Muller)상수를 구하는 것이 있다.

[4] D.H.Green, I.S.Taylor, "Multiple-valued switching circuit design by means of generalized Reed-Muller expansions," Digital Processes, 2, pp.63-81, 1976

[5] Qinhua Hong, Benchu Fei, Haomin Wu, Markek A. Perkowski, Nan Zhuang, "Fast Synthesis for Ternary Reed-Muller Expansion," IEEE Proc. of Symposium on Multiple-Valued Logic, Sacramento, California, pp.14-16, May 1993

[6] X.Wu, X.Chen, S.L.Hurst, "Mapping of Reed-Muller coefficients and the minimisation of exclusive OR-switching functions," IEE PROC., Vol. 129, Pt. E, No. 1, January 1982

[7] D.H.Green, I.S.Taylor, "Modular representation of multiple-valued logic systems," IEE Proceedings. vol 121, pp. 409-418, 1973

[8] X.Chen, X.Wu, "THE SYNTHESIS OF TERNARY FUNCTIONS UNDER FIXED POLARITIES AND TERNARY I²L CIRCUITS," IEEE Proc. of Symposium on Multiple-Valued Logic, Kyoto, Japan, pp.424-429, May 1983

[9] David Green, Modern Logic Design, Addison-Wesley Publishing company, Inc.1986

[10] George Epstein, Multiple-valued logic design an introduction, Institute of Physics Publishing Ltd 1993

참고문헌

- [1] K.C Sith, "Multiple-Valued logic:a tutorial and appreciation", computers, pp. 17-27, Apr, 1988
- [2] D. Etiemble, "On the performance of the Multivalued intergrated circuits:past, present and future", 22th ISMVL pp.154-164, Sendai Japan, May, 1992
- [3] W.Besslich, "Efficient computer method for ExOR logic design," IEE Proceedings, vol 130, Pt. E, No. 6, pp.203-206, November 1983