내부점방법에서 동적촐레스키분해의 실험적 연구

Experimental Study on Dynamic Cholesky Factorization in Interior Point Methods for Linear Programming

성명기* · 설동렬* · 박순달*

*서울대학교 산업공학과

Abstract

내부점방법(interior point methods for linear programming)에서는 다음과 같은 선형시스템을 반복적으로 풀어야 한다.

$$\Delta\boldsymbol{y} = (A\Theta A^T)^{-1}\boldsymbol{w}$$

여기서 $\Delta\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{w} \in R^m$, $A \in R^{n\times m}$이고 Θ는 대각행렬이다.

대부분의 내부점방법 프로그램들에서는 $A\Theta A^T$가 대칭양정치행렬(symmetric positive definite matrix)이라는 특성을 이용하여, $A\Theta A^T = LL^T$로 분해하는 촐레스키분해(Cholesky factorization)를 이용하여 위 식을 풀고 있다. 이는 촐레스키분해가 최소차수순서화(minimum degree ordering)방법 등을 통해 추가되는 비영요소의 수를 적게 할 수 있어서 위 식을 빠르게 계산할 수 있고, 또 이론적으로 수치적 안정성이 보장되기 때문이다.

그런데 행렬 A에 중복행이 있게 되면 $A\Theta A^T$가 대칭양정치행렬이 아니기 때문에 촐레스키분해가 수치적으로 불안정해질 수 있다. 또 중복행이 없더라도 해가 최적에 가까워질수록 Θ값의 불균일성으로 인해 그렇게 될 수도 있다.

촐레스키분해의 불안정성은 촐레스키 분해요소 L의 대각요소(l_{jj})의 값을 통해 알 수 있다. 이는 l_{jj}의 값이 선행 행들과의 선형종속성의 정도를 나타내기 때문이다. ($l_{jj}=0$ 이면 j행이 앞의 행들에 대해 중복이라는 것을 나타낸다)

A에 있는 중복행들은 사전처리(presolving)를 통해 대부분 제거할 수 있다. 그리고 남아 있는 중복행들은, $\Theta=I$로 둔 후 촐레스키분해를 하였을 때 대각요소의 값이 0이라고 판단할 수 있는 행이 중복행이라는 성질을 이용하여 제거할 수 있다.

그러나 모든 중복행을 제거하더라도 문제 풀이 중에 발생하는 수치적 불안정성까지는 제거할 수 없다. 기존 문헌들 중에서는, 풀이 중에 수치적으로 불안정한 행이 발견되면 그 행을 촐레스키분해에서 가장 뒤에 분해하도록 하는 방법이 언급되어 있다. 그렇지만 이에 대한 구현 방법에 대한 언급은 없다.

본 논문에서는 이러한 분해방법의 구현에 대해 다루었다.

일반적으로 촐레스키분해를 할 때는 분해순서에 따라 추가되는 비영요소의 수가 달라진다. 그래서 미리 경험적인 방법으로 비영요소가 적게 추가되는 분해순서를 구하게 된다. 또 그렇게 해서 정해진 분해순서로 촐레스키분해를 하게 되면 Θ는 대각행렬이기 때문에 L의 구조가 변경되지 않게 된다. 따라서 미리 L의 자료구조를 정해 주게 된다.

그런데 분해순서를 변경하게 되면 L의 구조가 변경되기 때문에 기존의 정해진 자료구조를 사용할 수 없게 된다. 정적 자료구조 대신 동적 자료구조를 사용하게 되면 촐레스키 분해요소를 이용하여 $\boldsymbol{\Delta y}$를 구하는 데 소요되는 시간이 매우 많이 늘어나기 때문에 이는 대안이 되지 않는다. 따라서 촐레스키분해가 가지고 있는 효율성을 그대로 유지하면서 분해순서를 변경하는 방법을 찾아야 한다.

본 논문에서는 이러한 특성을 가지는 두 가지 방법을 제안하고 이들의 효율성을 비교하였다.

첫 번째는 L의 자료구조를 정할 때 뒤로 돌리게 될 행의 최대 개수를 정해서 그 만큼의 여유공간을 할당한 다음, 매회 분해 때 수치적으로 불안정한 행이 발견되면 즉시 뒤로 돌리는 방법이다. 이 방법은 기존의 자료구조를 그대로 이용할 수 있어서 분해순서가 변경되더라도 L의 자료구조를 새로 구할 필요가 없다는 장점이 있지만, 미리 할당하는 여유공간은 비영요소의 위치를 알 수 없어서 full array를 사용하기 때문에 메모리의 낭비가 많고 따라서 뒤로 돌리는 행의 수를 많게 하면 $\boldsymbol{\Delta y}$를 구하는 계산시간이 많아지게 되는 단점이 있다.

두 번째는 수치적으로 불안정한 행들의 개수가 일정한 수 이상이 되면 분해순서를 변경하여 L에 대한 새로운 자료구조를 생성하는 방법이다. 이 방법은 뒤로 돌리는 행의 수에 제한이 없다는 장점이 있지만, L의 비영요소의 수에 변화가 많고 또 새로운 자료구조를 만드는데 어느 정도의 시간이 소요된다는 단점이 있다.

본 논문에서는 두 가지 방법을 각각 구현하여 대형선형계획문제에 대한 실험을 통해 그 효율성을 비교하였다.