

동차선형계획법의 가해성(可解性)에 관한 연구

Study on the Solvability of Homogeneous Linear Programming

설동렬* · 박순달*

*서울대학교 산업공학과

Abstract

내부점 선형계획법 알고리즘에 대한 연구는 크게 두 가지 방향으로 진행되고 있다. 첫째는 개선폭을 늘려주어 최적해에 이르는 전체 반복수를 줄일 수 있는 개선방향을 개발하는 연구이고, 둘째는 주어진 문제의 가능성을 안정적으로 판정하는 효율적인 방법에 관한 연구이다. 첫 번째 연구방향에 따른 기존의 내부점 방법들은 원가능문제를 가정하고 개발되었기 때문에, 이론적으로 원가능성이나 쌍대가능성을 발견하는 것이 어렵다. 실제로 이제까지 구현되어 있는 내부점 선형계획법 소프트웨어들 역시 비가능이거나 무한해일 때에 수치적으로 불안정해지는 현상이 일어났을 때에 비가능으로 판정하도록 하거나 혹은 단체법을 적용하여 가능성을 판정하도록 하고 있어서 내부점 방법만으로는 안정적으로 비가능성을 판정하지 못한다. 선형계획법 문제의 가능성 및 비가능성을 판정하는 것은 선형계획법 소프트웨어를 일반적인 용도로 사용하는 데에 있어서 매우 중요한 요소이다. 예를 들어, 선형계획법 소프트웨어를 정수계획법의 분지한계법에 적용할 경우에 정확하게 가능성을 판정하는 것은 필수적이다.

Ye, Todd 그리고 Mizuno는 내부점 선형계획법의 가능성 판정을 위해서 동차선형계획법(HLP) 모형을 제시하였다. 이 모형은 원래의 선형계획법 문제를 포함한 형태로서 언제나 가능해를 가지는 문제로 구성된다. (HLP)의 해로부터 원래의 선형계획법 문제가 해를 가지는지를 쉽게 판별할 수 있으며, (HLP)의 최적해로부터 선형계획법 문제의 최적해도 쉽게 구할 수 있다. Xu, Hung 그리고 Ye는 Ye, Todd 그리고 Mizuno의 모형보다 단순화된 (HLP) 모형을 제안하였으며, 실제로 프로그램으로 구현되었다. 한편, E. D. Andersen과 K. D. Andersen은 초기해, 각종 파라미터 설정을 달리 하여 프로그램으로 구현하였다. 본 연구에서는 동차선형계획법의 가해성(可解性), 즉 가능성을 판정하는 능력과 문제

를 풀어내는 성능에 대해서 고려하고자 한다. 동차선형계획법의 이론적 배경과 효율적인 구현 방법을 정리하고, 실험을 통하여 실용성을 검증·토의한다.

동차선형계획법은 원래 문제에 새로운 변수 r 와 x 를 추가하여 재귀쌍대가 되도록 만든다. 만일 r 가 0에 수렴하면 가능해를 가지는 문제이고, 역으로 x 가 0에 수렴하면 비가능 문제로 판정하게 된다. 실제 내부점 방법을 구현할 때에는 전산기에서 발생하는 수치적 오차를 줄이기 위해서 강상보해의 경우에도 어느 한쪽의 해를 완전히 0으로 보내지 않고 $10^{-8} \sim 10^{-14}$ 정도의 값을 하한으로 정해 둔다. 따라서, r 또는 x 의 값이 0인지 정밀하게 판정하는 것이 매우 어렵다. 결과적으로 해가 수렴하는지 여부만으로 판정하는 기존의 내부점 방법에서 사용하는 비가능 판정 방법과 r 또는 x 의 값이 0에 수렴하는지 여부로 가능성을 판정하는 동차선형계획법은 전산기에서 구현되는 관점에서는 동일한 수치적 문제를 가지고 있다. 예를 들어, 거의 가능해에 가까운 특성을 가진 문제에서는 r 와 x 의 값이 모두 매우 작은 값을 가지므로 어느 한쪽이 0에 수렴하였다고 판정하기 어려운 것이다. 한편, 해법 초기에 x 의 수렴 속도가 매우 빠른 경우에도 정확한 판정이 어려워진다.

결론적으로, 동차선형계획법 모형은 내부점 방법에서 가능성 판정을 위한 이론적인 모형으로서는 의미가 있지만 실제로 전산기에서 구현되었을 때에는 기존의 내부점 방법들에 비해서 효과적이지 못하였다. 계산량의 면에서 개선방향을 계산할 때에 2배의 치환연산이 필요하기 때문에 같은 반복수를 가질 경우에 계산속도가 더 느리게 되며, 2개의 변수가 더 추가된 모형이기 때문에 이론적으로 수렴속도가 더 빨라서 적은 반복수에 수렴하는 것도 보장되지 않는 방법이다. 따라서, 일반적으로 기존 해법에 비해서 느리다. 그리고, 동차선형계획법 모형에서 제시하는 비가능 판정 방법이 전산기에서 구현될 때에는 수치적인 문제로 인해 안정적인 판정 방법이 되지 못하였다.