콘벡스 비용함수 흐름문제에서 공정한 최적 경로설계

Fair optimal routing for minimum convex-cost flow problem

박구현* · 신용식*

* 홍익대학교 정보 · 컴퓨터공학부 정보산업공학

Abstract

본 연구에서는 단일 근원지와 단일 목적지를 갖는 콘벡스 비용함수의 최소비용 흐름문제(minimum convex-cost flow problem)에 대해 공정한 최적경로해(fair optimal routing solution)를 구하는 해법을 제시하고자 한다.

$$
\begin{aligned}
\text{(A) Minimize} \quad & \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) \\
\text{Subject to} \quad & \sum_{p_j \in P} y_j = d \\
& x_i = \sum_{j: i \in p_j} y_j, \; i = 1, .., m \\
& x_i \geq 0, \; i = 1, .., m, \; y_j \geq 0, \; p_j \in P
\end{aligned}
$$

여기서 첨자 i는 네트워크의 아크번호이다. $f_i: R \rightarrow R$는 C^2 함수이며 $x_i \geq 0$에 대해서는 $f_i(x_i) \geq 0$ 및 비감소이며, $x_i > 0$ 범위에서 콘벡스(strictly convex)이다. d는 주어진 근원지 노드에서 주어진 목적지 노드까지 공급해야할 양이다. P는 경로집합이며, p_j는 j번째 경로를 의미하며 경유하는 일련의 노드집합으로 표현된다. $x_i (i=1, .., m)$는 $y_j (p_j \in P)$는 결정변수이며 m차원 열벡터 $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$ 및 $|P|$차원 열벡터 $y = (y_1, \ldots, y_{|P|})^T$로 표현한다.

공정한 최적경로해란 최소의 목적함수 값을 갖는 최적해 중에서 경로별로 단위흐름 증감에 대해 비용의 증감이 동일하게 발생하는 경로해이다. 즉, 목적함수를 최소화하면서 흐름이 할당된 경로에 대해서는 동일한 경로 한계비용을 갖게되는 경로해를 의미한다. 이와 같은 공정한 최적경로 설계는 패킷망이나 교통망에서의 경로설정에 활용될 수 있다. ATM망에서의 트래픽 클래스별 가상경로 설계문

제는 본 연구의 동기가 되었다. 통신망 및 교통망에서의 링크지연은 많은 경우 흐름량에 대해 콘벡스의 증가함수가 된다. 교통공학에서는 사회적 관점에서 전체 아크비용의 합을 최소화하는 normative assignment와 개인적 관점에서 최단경로로 표현되는 descriptive assignment의 관계에 대해 연구가 있어 왔다. 본 연구에서 정의하는 공정한 최적경로해는 같은 근원지에서 목적지로의 최단경로가 각 개인에게 동일한 최단경로 길이를 제공하는 normative assignment라고 할 수 있다.

문제(A)에서 최적 경로흐름해 y^*가 주어지면 아크흐름해 x^*는 유일하게 주어진다. 그러나 x^*로부터 y^*는 유일하게 결정되지 않는다. 따라서 최적해 x^*로부터 공정한 경로흐름해 y^*를 구하는 것은 별도의 문제가 된다. 저자의 문헌조사에 의하면 공정한 최적상태의 경로흐름해 y^*를 구하는 연구가 아직 알려지지 않고 있다.

따라서 네트워크 흐름문제의 알고리즘 들은 문제(A)를 문제(B)와 같이 아크흐름 모형화(arc flow formulation)하여 최적 아크흐름 x_{ij}만을 구한다.

$$
\begin{aligned}
\text{(B) Minimize} \quad & \sum_{(i,j)\in E} f_{ij}(x_{ij}) \\
\text{Subject to} \quad & \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = \delta \\
& x_{ij} \geq 0,\ (i,j)\in E
\end{aligned}
$$

문제(B)에서 E는 아크집합이고, δ는 노드 i가 근원지 노드, 목적지 노드 및 그 외 노드에 따라 각각 d, $-d$ 및 0 이다.

흐름 분해 정리(flow decomposition theorem)에 의하면 아크흐름 모형화에 의한 흐름을 경로흐름 모형화(path flow formulation)로 변환할 수 있다. 그러나 이러한 변환은 1:1이 아니기 때문에 최적해로부터 공정한 최적경로해를 보장 받을 수 없다. 공정성을 보장하지 못한다는 것은 같은 근원지에서 같은 목적지로 같은 순간에 단위 흐름을 전송할 때 상이한 지연의 경로가 제공될 수 있는 것으로 활용에 문제가 있다.

그러나 경로흐름 변수 $y_j(p_j \in P)$를 포함한 문제(A)의 어려움은 네트워크가 커질수록 경로수 $|P|$가 기하급수로 커진다는 점이다. 물론 고려하는 경로를 적절한 수로 제한하여 경로흐름 모형화할 수 있다. 그러나 경로수에 제한을 둘 경우 공정성은 보장되나 비용 최소화를 보장할 수 없다. 본 연구에서는 적은 수의 경로에서 시작하여 최소비용이 보장될 때까지 경로를 점차로 추가하는 해법을 제시한다. 경로흐름 모형화의 일반적 방법처럼 처음부터 모든 경로를 한꺼번에 고려하지 않는다. 또한 제시하는 알고리즘에서는 최적상태의 아크흐름해와 공정한 경로흐름해를 함께 구한다.

본 연구의 발표에는 다음의 내용이 포함된다. 첫째, 공정한 최적경로해를 정의하고 최적경로해를 갖기 위한 최적조건을 제시한다. 둘째, 공정한 최적경로해를 구하는 알고리즘을 제시한다. 제시하는 알고리즘에서는 매 반복마다 2차계획문제와 최단경로 문제를 풀게 되며, 알고리즘은 유한 반복안에 해를 발견하게 됨을 증명한다. 셋째, 다양한 수치적용 결과를 보이게 될 것이다.