

이변량 와이블분포에서 시스템 신뢰도 추정

박 병 구 · 윤 상 철 · 김 미 영
(경북대학교 자연과학대학 통계학과)

요약

한 성분이 먼저 고장 나면 다른 하나의 성분에 부하가 걸린다는 가정에서 두 성분의 수명이 이변량 와이블모형을 따르는 병렬시스템의 신뢰도와 성질을 연구한다. 또한 신뢰도와 고장률의 최우추정량을 제시하고 모의실험을 통해 신뢰도의 편의와 평균제곱오차 관점에서 그 효과를 비교 연구한다.

Abstract In this paper, we study the estimation of system reliability for the parallel system based on Spurrer and Weier [9] bivariate Weibull distribution. We assume that when one component fails, the workload of the remaining component becomes proportional to $\phi\lambda$, where $\phi > 0$. We obtain the maximum likelihood estimators for the parameters of system reliability, and by using the numerical method, study the effects of reliability for the parallel system.

1. 서론

일반적으로 2개 이상의 동일한 성분이나, 거의 같은 성분으로 구성된 시스템의 신뢰성 연구에서 우리는 종종 한 성분의 고장이 전체 시스템의 작동에 아무런 영향을 끼치지 않는다고 가정한다. 즉 각 성분들이 서로 독립이라고 가정한다. 그러나 실제 시스템의 연구에서는 한 성분의 고장은 남아있는 다른 성분에도 영향을 끼친다. 예를 들면 양쪽 날개에 각각 동일한 엔진을 장착한 비행기, 발동기가 이중으로 구성되어 있는 발전소의 발동기, 자동차의 바퀴, 사람의 몸에서 신장이나 폐와 같이 짝을 이룬 생식기관 등이 있다. 이런 각각의 경우에서 한 성분이 고장나면 남아있는 나머지 성분은 정상적인 작업을 수행하는데 있어 첫 번째 고장난 성분의 영향을 다른 성분이 부하 받는다는 것을 알 수 있다. 따라서 이러한 시스템에서 첫 번째 고장이 나머지 성분의 신뢰도에 영향을 끼치지 않는다면 수명 연구는 성분들이 독립적으로 이루어 질

것이다. 그러나 이러한 경우가 아니라면 종속구조를 갖게 될 것이며, 수명 연구는 이변량 모형을 사용하게 되는 것이 타당하다. 따라서 이 논문에서는 와이블분포를 따르는 이변량 신뢰도 모형을 제안한다.

성분들의 수명을 모형화하기 위해 많은 학자들은 이변량 수명분포를 이용해 왔다. 먼저, 이변량 지수분포에 대해서는 Gumbel [4], Freund [2], Marshall과 Olkin [9], Block과 Basu [1], Kunchur과 Munoli [6] 등이 연구하였다.

Freund [2]는 초기에 동일한 고장률을 가지는 두 개의 성분들이 시간이 지나 한 개의 성분이 먼저 고장나면 남아있는 나머지 성분은 초기와는 다른 고장률을 가진다는 것을 제안했으며, Gross [3] 그리고 Jack [5] 등에 의해 많은 응용을 가져왔다. 그러나 과거 특정 시점에 대한 조건을 고려하지 않고 앞으로의 시간 t 만큼의 조건만을 고려하는 지수분포의 무기역성 (Loss of Memory Property)의 성질은 남아있는 성분의 수명이 기계의 마모나 영아사망율과 같은 현상을 특정 지을 수 없

는 응용의 한계를 가진다. 따라서 이러한 통계적 퇴화를 모형화 할 수 있는 와이블모형을 이용하기에 이르렀다.

이변량 와이블분포에 대해서는 Lee [7], Spurrier와 Weier [10], Lu [8]등이 연구하였다. Lee [7]는 Gumbel [4]의 이변량 지수모형을 변환해서 이변량 와이블모형을 고안했고 Spurrier와 Weier [10]는 와이블분포를 따르는 이변량 모형에서 한 성분이 고장나면 남아있는 나머지 성분 고장률이 변하게 된다는 Freund [2]의 모형을 확장하여 새로운 이변량 와이블모형을 제안했다. Lu [8]는 Freund [7]의 이변량 지수모형과 포아송 치명적 쇼크는 두 개의 성분의 동시고장을 일으킨다는 Marshall과 Olkin [9]의 이변량 지수모형을 각각 이변량 와이블모형으로 확장했다.

이 논문에서는 두 성분의 수명이 이변량 와이블모형을 따르는 병렬 시스템의 신뢰도와 고장률의 성질을 알아보고 신뢰도와 고장률의 최우추정량을 함께 제시하며, 편의와 평균제곱오차 관점에서 그 효과를 연구한다. 먼저, 2절에서는 이변량 와이블분포를 따르는 시스템의 모형을 소개하고 신뢰도와 고장률에 대해서 작업부하계수의 변환에 따른 영향력을 알아보고, 3절에서는 모수와 신뢰도의 최우추정량을 구하고 신뢰도를 추정하며, 4절에서는 모의 실험을 통해 비선형방정식인 추정량들을 계산하여 신뢰도의 편의와 평균제곱오차를 구해서 그 성질을 비교하여 본다.

2. 시스템의 신뢰도와 고장률 추정

두 성분의 수명을 각각 X, Y 라 하자. X 와 Y 는 각각 척도모수 $1/\lambda$ 과 형상모수 β 를 가지는 와이블분포를 따르며 서로 독립인 확률변수라고 한다. 이 때 첫 번째 고장때까지의 시간을 $U = \min(X, Y)$ 첫 번째 고장시간부터 시스템 고장 때까지의 시간을 $W = \max(X, Y) - U$ 라 하자. 또한 먼저 고장난 성분은 새로이 대체되거나 수리되지 않고, 남아있는 나머지 성분은 척도모수

가 $1/\lambda$ 에서 $1/\phi\lambda$ 로 $1/\phi$ 만큼 부하된 값을 가진다고 가정한다. 여기서 $\phi > 1$ ($\phi < 1$)은 한 성분의 고장이 남아있는 나머지 성분의 작업부하를 증가(감소)시키는 것을 의미하고, $\phi = 1$ 은 두 성분이 각각 독립적으로 작동한다는 것을 의미한다. 이런 경우에 Spurrier와 Weier [10]의 U 와 W 의 결합확률밀도함수는

$$f(u, w) = 2\beta^2 \phi \lambda^{2\beta} u^{\beta-1} a^{\beta-1} \{-\lambda^\beta (u^\beta + a^\beta)\} \\ a, \lambda, \beta > 0 \quad (1)$$

이고, 여기서 $a = \phi w + u$ 이다.

다음으로 식(1)에서 병렬시스템의 고장시간 $V = \max(X, Y) = U + W$ 에 대한 함수는

$$f(v) = 2\beta^2 \phi \lambda^{2\beta} \int_0^v z^{\beta-1} b^{\beta-1} \exp\{-\lambda^\beta (z^\beta + b^\beta)\} dz$$

로 표현되고, 단 $b = \phi(v - z) + z, v > 0$ 이다.

이 경우의 병렬시스템 신뢰도는

$$R(t) = P(V > t) \\ = 1 - \int_0^t 2\phi\beta^2 \lambda^{2\beta} \int_0^v z^{\beta-1} b^{\beta-1} \exp\{-\lambda^\beta (z^\beta + b^\beta)\} dz dv$$

로 표현된다.

다음으로 식(1)에 대한 몇 가지 가정을 주고 이에 대한 $f(v)$ 의 모형들을 유도해 보았다.

먼저 형상모수 $\beta \neq 1$ 이고 작업부하계수 $\phi = 1$ 인 U 와 W 의 결합확률밀도함수는

$$f(u, w) = 2\beta^2 \lambda^{2\beta} u^{\beta-1} c^{\beta-1} \exp\{-\lambda^\beta (u^\beta + c^\beta)\} \quad (2)$$

얻을 수 있고, 여기서 $c = w + u$ 이다.

식(2)에서 시스템의 고장시간 $V = \max(X, Y)$ 에 대한 함수는

$$f(v) = 2\beta \lambda^\beta v^{\beta-1} \{e^{-(\lambda v)^\beta} - e^{-2(\lambda v)^\beta}\}$$

로 표현되고, 병렬시스템의 신뢰도는

$$R(t) = 2e^{-(\lambda t)^\beta} - e^{-2(\lambda t)^\beta}, t > 0$$

로 나타난다. 또한 병렬시스템의 고장률은

$$h(t) = \frac{2\beta \lambda^\beta t^{\beta-1} \{e^{-(\lambda t)^\beta} - e^{-2(\lambda t)^\beta}\}}{2e^{-(\lambda t)^\beta} - e^{-2(\lambda t)^\beta}}$$

이다.

다음으로 형상모수 $\beta = 1$ 인 경우, 결합확률밀도

함수는

$$f(u, w) = 2\phi\lambda^2 \exp\{-\lambda(u+a)\} \quad (3)$$

이고 병렬시스템의 고장시간에 대한 함수는

$$f(v) = 2\phi\lambda \frac{1}{(2-\phi)} e^{-\phi\lambda v} (1 - e^{-(2-\phi)\lambda v}), \quad v > 0$$

이며, 병렬시스템의 신뢰도는

$$R(t) = \frac{\phi e^{-2\lambda t} - 2e^{-\phi\lambda t}}{\phi - 2}$$

로 표현된다. 또한 병렬시스템의 고장률은

$$h(t) = \frac{2\phi\lambda e^{-\phi\lambda t} \{1 - e^{-(2-\phi)\lambda t}\}}{2e^{-\phi\lambda t} - \phi e^{-2\lambda t}}$$

이다.

마지막으로 형상모수 $\beta=1$ 이고 작업부하계수 $\phi=1$ 인 경우, 결합확률밀도함수는

$$f(u, w) = 2\lambda^2 \exp\{-\lambda u - \lambda C\}$$

이다.

3. 모수와 신뢰도의 추정

n 개의 완전표본 $(u_1, w_1), (u_2, w_2), \dots, (u_n, w_n)$ 이 Spurrer와 Weier [10]의 함수가 식(1)을 따를 때 모수 λ, β, ϕ 에 대한 우도함수는

$$L = (2\beta^2\phi\lambda^{2\beta})^n \left[\prod_{i=1}^n u_i d_i \right]^{\beta-1} \exp\left\{-\lambda^\beta \sum_{i=1}^n (u_i^\beta + d_i^\beta)\right\}$$

이고, 여기서 $d_i = \phi w_i + u_i$ 라 두면 우도함수는

$$L = (2\beta^2\phi\lambda^{2\beta})^n \left[\prod_{i=1}^n u_i d_i \right]^{\beta-1} \exp\left\{-\lambda^\beta \sum_{i=1}^n e_i\right\}$$

로 다시 표현되고, 여기서 $e_i = u_i^\beta + d_i^\beta$ 이다. 모수 λ, β, ϕ 에 대한 로그 미분을 취하면

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{\beta \left[2n - \lambda^\beta \sum_{i=1}^n e_i \right]}{\lambda},$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \phi} = \frac{n}{\phi} + (\beta-1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i}{d_i} \right) - \beta\lambda^\beta \sum_{i=1}^n (w_i d_i^{\beta-1}),$$

(4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} &= 2n \left(\frac{1}{\beta} + \ln \lambda \right) + \sum_{i=1}^n \ln(u_i d_i) - \\ &= \lambda^\beta \left[\ln \lambda \sum_{i=1}^n e_i + \sum_{i=1}^n f_i \right] \end{aligned}$$

가 된다. 여기서 $f_i = u_i^\beta \ln u_i + d_i^\beta \ln d_i$ 이다.

식(4)에서

$$\lambda = \left[\frac{2n}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i} \right]^{\frac{1}{\beta}},$$

$$2n \left[\frac{1}{\hat{\beta}} - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{f}_i}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i} \right] + \sum_{i=1}^n \ln(u_i d_i) = 0,$$

$$\frac{n}{\hat{\phi}} + (\hat{\beta}-1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i}{d_i} \right) - \frac{2n\hat{\beta}}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n (w_i d_i^{\hat{\beta}-1}) = 0$$

가 된다. 여기서 $\hat{e}_i = u_i^{\hat{\beta}} + d_i^{\hat{\beta}}, \hat{f}_i = u_i^{\hat{\beta}} \ln u_i + d_i^{\hat{\beta}} \ln d_i$ 이다.

또한 식(1)에 대한 신뢰도의 추정은 모수들의 최우추정량 $\hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\phi}$ 로 부터

$$R(t) = 1 - \int_0^t 2\hat{\phi} \hat{\beta}^2 \lambda^{2\hat{\beta}} \int_0^v z^{\hat{\beta}-1} \hat{\beta}^{\hat{\beta}-1} \exp\{-(\lambda z)^{\hat{\beta}} - (\lambda \hat{\delta})^{\hat{\beta}}\} dz dv \quad (6)$$

을 얻을 수 있고, 단 $\hat{\delta} = \hat{\phi}(v-z) + z$ 이다.

다음으로 형상모수 $\beta \neq 1$ 이고 작업부하계수 $\phi=1$ 인 식(2)을 따를 때 모수 λ, β 에 대한 우도함수는

$$L = (2\beta^2\lambda^{2\beta})^n \left(\prod_{i=1}^n u_i c_i \right)^{\beta-1} \exp\left\{-\lambda^\beta \sum_{i=1}^n (u_i^\beta + c_i^\beta)\right\}.$$

로 재 표현할 수 있고, 여기서 $c_i = w_i + u_i$ 이다.

모수 λ, β 에 대한 로그미분을 취하면

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{\beta \left(n - \lambda \sum_{i=1}^n (u_i^\beta + c_i^\beta) \right)}{\lambda},$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = 2n \left(\frac{1}{\beta} + \ln \lambda \right) + \sum_{i=1}^n \ln(u_i c_i) - \lambda^\beta \left\{ \ln \lambda \sum_{i=1}^n (u_i^\beta + c_i)^\beta + \sum_{i=1}^n (u_i^\beta \ln u_i + c_i^\beta \ln c_i) \right\} \quad (7)$$

가 된다. 식(7)에서

$$\lambda = \left\{ \frac{2n}{\sum_{i=1}^n (u_i^\beta + c_i^\beta)} \right\}^{\frac{1}{\beta}},$$

$$2n \left\{ \frac{1}{\beta} - \frac{\sum_{i=1}^n (u_i^\beta \ln u_i + c_i^\beta \ln c_i)}{\sum_{i=1}^n (u_i^\beta + c_i^\beta)} \right\} + \sum_{i=1}^n \ln(u_i c_i) = 0$$

가 된다.

또한 식(2)에 대한 신뢰도의 추정치는 모수들의 최우추정량 $\hat{\lambda}$, $\hat{\beta}$ 로부터

$$\hat{R}(t) = 2e^{-(\hat{\lambda}t)^\beta} - e^{-2(\hat{\lambda}t)^\beta}.$$

이다.

다음으로 형상모수 $\beta=1$ 인 경우 식(3)을 따를 때 모수에 대한 우도함수는

$$L = (2\phi\lambda^2)^n \exp \left\{ -\lambda \sum_{i=1}^n (2u_i + \phi w_i) \right\} \quad (8)$$

이다.

식(8)에 대한 모수 λ , ϕ 의 최우추정량을 구하면

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{2 \sum_{i=1}^n u_i}, \quad \hat{\phi} = \frac{2 \sum_{i=1}^n u_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (9)$$

가 된다.

또한 식(3)에 대한 신뢰도의 추정치는 모수들의 최우추정량 $\hat{\lambda}$, $\hat{\phi}$ 로부터

$$\hat{R}(t) = \frac{\hat{\phi} e^{-2\hat{\lambda}t} - 2e^{-\hat{\phi}\hat{\lambda}t}}{\hat{\phi} - 2} \quad (10)$$

이다.

4. 모의 실험

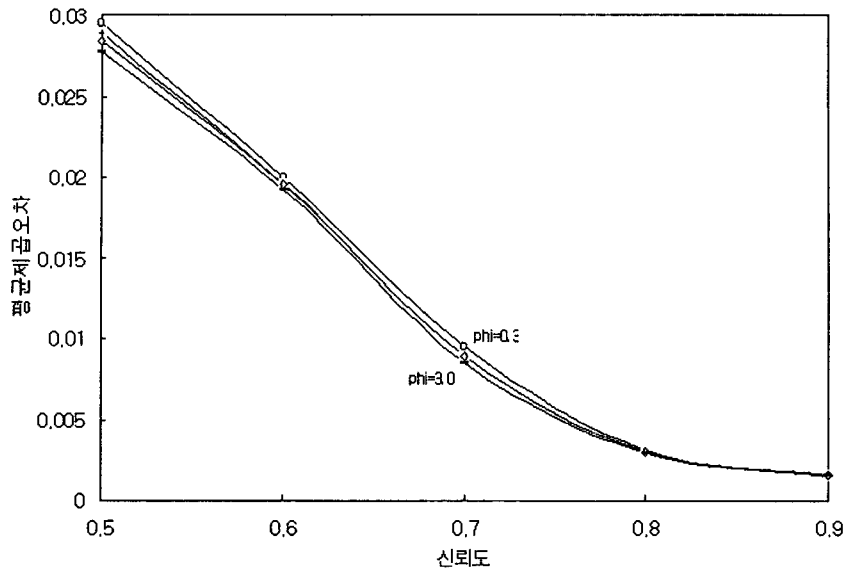
모의 실험에서는 형상모수 β 와 작업부하계수 ϕ

의 변화에 따른 $R(t)$ 의 최우추정량을 살펴보는 데에 그 목적이 있다. 여기서 척도모수는 $\lambda=1$ 로 둔다. 표본 크기 $n=20, 50$ 이고 형상모수 $\beta=0.5, 1.0, 2.0$ 이며 작업부하계수 $\phi=0.3, 0.5, 1.0, 3.0$ 인 경우에 대해 각각 모의 실험을 해보았다.

와이블 분포를 따르는 난수를 발생하기 위해서는 IMSL(International Mathematical and Statistical Libraries)의 서브루틴 DRNWIB을 이용했고, 형상모수 $\beta=1$ 인 경우는 식(9)을 이용해서 모수 λ, ϕ 의 최우추정량을 구하고 식(10)을 이용해서 신뢰도 $R(t)$ 을 추정, 이에 대한 편의(Biased)와 평균제곱오차(M.S.E.)를 구했다. 또한 $\beta \neq 1$ 인 경우에 대해서는 식(5)에서 반복적 방법으로 $\hat{\beta}$, $\hat{\phi}$ 의 값을 추정하고, 식(6)을 이용해서 신뢰도에 대한 편의와 평균제곱오차를 계산했다.

표 1 - 표 3, 그림 1에서는 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

- ① 최우추정량 $\hat{R}(t)$ 는 $\beta=0.5, 1.0$ 인 경우에서 과소 추정되고, $\beta=2.0$ 인 경우에는 신뢰도가 0.9인 경우에서 과소 추정된다.
- ② 신뢰도 $R(t)$ 의 값이 커질수록 평균제곱오차는 작아진다.
- ③ 표본크기 n 이 커지면 $R(t)$ 의 편의와 평균제곱오차는 점점 감소하는 경향이다.
- ④ 평균제곱오차는 형상모수 $\beta=1.0$ 일 때 가장 작고, $\beta=2.0$ 일 때 가장 크다.
- ⑤ 형상모수 $\beta=0.5, 1.0$ 인 경우는 작업부하계수 ϕ 가 커질수록 평균제곱오차가 증가하는 경향이고, 반대로 $\beta=2.0$ 인 경우는 작업부하계수 ϕ 가 작아질수록 평균제곱오차가 증가하는 경향이다.



<그림 1> $\beta=2$ 인 신뢰도와 평균제곱오차의 관계

ϕ	$R(t)$	$n=20$		$n=50$	
		Biased	M.S.E.	Biased	M.S.E.
0.3	0.50	.1826577	.0295172	.1775644	.0274158
	0.60	.1268991	.0199653	.1276231	.0178413
	0.70	.0820214	.0092678	.0282481	.0090437
	0.80	.0283918	.0030201	.0321013	.0030270
	0.90	-.0122039	.0014592	-.0097621	.0003931
0.5	0.50	.1818527	.0289395	.1761005	.0272584
	0.60	.1250031	.0195848	.1276231	.0178413
	0.70	.0800972	.0089538	.0824810	.0090437
	0.80	.0281236	.0029514	.0321013	.0030270
	0.90	-.0118376	.0015873	-.0097620	.0003931
1.0	0.50	.1763148	.0284580	.1790342	.0278998
	0.60	.1250031	.0195848	.1268898	.0167738
	0.70	.0800972	.0089538	.0802193	.0089764
	0.80	.0281236	.0029514	.0318570	.0027406
	0.90	-.0118376	.0015873	-.0090483	.0004937
3.0	0.50	.1705857	.0277474	.1756725	.0272578
	0.60	.1237232	.0192372	.1271678	.0167310
	0.70	.0777130	.0085376	.0799099	.0086717
	0.80	.0278903	.0028669	.0318005	.0025775
	0.90	-.0118027	.0015973	-.0090483	.0004937

<표 1> $\hat{R}(t)$ 의 편의(Biased)와 평균제곱오차(M.S.E.) : $\beta=0.5$

ϕ	$R(t)$	$n = 20$		$n = 50$	
		Biased	M.S.E.	Biased	M.S.E.
0.3	0.50	-.0133269	.0058936	-.0082373	.0024508
	0.60	-.0120311	.0048872	-.0062412	.0021880
	0.70	-.0123915	.0036334	-.0061678	.0012708
	0.80	-.0121515	.0023036	-.0073725	.0008063
	0.90	-.0072807	.0007610	-.0048297	.0002773
0.5	0.50	-.0135141	.0059907	-.0084772	.0025342
	0.60	-.0124564	.0050572	-.0064253	.0022977
	0.70	-.0134017	.0038617	-.0067355	.0013452
	0.80	-.0127241	.0024285	-.0077098	.0008640
	0.90	-.0078671	.0008222	-.0050959	.0002998
1.0	0.50	-.0145412	.0062571	-.0091758	.0026789
	0.60	-.0130313	.0053321	-.0065246	.0024537
	0.70	-.0147509	.0041620	-.0074827	.0014467
	0.80	-.0129539	.0025403	-.0077210	.0009194
	0.90	-.0084232	.0008861	-.0053167	.0003213
3.0	0.50	-.0152001	.0063826	-.0093988	.0026905
	0.60	-.0134044	.0054440	-.0066529	.0024984
	0.70	-.0150058	.0042576	-.0075425	.0014855
	0.80	-.0127472	.0025043	-.0077110	.0009328
	0.90	-.0085597	.0009129	-.0052273	.0003270

<표 2> $\hat{R}(t)$ 의 편倚(Biased)와 평균제곱오차(M.S.E.) : $\beta=1$

ϕ	$R(t)$	$n = 20$		$n = 50$	
		Biased	M.S.E.	Biased	M.S.E.
0.3	0.50	.1826577	.0295172	.1775644	.0274158
	0.60	.1268991	.0199653	.1276231	.0178413
	0.70	.0820214	.0092678	.0282481	.0090437
	0.80	.0283918	.0030201	.0321013	.0030270
	0.90	-.0122039	.0014592	-.0097621	.0003931
0.5	0.50	.1818527	.0289395	.1761005	.0272584
	0.60	.1250031	.0195848	.1276231	.0178413
	0.70	.0800972	.0089538	.0824810	.0090437
	0.80	.0281236	.0029514	.0321013	.0030270
	0.90	-.0118376	.0015873	-.0097620	.0003931
1.0	0.50	.1763148	.0284580	.1790342	.0278998
	0.60	.1250031	.0195848	.1268898	.0167738
	0.70	.0800972	.0089538	.0802193	.0089764
	0.80	.0281236	.0029514	.0318570	.0027406
	0.90	-.0118376	.0015873	-.0090483	.0004937
3.0	0.50	.1705857	.0277474	.1756725	.0272578
	0.60	.1237232	.0192372	.1271678	.0167310
	0.70	.0777130	.0085376	.0799099	.0086717
	0.80	.0278903	.0028669	.0318005	.0025775
	0.90	-.0118027	.0015973	-.0090483	.0004937

<표 3> $\hat{R}(t)$ 의 편倚(Biased)와 평균제곱오차(M.S.E.) : $\beta=2.0$

5. 참고문헌

- [1] Block, H. W. and Basu, A. P.,
"A Continuous Bivariate Exponential Distribution",
Journal of the American Statistical Association, 69,
pp. 1031-1037, 1974.
- [2] Freund, J. E.,
"A Bivariate Extension of Exponential Distribution",
Journal of the American Statistical Association, 56, pp.
971-977, 1961.
- [3] Gross, A. J.,
"A Competing Risk Model : A One Organ Subsystem
plus a Two Organs Subsystem", *IEEE Transactions
on Reliability*, R-22, pp. 24-27, 1973.
- [4] Gumbel, E. J.,
"Bivariate Exponential Distribution", *Journal of the
American Statistical Association*, 55, pp. 698-707, 1960.
- [5] Jack, N.,
"Analysis of a Repairable 2-Unit Parallel Reductant
System with Dependent Failures", *IEEE Transactions
on Reliability*, R-35, pp. 444-446, 1986.
- [6] Kunchur. S. H. and Munoli. S. B.,
"Estimation of Reliability in Freund Model For Two
Component System", *Commun. Statist. - Theory Meth.*,
23 (11), pp 3273-3283, 1994
- [7] Lee, L.,
"Multivariate Distributions having Weibull Properties",
Journal of Multivariate Anaysis, 9, pp. 267-277, 1979.
- [8] Lu, J. C.,
"Weibull Extensions of the Freund and
Marshall-Olkin Bivariate Exponential Models", *IEEE
Transactions on Reliability*, R-38, pp. 615-619, 1989.
- [9] Marshall, A. W. and Olkin, I.,
"A Multivariate Exponential Distribution", *Journal of
the American Statistical Association*, 62, pp. 30-44,
1967.
- [10] Spurrier, J. D. and Weier, D. R.,
"Bivariate Survival Model Derived from a Weibull
Distribution", *IEEE Transactions on Reliability*, R-30,
pp. 194-197, 1981.