

## LQG/LTR 제어기법을 이용한 지진응답의 능동적 진동제어 Active Control of Earthquake Responses using LQG/LTR Method

고 현 무\*      박 관 순\*\*      박 원 석\*\*\*      조 익 선\*\*\*\*  
Koh, Hyun Moo    Park, Kwan Soon    Park, Wonsuk    Cho, Ik Sun

---

### ABSTRACT

Active vibration control methods for the reduction of vibration of structures have been developed. For the application of real structures, active control system that has robustness must be designed, because the mathematical model incompletely described has intrinsically modeling error. In this research, we propose LQG/LTR method in designing control system with robustness. A combination of acceleration feedback and model-order reduction technique is used for the application of real structures and the computation efficiency. In case of such structures as the building and the tower, the inter-story relative displacements represent an important constraint in seismic design. Therefore, selection method of design parameters is also proposed in order to reduce the inter-story relative displacements.

---

### 1. 서론

지진하중에 대한 구조물의 진동을 줄이는 방법으로 능동적 진동제어 방법이 제안되어 왔다 [G.W. Housner, et al. 1997]. 무한의 자유도를 가진 실구조물을 간략한 수학적 모델로 표현하는데는 필연적으로 불확실성과 고려되지 않은 모우드의 무시등으로 인한 모델링 오차가 발생한다 [고현무 외 1999]. 따라서, 이러한 능동 제어 시스템을 실구조물에 적용하기 위해서는 전체 시스템의 안정도-강인성을 고려하는 것이 바람직하다. 이 연구에서는 무시된 고차 모우드의 불확실한 동특성에 대하여 주파수 역에서의 안정도-강인성을 갖도록 하는 LQG/LTR(Linear-Quadratic Gaussian with Loop-Transfer Recovery) 제어기법을 사용한다. 특히 실구조물에서의 적용을 용이하게 하기 위하여 구조물의 절대 가속도를 측정변수로 사용하는 가속도 피드백을 적용한다. 또한, 빌딩이나 타워형 구조물의 경우, 지진하중이 작용할 때 층간 상대변위는 구조물의 안전에 있어서 중요한 제한조건이 된다. 따라서 구조물의 층간 상대변위를 최소화 할 수 있도록 설계변수를 선정하였으며, 수치모사를 통하여 제안된 설계방법의 효율성을 검증하였다.

---

\* 서울대학교 토목공학과 교수, 정회원  
\*\* 서울대학교 토목공학과 박사후 연구원  
\*\*\* 서울대학교 토목공학과 박사과정  
\*\*\*\* 서울대학교 토목공학과 석사과정

## 2. 모델링 오차에 대한 시스템의 안정도-강인성

지진하중을 외란으로 받으며 능동제어 시스템이 장착된 구조물의 상태 방정식은 다음 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\ddot{\mathbf{x}}_g(t) \quad (1)$$

여기서,  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_d \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}_1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}_2 \end{bmatrix}$  이고,  $\mathbf{z}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}_g(t)$ 는 각각 상대변위, 제어력, 지반가속도 벡터이며,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}_d$ ,  $\mathbf{K}$ 는 각각 질량, 감쇠, 강성 행렬이다. 그리고  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ 는 각각 제어력과 외란의 위치행렬이다.

구조물의 절대 가속도를 측정변수로 선택하면 출력 방정식은 다음 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{y}(t) = \ddot{\mathbf{z}}(t) + \ddot{\mathbf{x}}_g(t)$ ,  $\mathbf{C} = [-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \quad -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_d]$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}_1$ 이다.

모델링 오차에 대한 시스템의 안정도-강인성의 관계를 알아보기 위해, Balanced Realization에 의한 Model Reduction Technique[K. Zhou 1996]을 통하여 고차의 모우드를 무시한 감소된 시스템을 다음 식(3), (4)와 같이 나타내었다.

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r\mathbf{u}(t) \quad (3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_r\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{D}_r\mathbf{u}(t) \quad (4)$$

여기서,  $\mathbf{x}_r(t)$ 는  $r$ 차로 감소된 시스템의 상태변수이다. 감소된 시스템의 전달함수행렬(Transfer Function Matrix, TFM)을  $\mathbf{G}_r(s)$ , 실제 구조 시스템의 TFM을  $\mathbf{G}(s)$ 라 하면, 모델링 오차,  $\Delta_a(s)$ 는 다음 식(5)처럼 나타낼 수 있다.

$$\Delta_a(s) = \mathbf{G}(s) - \mathbf{G}_r(s) \quad (5)$$

아래의 식(6)과 (7)을 통하여 모델링 오차에 대한 페루프 시스템의 안정성과 제어루프의 대역폭,  $\omega_B$ 와의 관계를 정의할 수 있다.

$$\omega_r \equiv \max \{ \omega | \sigma_{\min}(\mathbf{G}_r(j\omega)) \geq \sigma_{\max}(\Delta_a(j\omega)) \} \quad (6)$$

$$\sigma_{\min}(\mathbf{G}_r(j\omega)) > \sigma_{\max}(\Delta_a(j\omega)) \quad \text{for } \omega < \omega_r \quad (7)$$

여기서,  $\omega_r$ 는 강인주파수를 의미한다.

$\mathbf{G}_r(s)$ 와  $\Delta_a(s)$ 이 안정하고 식(7)이 성립하며,  $\omega_B$ 가  $\omega_r$ 보다 작으면 페루프 시스템은 항상 안정하다[L.T. Lu 1998]. 이 조건들은 모델링 오차가 있는 시스템에 대한 안정도 기준이 되며 제어기 설계에 이용할 수 있다.

## 3. 모델링 오차가 포함된 시스템의 주파수역 성능

모델링 오차가 포함된 제어 시스템은 그림 1과 같이 표현할 수 있다. 이때 제어기  $\mathbf{K}(s)$ 는 축소

모델  $G_r(s)$ 에 대해서 설계된다. 제어기의 성능을 평가하기 위해서는 다음 식(8)과 같은 추종오차를 정의할 수 있다.

$$e(s) = r(s) - y(s) = S(s)[r(s) - d(s)] + C(s)n(s) \quad (8)$$

여기서,  $e(s)$ ,  $r(s)$ ,  $n(s)$ ,  $d(s)$ 는 각각 추종오차, 기준입력, 센서잡음 그리고 외란이다. 또,  $S(s) = (I + T(s))^{-1}$ ,  $C(s) = (I + T(s))^{-1}T(s)$ ,  $T(s) = G_r(s)K(s)$ 이다.

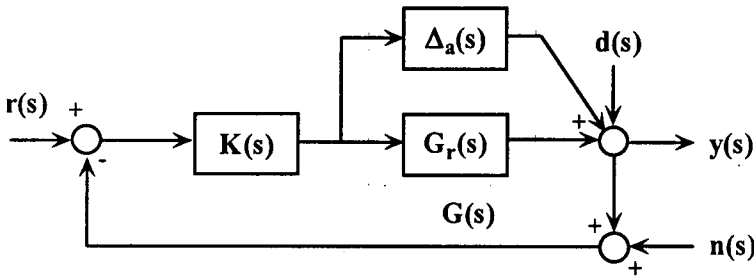


그림 1. 덧셈형 모델링 오차가 포함된 제어 시스템

그러므로 시스템의 입력,  $r(s)$ ,  $d(s)$ ,  $n(s)$ 에 대해서 다음 식(9)의 구속조건을 가지고 추종오차  $e(s)$ 를 최소로 하는 제어기  $K(s)$ 를 설계하는 문제가 된다.

$$S(s) + C(s) = I \quad (9)$$

식(8), (9)에 의하면 명령추종과 외란 제거 성능을 좋게 하기 위해서는 각각의 신호가 에너지를 갖는 주파수 영역에서  $\sigma_{\min}[T(j\omega)]$ 값이 커야 한다. 또, 센서잡음에 대한 저감도 성능을 좋게 하기 위해서는 센서잡음이 에너지를 갖는 주파수 영역에서  $\sigma_{\max}[T(j\omega)]$ 값이 작아야 한다. 일반적으로  $r(s)$ ,  $d(s)$ 는 주로 저주파영역에서 높은 에너지 밀도를 갖는 반면,  $n(s)$ 는 고주파영역에서 높은 에너지를 갖는 것으로 알려져 있으므로 시스템 전달함수의 바람직한 루프 형상은 아래 그림 2와 같이 표현할 수 있다. 따라서, 제어기 설계에 있어서 목표 필터 루프의 형상이 그림 2와 같은 루프형상이 되도록 설계하는 것이 바람직하다.

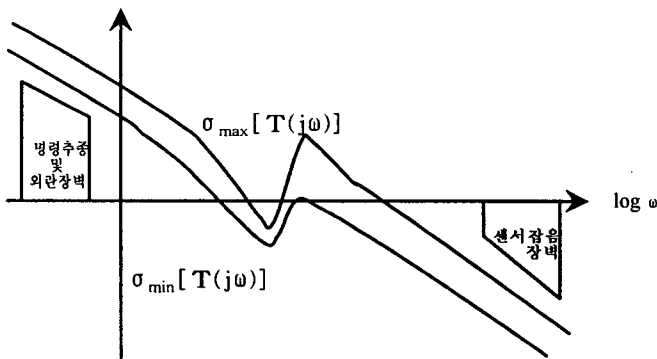


그림 2. 주파수 역 성능이 좋은 루프형상

#### 4. LQG/LTR 제어기 설계

앞에서 언급한 모델링 오차에 대해서 안정도-강인성을 갖고 주파수 역에서의 성능을 좋게 하기 위하여 LQG/LTR 기법을 사용하여 제어기를 설계한다. 먼저 식(3), (4)와 같은 감소된 시스템에 대해서 시스템의 정상상태 오차를 0으로 만들기 위해서 다음 식(10), (11)과 같은 적분요소를 추가한 보상된 시스템을 구성한다.

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{B}_a \mathbf{u}(t) + \mathbf{L} \bar{\mathbf{x}}_g(t) \quad (10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a(t) + \mu \mathbf{n}(t) \quad (11)$$

여기서,  $\mathbf{x}_a(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_r & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C}_a = [\mathbf{0} \ \mathbf{C}_r]$ 이며, 행렬  $\mathbf{L}$ 과 상수  $\mu$ 는 설계 변수로 사용된다.

다음으로, 목표 필터 루프(Target Filter Loop, TFL)를 설계한다. TFL의 전달함수 행렬은 다음 식(12)와 같다.

$$\mathbf{G}_F(s) = \mathbf{C}_a (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_a) \mathbf{H} \quad (12)$$

여기서, 필터 게인  $\mathbf{H}$ 를 선정하기 위해서는 다음 식(13)과 같은 필터대수 Riccati방정식(Filter Algebraic Riccati Equation)을 풀어서  $\mathbf{P}$ 를 구하고 이 값을 식(14)에 대입하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}_a \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_a^T + \mathbf{L} \mathbf{L}^T - \frac{1}{\mu} \mathbf{P} \mathbf{C}_a^T \mathbf{C}_a \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (13)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{P} \mathbf{C}_a^T \quad (14)$$

이때 행렬  $\mathbf{L}$ 은 Kalman 필터 문제의 주파수 역 등가식을 통해서 유도된 식(15)가 그림 2와 같은 바람직한 루프 형상이 되도록 선정한다.

$$\mathbf{G}_F(s) \approx \frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathbf{C}_a (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_a)^{-1} \mathbf{L} \quad (15)$$

그리고  $\mu$ 는 요구되는 대역폭을 만족하도록 선정한다.

마지막으로 루프 전달 회복(Loop Transfer Recovery, LTR)과정을 수행한다. 이것은 보상된 플랜트의 루프 TFM  $\mathbf{T}(s)$ 를 주파수역 성능이 좋은 TFL의 루프 TFM인  $\mathbf{G}_F(s)$ 로 수렴시키는 단계이다. 다음 식(16)과 같은 제어대수 Riccati 방정식(Control Algebraic Riccati Equation)을 통해  $\mathbf{K}$ 를 구하고 이 값을 식(17)에 대입하여 제어 게인  $\mathbf{G}$ 를 구한다.

$$\mathbf{K} \mathbf{A}_a + \mathbf{A}_a^T \mathbf{K} + \mathbf{Q} - \frac{1}{\rho} \mathbf{K} \mathbf{B}_a \mathbf{B}_a^T \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (16)$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\rho} \mathbf{B}_a^T \mathbf{K} \quad (17)$$

일반적으로 가중행렬,  $\mathbf{Q} = \mathbf{C}_a^T \mathbf{C}_a$ 일 때  $\rho$ 가 0으로 수렴하면서 만족스러운 루프 전달 회복(LTR)이 이루어진다. 실제 구조물에서 지진하중이 왔을 때 문제가 되는 것은 각 층간의 상대변위가 어느 한계범위를 초과했을 때이다. 따라서, 이 연구에서는 층간 상대변위를 제어변수로 선택하고 이를

최소화하는 제어기를 설계하고자 한다. 층간 상대변위를 최소화 하기 위하여 제어변수로서 층간 상대변위 벡터,  $y_c(t)$ 를 선택하는 방법을 사용한다. 즉, 다음 식(18)을 통해서 가중행렬,  $Q = C_q^T C_q$ 로 놓고 LTR을 수행하여 제어 게인  $G$ 를 구하였다.

$$y_c(t) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 - z_1 \\ \vdots \\ z_n - z_{n-1} \end{bmatrix} = C_q x_a(t) \quad (18)$$

여기서,  $z_i$ 는  $i$ 층의 상대변위이다.

### 5. 수치예제

수치예제 구조물로는 Chung 등[L.L. Chung, et al. 1989]이 실험한 그림 3과 같은 3자유도 모델을 사용하였으며 제어형식으로는 AMD(Active Mass Damper)를 가정하였다. 구조물의 특성값은 표 1과 같으며 입력 지진 가속도는 El Centro 지진(1940, NS)을 사용하였다.

표 1. 예제모델의 특성값

질량행렬 $M(\text{kg})$	$\begin{bmatrix} 981.12 & 0 & 0 \\ 0 & 981.12 & 0 \\ 0 & 0 & 981.12 \end{bmatrix}$
강성행렬 $K(\text{kN/m})$	$\begin{bmatrix} 2742 & -1642 & 369 \\ -1642 & 3022 & -1625 \\ 369 & -1645 & 1333 \end{bmatrix}$
감쇠행렬 $C_d(\text{N} \cdot \text{s/m})$	$\begin{bmatrix} 382.8 & -57.3 & 61.7 \\ -57.3 & 456.9 & -0.067 \\ 61.7 & -0.067 & 437.5 \end{bmatrix}$

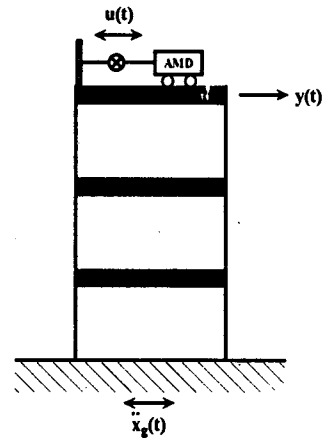


그림 3. 3자유도 모델

총 6개의 상태변수를 가진 모델로부터 Balanced Realization을 통한 Model Reduction Technique을 사용하여 4개의 상태변수를 갖도록 모델링한 후에 LQG/LTR 제어기법을 사용하여 제어기를 설계하였다. 그리고 수치모사는 4개의 상태변수를 갖는 모델에 대해서 설계된 제어기를 6개의 상태변수를 갖는 모델에 적용하여 수행하였다. 측정 변수는 3층의 절대 가속도로 하였고 제어 게인,  $G$ 를 구할 때는 층간 상대변위를 최소가 되게 하는 가중행렬,  $Q = C_q^T C_q$ 로 선택하였다. 그림 4, 그림 5는 안정도-강인성 성능기준을 LQG/LTR 기법이 잘 만족하고 있음을 보여 주고 있다. 그림 4에서 제어루프의 대역폭을  $\omega_B = 17 \text{ rad/sec}$ 로 설계하였다. 예제 구조물의 고유주파수는 각각 15, 42, 71 rad/sec 인데 첫번째 모우드와 두 번째 모우드 사이가 되도록 선택하였다. 그림 5에서 강인 주파수,

$\omega_r = 60 \text{ rad/sec}$ 이다. 따라서,  $\omega_B < \omega_r$ 이고, 그림 5에서 식(7)의 조건을 만족하고 있기에 전체 시스템은 안정하다.

표 2에서는 가중행렬을 각각  $Q = C_a^T C_a$ 와  $Q = C_q^T C_q$ 으로 선택하여 수치모사한 결과를 서로 비교하였다.  $Q = C_q^T C_q$ 으로 가중 행렬을 선택했을 때  $Q = C_a^T C_a$ 보다 지반과 1층의 상대변위, 2층과 1층과의 상대변위 그리고 제어력의 RMS 값은 커졌지만, 층간 상대변위와 제어력의 최대값들은 줄어들었다. 이는 구조물의 층간 최대변위를 제한할 수 있고 가진기의 최대용량과 이동거리를 줄일 수 있는 장점이 있다.

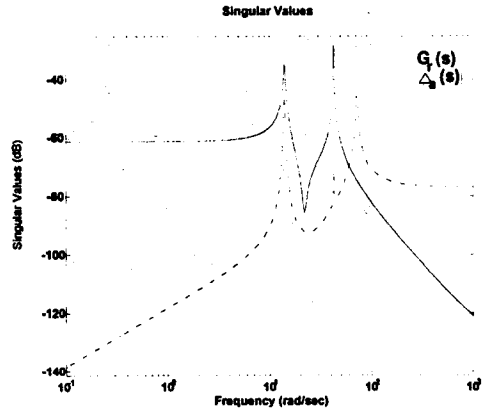
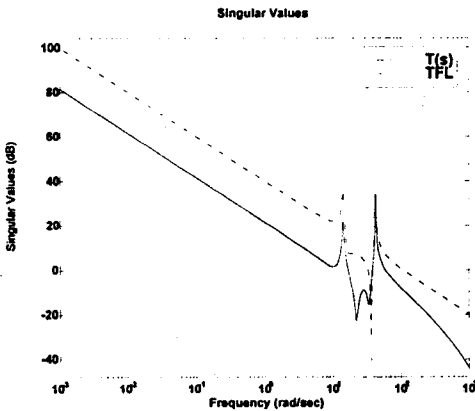


그림 4. TFL과 회복된 루프 TFM의 특이값

그림 5. 축소모델의 TFM과 덧셈형 오차의 특이값

표 2. 가중행렬에 따른 응답의 비교

층간 상대변위	제어시				비제어시	
	$Q = C_a^T C_a$		$Q = C_q^T C_q$		RMS	Max.
	RMS	Max.	RMS	Max.		
지반-1층간 상대변위(cm)	0.37	1.92	0.41	1.84	0.78	2.39
2층-1층간 상대변위(cm)	0.40	2.18	0.44	1.86	0.91	2.83
3층-2층간 상대변위(cm)	0.19	0.98	0.18	0.80	0.48	1.54
3층의 절대가속도( $m/sec^2$ )	1.67	8.97	1.50	6.85	4.39	14.5
제어력(kN)	1.01	6.39	1.25	6.27	-	-

## 6. 결론

능동적 진동 제어 시스템 설계에 있어서 모델링 오차를 고려한 강인한 제어기 설계 기법인 LQG/LTR 기법을 적용하였다. 빌딩이나 타워형 구조물의 경우, 지진하중이 작용할 때 층간 상대변위는 구조물의 안전에 있어서 중요한 제한조건이 된다. 따라서 구조물의 층간 상대변위를 최소화할 수 있도록 설계변수를 선정하였다. 수치모사를 통하여 제안된 설계방법은 안정도-강인성 조건을 잘 만족시키며 층간상대변위와 제어력의 최대값을 제한하는 효과가 있음을 보였다.

## 참고문헌

1. B. Shahian, M. Hassul(1993), "Control System Design using Matlab," Prentice-Hall.
2. F. Jabbari, W.E. Schmitendorf, and J.N. Yang(1995), "  $H_{\infty}$  Control for Seismic-Excited Building with Acceleration Feedback," Journal of Engineering Mechanics, Vol.121, No.9, pp.994-1002
3. G.W. Housner, etc(1997), "Structural Control: Past, Present, and Future," Journal of Engineering Mechanics, Vol.123, No.9, pp.897-971
4. K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover(1996), "Robust and Optimal Control," Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ
5. L.L. Chung et al.(1989), "Experimental Study of Active Control for MDOF Seismic Structures," Journal of Engineering Mechanics, Vol.115, No.8, pp.1609-1627
6. Li-Teh Lu, Wei-Ling Chiang, and Jhy-Pyng Tang(1998), "LQG/LTR Control Methodology in Active Structural Control," Journal of Engineering Mechanics, Vol.124, No.4., pp.446-454
7. M. Athans, P. Kapsouris, E. Kappos, and H.A. Spang III(1986), "Linear-Quadratic Gaussian with Loop-Transfer Recovery Methodology for the F-100 Engine," Journal of Guidance and Control, Vol.9, No.1, pp.45-52
8. 고현무, 박관순, 박원석(1995), "설계제한조건이 고려된 출력되먹임 최적제어에 의한 구조물 진동의 능동제어," 대한토목학회논문집, 15권, 6호, pp.1535-1544
9. 김종식(1998), "선형제어시스템 공학", 청문각
10. 고현무, 박관순, 박원석(1999), "  $H_{\infty}$  제어이론과 Bilinear Transform을 적용한 불확실한 구조계의 능동적 진동제어," 대한토목학회 논문집 제19권 제1-6호, pp. 241-252
11. 이규석(1997), "LQG/LTR 기법을 이용한 2차원 구조물 필터의 능동제어," 석사학위논문, 서울대학교 토목공학과