

직접적분법의 비교 Comparison of Direct Integration Methods

지 현 우 * 박 선 규 ** 이 인 원 ***
Jee, Hyun-Woo Park, Sun-Kyu Lee, In-Won

ABSTRACT

Many direct integration methods have been developed for dynamic analysis of structures. In order to compare each other method and give guideline for selecting a time increment, the amplification matrix is constructed according to algorithm of each method and stability and accuracy analysis is done. Four story shear building under external excitations is analyzed by each method and the RMS errors of displacements of top floor are compared with each other.

1. 서론

구조물의 동적 운동 방정식을 풀기 위해 직접적분법이 많이 사용된다. 일반적으로 사용되는 직접적분법으로는 Central Difference Method, Runge-Kutta Method, Houbolt Method[1], Newmark Method[2], Wilson θ Method[3] 등이 있으며, 다른 많은 방법들이 추가로 개발되었다[4-8]. 이러한 많은 방법들 중에서 보다 정확한 결과를 주는 방법을 고르기 위해 현재까지 개발된 모든 방법들에 대한 비교가 필요하지만 아직 이러한 연구가 수행 되지 않았다. 본 논문에서는 현재까지 개발된 대부분의 방법에 대한 비교를 수행하였다.

직접적분법의 계산 소요 시간은 시간 단계의 수에 비례하기 때문에 계산 시간이 적게 소요 되도록 적분 시간 간격이 충분히 커야 하고, 정확한 결과를 얻기 위해서는 적분 시간 간격이 충분히 작아야 한다. 이러한 상반되는 두 조건을 만족하기 위해서 적절한 적분 시간 간격을 선택하여야 하며 적분 시간 간격 선택에 지침이 되는 것이 안정성과 정확성 분석이다. 각각의 방법의 안정성과 정확성은 단자유도계의 운동방정식을 적분 알고리즘을 이용하여 얻은 증폭 행렬의 고유치 해석을 통해 얻을 수 있다.

수치 예제로는 조화 하중과 El Centro 지진하중을 받는 4층 전단 건물을 선택하였으며, 각각의 직접적분법으로 해석을 수행한 후 그 결과를 비교하였다.

2. 증폭행렬 (amplification matrix)

단자유도계의 자유진동 방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{x}_n + 2\xi\omega\dot{x}_n + \omega^2x_n = 0 \tag{1}$$

여기서, ω 와 ξ 는 고유진동수와 감쇠계수이다. 이를 각각의 직접적분법의 알고리즘으로 풀면 다음과 같은 재귀 함수(recursion formula)의 형태를 얻을 수 있다.

$$\{X_{n+1}\} = [A]\{X_n\} \tag{2}$$

* 한국과학기술원 토목공학과 석사과정

** 성균관대학교 토목공학과 교수

*** 한국과학기술원 토목공학과 교수

여기서, [A]는 증폭행렬, $\{X_n\}$ 는 n 번째 단계에서의 응답, $\{X_{n+1}\}$ 는 n+1 번째 단계에서의 응답이다.

증폭행렬을 구하는 단계는 1) 가정사항, 2) 단자유도계 운동방정식에 적용, 3) n+1 단계에서의 응답으로 정리, 4) 재귀 함수의 형태로 정리이다.

Central Difference Method 에 대해 적용해 보면,

$$\text{단계 1)} \quad \ddot{x}_n = \frac{1}{\Delta t^2}(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}) \quad (3)$$

$$\dot{x}_n = \frac{1}{2\Delta t}(-x_{n-1} + x_{n+1}) \quad (4)$$

$$\text{단계 2)} \quad x_{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{\xi\omega}{\Delta t} \right)^{-1} \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t^2} - \omega^2 \right) x_n + \left(\frac{\xi\omega}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t^2} \right) x_{n-1} \right\} \quad (5)$$

$$\text{단계 4)} \quad \begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2 - \omega_n^2 \Delta t^2}{1 + \xi \omega_n \Delta t} & -\frac{1 - \xi \omega_n \Delta t}{1 + \xi \omega_n \Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

과 같다. 여기서 Δt 는 적분 시간 간격이다.

지면 관계상 다른 방법에 대해서는 단계 4)만 보여준다.

- Central Difference Method (C.D.M)

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2 - \omega_n^2 \Delta t^2}{1 + \xi \omega_n \Delta t} & -\frac{1 - \xi \omega_n \Delta t}{1 + \xi \omega_n \Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{Bmatrix}$$

- Houbolt Method

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \\ x_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5\lambda}{\omega_n^2 \Delta t^2} + 6\kappa & -\left(\frac{4\lambda}{\omega_n^2 \Delta t^2} + 3\kappa \right) & \frac{\lambda}{\omega_n^2 \Delta t^2} + \frac{2\kappa}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{Bmatrix}$$

$$\text{where } \lambda = \left(\frac{2}{\omega_n^2 \Delta t^2} + \frac{11\xi}{3\omega_n \Delta t} + 1 \right)^{-1}, \quad \kappa = \frac{\xi\lambda}{\omega_n \Delta t}$$

- Newmark Method

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \\ \ddot{x}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \beta\lambda & \Delta t(1 - \beta\lambda - 2\beta\kappa) & \Delta t^2 \left[\frac{1}{2} - \beta - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \beta\lambda - 2(1 - \gamma)\beta\kappa \right] \\ -\frac{\lambda\gamma}{\Delta t} & 1 - \lambda\gamma - 2\gamma\kappa & \Delta t \left[1 - \gamma - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \gamma\lambda - 2(1 - \gamma)\gamma\kappa \right] \\ -\frac{\lambda}{\Delta t^2} & -\frac{(\lambda + 2\kappa)}{\Delta t} & -\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \lambda - 2(1 - \gamma)\kappa \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}$$

$$\text{where } \lambda = \left(\frac{1}{\omega_n^2 \Delta t^2} + \frac{2\xi\gamma}{\omega_n \Delta t} + \beta \right)^{-1}, \quad \kappa = \frac{\xi\lambda}{\omega_n \Delta t}$$

● Wilson θ Method

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \\ \ddot{x}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\lambda}{6} & \Delta t \left(1 - \frac{\lambda\theta}{6} - \frac{\kappa}{3}\right) & \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{6\theta} - \frac{\lambda\theta^2}{18} - \frac{\kappa\theta}{6}\right) \\ -\frac{\lambda}{2\Delta t} & 1 - \frac{\lambda\theta}{2} - \kappa & \Delta t \left(1 - \frac{\lambda}{2\theta} - \frac{\lambda\theta^2}{6} - \frac{\kappa\theta}{2}\right) \\ -\frac{\lambda}{\Delta t^2} & \frac{-(\lambda\theta + 2\kappa)}{\Delta t} & 1 - \frac{\lambda\theta^2}{3} - \frac{1}{\theta} - \kappa\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}$$

where $\lambda = \left(\frac{\theta}{\omega_n^2 \Delta t^2} + \frac{\xi\theta^2}{\omega_n \Delta t} + \frac{\theta^3}{6}\right)^{-1}$, $\kappa = \frac{\xi\lambda}{\omega_n \Delta t}$

● Collocation Method

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \\ \ddot{x}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \beta\lambda & \Delta t(1 - \beta(\lambda\theta + 2\kappa)) & \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\theta} - \beta\theta^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\lambda - 2\beta(1 - \gamma)\kappa\theta\right) \\ -\frac{\lambda}{2\Delta t} & 1 - \frac{\lambda\theta}{2} - \kappa & \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{\theta} - \theta^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\gamma\lambda - 2\gamma(1 - \gamma)\kappa\theta\right) \\ -\frac{\lambda}{\Delta t^2} & \frac{-(\lambda\theta + 2\kappa)}{\Delta t} & 1 - \theta^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\lambda - \frac{1}{\theta} - 2(1 - \gamma)\kappa\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}$$

where $\lambda = \left(\frac{\theta}{\omega_n^2 \Delta t^2} + \frac{2\xi\gamma\theta^2}{\omega_n \Delta t} + \theta^3 \beta\right)^{-1}$, $\kappa = \frac{\xi\lambda}{\omega_n \Delta t}$

● Hilber-Hughes-Taylor α Method (HHT)

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \\ \ddot{x}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \beta\lambda & \Delta t(1 - (1 + \alpha)\beta\lambda - 2\beta\kappa) & \Delta t^2 \left[\frac{1}{2} - \beta - (1 + \alpha)\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\beta\lambda - 2(1 + \alpha)(1 - \gamma)\beta\kappa\right] \\ -\frac{\lambda\gamma}{\Delta t} & 1 - (1 + \alpha)\lambda\gamma - 2\gamma\kappa & \Delta t \left[1 - \gamma - (1 + \alpha)\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\gamma\lambda - 2(1 + \alpha)(1 - \gamma)\gamma\kappa\right] \\ -\frac{\lambda}{\Delta t^2} & \frac{-((1 + \alpha)\lambda + 2\kappa)}{\Delta t} & -(1 + \alpha)\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\lambda - 2(1 + \alpha)(1 - \gamma)\kappa \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}$$

where $\lambda = \left(\frac{1}{\omega_n^2 \Delta t^2} + \frac{2(1 + \alpha)\xi\gamma}{\omega_n \Delta t} + (1 + \alpha)\beta\right)^{-1}$, $\kappa = \frac{\xi\lambda}{\omega_n \Delta t}$

● Bozzak-Newmark Method (B-N)

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \\ \ddot{x}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \beta\lambda & \Delta t(1 - \beta\lambda - 2\beta\kappa) & \Delta t^2 \left[\frac{1}{2} - \beta\kappa - \frac{\beta\lambda}{2} - \frac{\beta\lambda}{\omega_n^2 \Delta t^2}\right] \\ -\frac{\lambda\gamma}{\Delta t} & 1 - \lambda\gamma - 2\gamma\kappa & \Delta t \left[1 - \gamma\kappa - \frac{\gamma\lambda}{2} - \frac{\gamma\lambda}{\omega_n^2 \Delta t^2}\right] \\ -\frac{\lambda}{\Delta t^2} & \frac{-(\lambda + 2\kappa)}{\Delta t} & 1 + \kappa - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{\omega_n^2 \Delta t^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}$$

where $\lambda = \left(\frac{1 - \alpha}{\omega_n^2 \Delta t^2} + \frac{2\xi\gamma}{\omega_n \Delta t} + \beta\right)^{-1}$, $\kappa = \frac{\xi\lambda}{\omega_n \Delta t}$

● Zienkiewicz Method

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda & \Delta t(1 - 2\kappa\alpha - \lambda\alpha\theta) \\ -\frac{\lambda}{\Delta t} & 1 - 2\kappa - \lambda\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}$$

where $\lambda = \left(\frac{1}{\omega_n^2 \Delta t^2} + \frac{2\xi\theta}{\omega_n \Delta t} + \alpha\theta\right)^{-1}$, $\kappa = \frac{\xi\lambda}{\omega_n \Delta t}$

● Bazzi-Anderheggen ρ Method (B-A ρ)

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \\ \ddot{x}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & \lambda & \frac{\lambda(\rho-1)}{2(\rho+1)} \\ -\frac{\lambda}{\Delta t} & 1 - \frac{\lambda}{1+\rho} - 2\kappa & \Delta t \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \left(\kappa + \frac{\lambda}{2(1+\rho)} \right) \right) \\ \frac{-\lambda}{2\Delta t^2} (1+\rho)(1+\rho^2) & \frac{-(1+\rho^2)}{\Delta t} \left((1+\rho)\kappa + \frac{\lambda}{2} \right) & \frac{1-\rho-\rho^2-\rho^3}{2} + \frac{\kappa(1+\rho-\rho^2-\rho^3)}{2} + \frac{\rho^2(1-\rho)\lambda}{4(1+\rho)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}$$

where, $\lambda = \left(\frac{1}{\omega_n^2 \Delta t^2} + \frac{\xi}{\omega_n \Delta t} + \frac{1}{2(1+\rho)} \right)^{-1}$, $\kappa = \frac{\xi \lambda}{\omega_n \Delta t}$

3. 안정성과 정확성

중폭 행렬의 고유치 문제를 풀어냄으로써 안정성과 정확성 분석을 할 수 있다. 안정성 조건은 다음과 같다.

$$\rho(\lambda) = \max(|\lambda_i|) \leq 1 \tag{7}$$

여기서 λ 는 중폭행렬의 고유치 이고, $\rho(\lambda)$ 는 고유치의 절대값 중에서 가장 큰 값으로 스펙트럼 반경 (spectral radius) 이다.

중폭 행렬의 고유치를 구하면, 두개의 쥘레 복소수 고유치를 얻을 수 있으며 다음과 같이 실수부와 허수부의 합으로 표현할 수 있다.

$$\lambda_{1,2} = A \pm Bi \tag{8}$$

실수부 A 와 허수부 B 를 이용하여 알고리즘상의 감쇠비 (algorithmic damping ratio)와 상대적인 주기변화 (relative period error) 를 계산할 수 있으며 구하는 식은 다음과 같다.

$$\bar{\xi} = -\frac{\ln(A^2 + B^2)}{2\bar{\Omega}} \tag{9}$$

$$\tau = \frac{\omega}{\bar{\omega}} - 1 \tag{10}$$

여기서

$$\bar{\Omega} = \frac{\arctan(B/A)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \bar{\omega} = \frac{\bar{\Omega}}{\Delta t} \tag{11}$$

알고리즘상의 감쇠비 (algorithmic damping ratio)와 상대적인 주기변화 (relative period error) 는 식 (12)와 같은 단자유도계의 비감쇠, 자유진동 운동 방정식의 해를 각각의 직접적분법으로 풀었을 때 정확해(식 (13))와의 차이를 보여주는 척도로서 그림 1 에서와 같다.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad B/Cs \quad x(0)=1, \dot{x}(0)=1 \tag{12}$$

$$\text{exact solution : } x = \cos(\omega t) \tag{13}$$

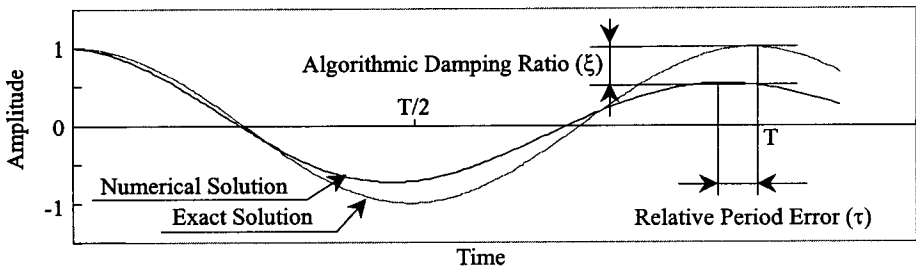


그림 1. 알고리즘상의 감쇠비와 상대적인 주기변화

그림 2은 스펙트럼 반경으로 점선으로 표시된 방법은 조건 안정한 방법이다. 그림 3는 알고리즘상의 감쇠비, 그림 4은 상대적인 주기변화이다. 세 그림에서의 x 축은 $\Delta t/T$ 로 T는 구조물의 최단주기이다. 그림 3와 4에서 $\Delta t/T$ 가 0.1일 때를 기준으로 순위를 매기면 표 1과 같다.

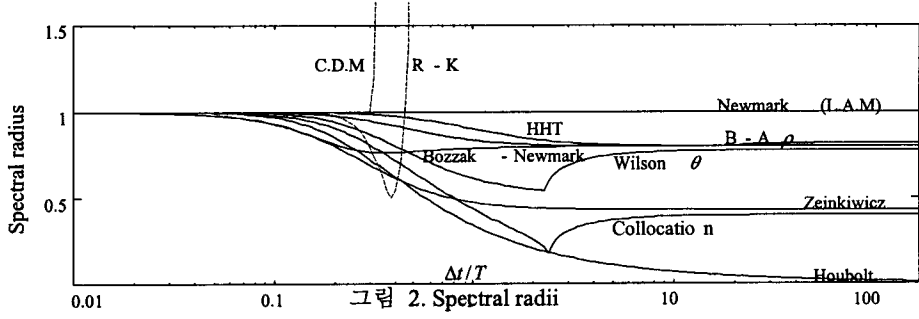


그림 2. Spectral radii

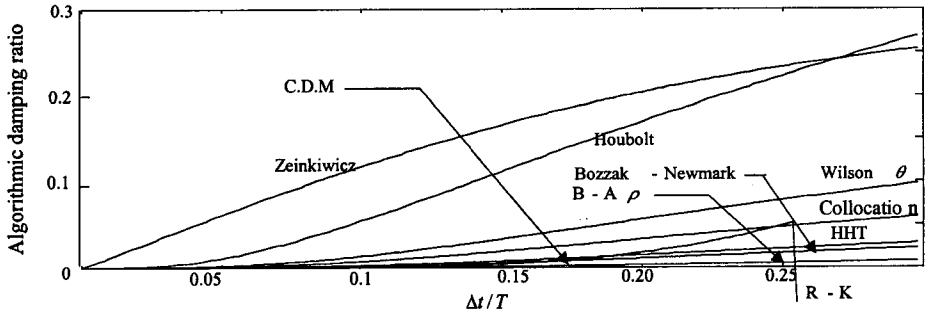


그림 3. Algorithmic damping ratios

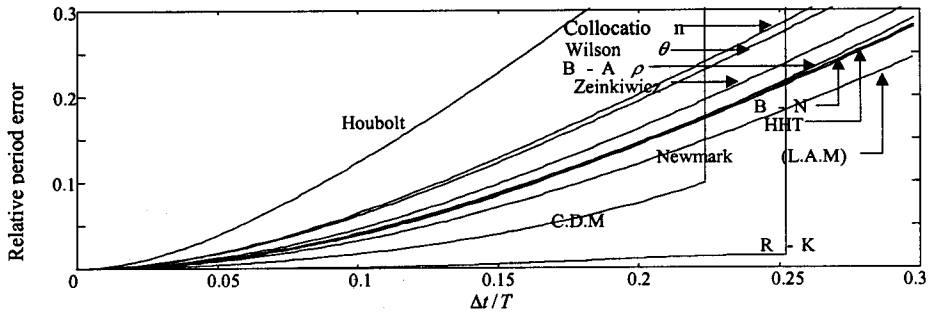


그림 4. Relative period errors

	Algorithmic Damping Ratio	Relative Period Error
1	Central Difference Method	Runge-Kutta Method
2	Newmark Method (Linear)	Newmark Method (Linear)
3	Runge-Kutta Method	Central Difference Method
4	Bazzi-Anderheggen ρ Method	Zienkiwicz Method
5	Bozzak-Newmark Method	Bozzak-Newmark Method
6	Hilber-Hughes-Taylor α Method	Hilber-Hughes-Taylor α Method
7	Collocation Method	Newmark Method Method(Average)
8	Wilson θ Method	Bazzi-Anderheggen ρ Method
9	Newmark Method Method(Average)	Wilson θ Method
10	Houbolt Method	Collocation Method
11	Zienkiwicz Method	Houbolt Method

표 1. Algorithmic damping ratios and relative period errors

4. 수치예제: 4층 전단 건물

4층 전단 건물에 대한 제원은 그림 5와 같다. 감쇠행렬 C는 Rayleigh 감쇠로 구성되며 Rayleigh 감쇠계수 α, β 는 0.918과 0.0023로 하였다. 20 rad/s와 7rad/s의 주파수를 가지는 조화하중 (harmonic loading)과 El Centro 지진을 외부하중으로 하여 지진과 같이 건물의 기초에 작용하였으며, 최상층의 변위를 각각의 직접적분법으로 구하였다. 모든 모드를 다 사용한 모드중첩법의 결과를 정확해로 사용하여 RMS (Root Mean Square) 값을 구해 비교하였다. 비교 결과는 그림 4와 같다. RMS 값의 정의는 식 (14)와 같다.

$$RMS = \frac{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x}_i)^2}}{\text{No. of steps}} \quad (14)$$

여기서 x_i 는 정확해이고, \bar{x}_i 는 각각의 직접적분법으로 계산한 값이다. 그 결과는 그림 6, 7과 같다.

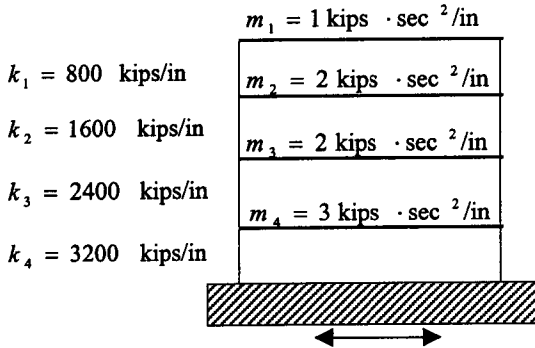


그림 5. Four story shear building [11]

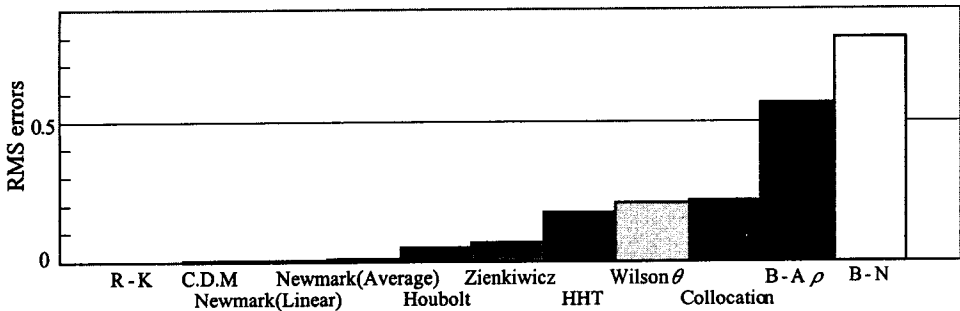


그림 6. RMS errors ($\omega = 7\text{rad/sec}$, $\Delta T/t = 0.089$)

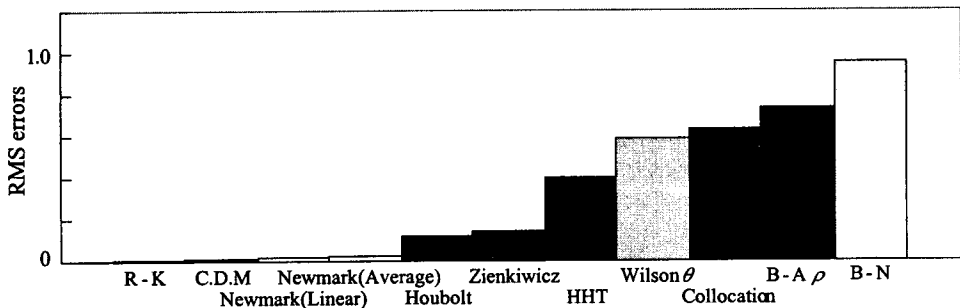


그림 7. RMS errors ($\omega = 20\text{rad/sec}$, $\Delta T/t = 0.089$)

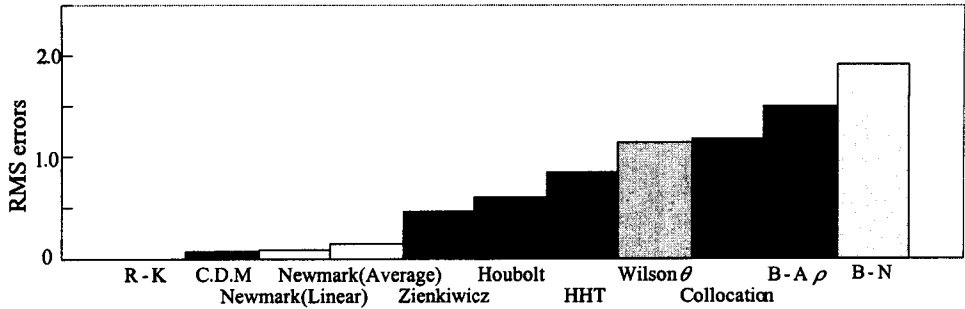


그림 8. RMS errors (El Centro Earthquake, $\Delta T/t = 0.178$)

5. 결론

여러 가지 직접적분법의 증폭 행렬을 구성하여 안정성과 정확성 분석을 수행하였다. 4층 전단 건물의 수치예제를 각각의 방법으로 풀어 동적 해석을 하고 그 결과를 정확해와 비교하였다.

안정성, 정확성 분석과 수치적 해석을 통해 얻어진 결론은 다음과 같다.

- 1) Runge-Kutta Method 와 Central Difference Method 를 제외한 모든 방법이 무조건 안정한 해석 방법이다. 위의 두 방법은 $\Delta t/T$ 가 0.3 보다 작은 경우에만 안정한 결과를 준다.
- 2) 정확성 해석에서 $\Delta t/T$ 가 0.15 보다 작은 경우 Zienkiwicz Method 와 Houbolt Method 를 제외한 다른 방법들은 좋은 정확성을 보여주었다. 특히 Central Difference Method, Runge-Kutta Method 와 Newmark Method (Linear Acceleration Method)는 매우 좋은 정확성을 보여주었다.
- 3) 수치 예제 해석에서 Runge-Kutta Method, Central Difference Method, Newmark Method (Linear Acceleration Method)는 주어진 $\Delta t/T$ 에 대해 매우 정확한 결과를 보여주었다.

참고문헌

- [1] Houbolt, J.C. (1950), "A recurrence matrix solution for the dynamics response of elastic aircraft," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 17, pp. 540-550.
- [2] Newmark, N.M. (1959), "A method of computational for structural dynamics," *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. 8, pp. 67-94.
- [3] Wilson, E.L., Farhoomand, I. and Bathe, K.J. (1973), "Nonlinear dynamics analysis of complex structures," *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 1, pp. 241-252.
- [4] Hilber, H.M., Hughes, T.J.R. and Taylor R.L. (1977), "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 5, pp. 283-292.
- [5] Hilber, H.M. and Hughes, T.J.R. (1978), "Collocation, dissipation and 'overshoot' for time integration schemes in structural dynamics," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 6, pp. 99-118.
- [6] Wood, W.L., Bozzak, M. and Zienkiewicz, O.C. (1980), "An alpha modification of Newmark's method," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 15, pp. 1562-1566.
- [7] Zienkiewicz, O.C., Wood, W.L. and Taylor, R.L. (1980), "An alternative single step algorithm for dynamics problems," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 8, pp. 31-40.
- [8] Bazzi, G. and Anderheggen, E. (1982), "The ρ -family of algorithms for time step integration with improved numerical dissipation," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, pp. 537-550.
- [9] Bathe, K.J. (1996), "Finite Element Procedures," Prentice Hall.
- [10] Hughes, T.J.R. (1987), "The Finite Element Method," Prentice Hall.
- [11] Craig R.R.Jr. (1981), "Structural Dynamics," John Wiley & Sons.