

유체-구조물-지반 상호작용을 고려한 유체저장탱크의 3차원 지진해석

Three dimensional seismic analysis of liquid storage tanks considering liquid-structure-soil interaction

김문겸* 임윤목** 조성용*** 조경환***
Kim, Moon Kyum Lim, Yun Mook Cho, Seong Yong Cho, Kyoung Hwan

ABSTRACT

In this study, a base-isolated liquid storage tank subjected to seismic ground motion is numerically simulated on frequency domain considering three-dimensional liquid-structure-soil interaction. A hybrid formulation, which combines the versatility of finite elements for tank structure and the efficiency of boundary elements for liquid and soil region, is adopted for efficient modeling. The base-isolation system using the effective stiffness and damping ratio is also included in this formulation. In order to demonstrate the accuracy and validity of the developed solution, the numerical results were compared with the reference solutions in each interaction problem. The effects of the liquid filling ratio and the stiffness of base-isolation system on the behavior of the liquid storage tanks are analyzed.

1. 서론

유체저장탱크는 구조물의 특성상 지진에 의해 피해를 입게될 경우 저장물의 손실과 구조물의 파괴와 같은 직접적 손실보다는 저장물의 확산에 따른 환경파괴와 인명피해가 더욱 심각하다. 따라서 유체저장탱크의 동적응답특성을 정확히 파악하여 구조물의 안전성을 높이기 위한 연구가 이론적 방법과 수치해석적 방법을 통해 이루어져 왔다. 그러나, 이러한 연구들의 대부분은 구조물이 지반에 강결되어 있다고 가정하므로서 지반-구조계의 상호작용이 전체 구조계의 응답에 미치는 영향을 고려할 수 없었다. 또한 최근에는 지진에 의한 구조물의 피해를 감소시키기 위해 면진장치를 채택한 설계가 많이 이루어지므로 유체저장탱크의 정확한 응답을 예측하기 위해서는 면진장치를 포함한 유체-구조물-지반의 상호작용을 고려한 3차원 해석이 필요하다.

본 연구에서 유체는 해석상의 편의를 위해 이상유체로 가정하고 경계요소를 이용하여 모형화하였으며 구조물은 감점철 쉘 유한요소를 이용하여 모형화하였다. 지반 영역은 경계요소를 이용하여 모형화하였으며 다층 반무한 기본해를 얻기 위해 일반화된 반사계수와 전달계수를 이용한 주파수 영역에서의 수치 적분 알고리즘을 개발하였다. 이러한 과정을 통해, 경계요소-유한요소-

* 연세대학교 토목공학과 교수, 정회원

** 연세대학교 토목공학과 조교수

*** 연세대학교 토목공학과 박사과정

경계요소 조합에 의해 유체, 구조물, 지반의 상호작용을 고려한 다층 반무한 영역 위의 면진 유체 저장탱크의 응답을 해석하였다.

2. 구조물, 유체, 지반 영역의 모형화

2.1 유한요소를 이용한 구조물의 모형화

D'Alembert 의 원리에 의한 가상일의 법칙을 통해 유도된 물체의 운동방정식을 감절점 셀 요소로 이산화하면 다음과 같은 식 (1) 의 형태로 나타낼 수 있다.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (1)$$

이 때 물체의 관성력에 관계된 질량행렬 $[M]$ 은 조화질량을 이용하여 모형화하고 구조물의 감쇠현상에 관계된 감쇠행렬 $[C]$ 는 Rayleigh 감쇠를 이용해 근사적으로 나타낸다.

주파수 영역에서의 해석을 위해서 식 (1) 을 시간변수에 대해 Fourier 변환을 수행하면 식 (2) 와 같이 주파수 영역에서의 운동방정식으로 나타낼 수 있다.

$$[[K^{FE}] + i\omega[C^{FE}] - \omega^2[M^{FE}]]\{u(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (2)$$

일반화된 하중 행렬 $\{F(\omega)\}$ 는 유체-구조물 상호작용계에 적용될 경우, 식 (3) 과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\{F(\omega)\} = \{F(\omega)_e\} + \{F(\omega)_p\} \quad (3)$$

여기서, $\{F(\omega)_e\}$ 는 외부에서 작용하는 절점하중을 나타내며 $\{F(\omega)_p\}$ 는 유체의 슬러싱을 통해 발생한 동수압력에 의한 절점하중이다.

2.2 경계요소를 이용한 이상유체의 모형화

구조물 내의 유체를 비점성, 비압축성, 비회전 운동을 하는 이상유체로 가정하였으므로 속도 포텐셜 함수 $(\phi(x, t))$ 를 도입하여 다음과 같은 Laplace 방정식의 형태로 유체의 운동을 표현할 수 있다.

$$\nabla^2\phi(x, t) = 0 \quad (4)$$

여기서 $x = (x, y, z)$ 는 위치벡터이다.

식 (4) 와 같이 정의된 유체의 운동을 모형화하기 위해 경계요소 해석기법을 이용하면 식 (5) 와 같은 행렬형태의 이산화된 경계적분 방정식을 얻을 수 있다.

$$[H]\{\phi\} = [G]\{q\} \quad (5)$$

여기서, $[H]$, $[G]$ 는 각각 포텐셜 벡터와 유동률 벡터에 대한 경계요소 계수행렬이며 $\{q\}$ 는 유동률 벡터이다.

유한요소와 경계요소는 기본변수의 형식이 일치하지 않으므로 경계요소의 계방정식을 유한요소

의 계방정식 형태로 변화할 필요가 있다. 먼저, 식 (5) 의 경계요소 계방정식에 유체 자유수면과 유체-구조물 경계면에서의 경계조건을 적용하여 탱크 벽체에 작용하는 동수압력을 구하면 다음과 같다.

$$\{P_t\} = \omega^2 \rho [B_I]^{-1} [B_{II}] \{u_t\} \quad (6)$$

여기서, $[B_I]$ 과 $[B_{II}]$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [B_I] &= [H_{tt}] + \omega^2 [G_{tt}] [D]^{-1} [H_{ft}] - g [H_{tt}] [D]^{-1} [H_{ft}] \\ [B_{II}] &= [G_{tt}] + \omega^2 [G_{tt}] [D]^{-1} [G_{ft}] - g [H_{tt}] [D]^{-1} [G_{ft}] \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, $[D] = g [H_{tt}] - \omega^2 [G_{tt}]$ 이고 아래첨자 t 는 구조물 벽체와 유체가 접하고 있는 절점을 의미하고 f 는 자유수면상의 절점을 의미한다. 식 (6) 과 같이 표현된 동수압력을 등가의 유한요소 절점 하중으로 변형시키기 위해 유한요소의 이산화에 사용된 형상함수, $[N]$ 을 도입하면 식 (8) 과 같은 유한요소 형태의 계방정식을 얻을 수 있다.

$$\{F(\omega)_p\} = \omega^2 [M^{BE}] \{u_t\} \quad (8)$$

여기서, $[M^{BE}] = \rho [N] [B_I]^{-1} [B_{II}]$: 유체영역에 대한 경계요소 질량행렬

2.3 경계요소를 이용한 지반의 모형화

다층 반무한 영역상에 기초가 놓여질 경우, 전 기초 표면 (Γ) 에 평형조건과 변위의 적합조건을 적용하여 다층 반무한 영역을 재구성할 수 있다. 기초의 수평방향 표면에는 응력이 존재하지 않으므로 Green 함수의 표면력 또한 사라지게 된다. 다음 방정식은 각각의 요소에 형상함수를 적용하여 구성한 것이다.

$$u_{ip}(x) = \sum_{k=1}^N t_{jk} \left[\int_{\Gamma} u_{ji}^*(x_s; x) d\Gamma \right] \quad (i, j = x, y, z) \quad (9)$$

여기서 $x=(x, y, 0)$ 와 $x_s=(x_s, y_s, 0)$ 는 각각 표면력이 없는 자유면에 위치한 하중점과 수신점을 나타낸다. 함수 u_{ji}^* 는 i 방향으로 작용하는 집중하중에 의해 x 점에 발생한 변위의 j 성분을 나타낸다. u_{ip} 는 p 번째 요소의 i 번째 변위 성분을 나타내고 t_{jk} 는 k 번째 표면 요소의 j 번째 표면력을 나타낸다. 식 (9) 를 간단하게 행렬형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\{u\} = [G]\{t\} \quad (10)$$

여기서, 행렬 $[G]$ 는 표면 Γ 에 대한 컴플라이언스 행렬로써 Γ 상의 위치한 요소간의 하중-변위 관계를 나타낸다. 유한요소와의 조합을 위해서 경계요소의 표면력을 절점하중의 형태로 변환하기 위해 형상함수 $[M]$ 을 도입하고 기초상에 작용하는 절점하중과 변위 평형조건을 고려하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$[M]^T[G]^{-1}[M]\{u\} = [S_s^{BE}]\{u\} = \{P_{ext}\} \quad (11)$$

여기서, $[S_s^{BE}]$ 는 지반의 경계요소에 대한 임피던스 행렬이다. 이와 같은 방법으로 외력과 절점 변위간의 관계를 정립하였다.

3. 전체 계방정식의 형성

유체 및 지반과 상호작용하는 유체저장탱크와 같은 문제를 해석하기 위해서는 전체 구조계의 지배 방정식에 대한 해를 구하는 것이 필요하다. 따라서 유체, 지반, 구조물 경계에서의 평형조건과 적합조건을 사용하여 각 영역의 지배방정식을 결합한다. 전체 조합과정은 다음과 같이 세 단계로 이루어진다.

단계 1) 유체와 구조물 영역을 결합하여 다음과 같은 계 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(\begin{bmatrix} M_{ff}^{FE} + M_{ff}^{BE} & M_{ff}^{FE} \\ M_{uf}^{FE} & M_u^{FE} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} C_{ff}^{FE} & C_{ff}^{FE} \\ C_{uf}^{FE} & C_u^{FE} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff}^{FE} & K_{ff}^{FE} \\ K_{uf}^{FE} & K_u^{FE} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_f \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

단계 2) 구조물과 지반 영역을 결합하여 다음과 같은 계 방정식을 얻을 수 있다.

$$[-\omega^2[M_s^{FE}] + i\omega[C_s^{FE}] + [S_s^{BE} + K_s^{BE}]]\{u_s\} = [S_s^{BE}]\{u_g\} = \{F_s\} \quad (13)$$

여기서, $\{u_s\}$: 기초의 변위

$\{u_g\}$: 지진시의 지반 변위

$\{F_s\}$: 지반을 통해 기초에 전달되는 지진하중

단계 3) 면진장치를 이용하여 유체저장 구조물과 지반을 연결한다. 결과적으로 전체 계의 지배 방정식은 식 (14) 같은 형태로 나타난다.

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M_s^{FE} & 0 & 0 \\ 0 & M_{ff}^{FE} + M_{ff}^{BE} & M_{ff}^{FE} \\ 0 & M_{uf}^{FE} & M_u^{FE} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} C_s^{FE} + C_b & -C_b & 0 \\ -C_b & C_{ff}^{FE} + C_b & C_{ff}^{FE} \\ 0 & C_{uf}^{FE} & C_u^{FE} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_s^{BE} + K_s^{FE} + K_b & -K_b & 0 \\ -K_b & K_{ff}^{FE} + K_b & K_{ff}^{FE} \\ 0 & K_{uf}^{FE} & K_u^{FE} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_s \\ u_f \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

여기서, K_b : 면진 장치의 강성행렬

C_b : 면진 장치의 감쇠행렬

4. 해석결과 및 분석

본 장에서는 개발된 프로그램을 이용하여 유체-면진장치-지반의 영향을 고려한 LNG 저장탱크의 동적 거동 특성을 파악하였다. 전체 구조계의 주파수별 응답 특성을 파악하기 위해 화이트 노이즈 해석 (white noise analysis) 을 실시하였으며, 그 후 El-Centro 지진의 N-S 성분을 입력지진하중으로 사용하여, 구조물의 시간단계별 응답을 파악하였다. 해석대상은 그림 1 과 같고, 상세한 제원 및 물성은 표 1 에 정리하였다.

표 1 제원과 물성치

제원 및 물성	기호	단위	제원 및 물성치
천정 두께	t_r	m	0.90
벽체 두께	t_w	m	0.73
바닥판 두께	t_b	m	0.73
기초판 두께	t_p	m	0.73
구조물의 밀도	ρ_t	kg/m ³	2548
포아송 비	ν		0.2
벽체의 탄성계수	E_w	GPa	31.0
천정, 바닥판, 기초판의 탄성계수	E	GPa	20.0
지반의 밀도	ρ_s	kg/m ³	2000.0
지반의 전단파속도	C_s	m/sec	8222.6
유체의 밀도	ρ_l	kg/m ³	1005.0

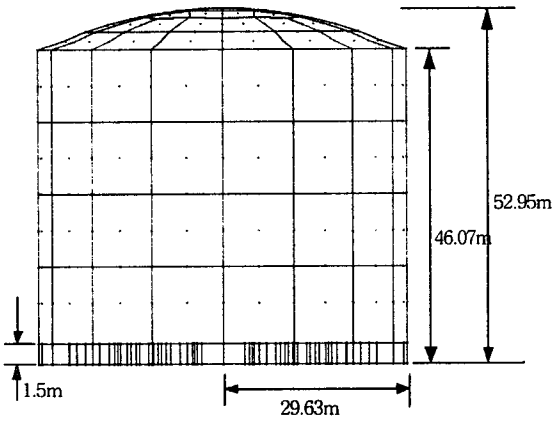


그림 1 LNG 탱크의 모형화

4.1 유체-구조물-면진장치 상호작용에 의한 LNG 저장탱크의 동적 거동 분석

LNG 저장탱크 안에 존재하는 유체의 양은 지진과 같은 동하중이 구조물에 작용할 경우 유체의 동압력을 결정하는 중요한 요소가 된다. 또한 이러한 유체에 의한 부가질량은 구조물의 질량과 연계하여 면진장치 및 전체 구조계의 거동에 영향을 주게 되므로 유체 수심의 변화에 따른 LNG 저장탱크의 거동을 파악하는 것은 매우 중요하다. 유체의 양에 따른 구조물의 응답특성 변화를 고찰하기 위해, 유체가 탱크구조물의 벽체 높이를 기준으로 0%, 50%, 75% 까지 채워져 있는 경우에 대해 해석을 수행하였다. 각각의 유체 수심에 따른 면진장치의 특성이 표 2 에 나타나 있다.

표 2 면진장치의 물성치

유체량 percent	수평강성 K_h (kg/m)	수직강성 K_v (kg/m)	수평감쇠비 β_h (·)	수직감쇠비 β_v (·)	수평감쇠행렬 C_h (kg/m)	수직감쇠행렬 C_v (kg/m)
0%	3.3×10^5	3.12×10^8	0.08	0.05	4.23×10^4	8.17×10^5
50%	3.3×10^5	3.12×10^8	0.08	0.05	7.32×10^4	1.41×10^6
75%	3.3×10^5	3.12×10^8	0.08	0.05	8.44×10^4	1.62×10^6

구조물의 응력은 기초를 제외한 탱크 구조물 자체의 상대변위에 지배되므로 전체 시스템의 응답특성을 파악하기 위해서는 상대변위의 검토가 필요하다. 그림 2 는 지반과 맞붙은 기초판과 탱크바닥면의 상대변위를 도시한 것이다. 그림에서 탱크바닥면과 기초판의 상대변위가 매우 저주파에서 가장 큰 값을 보이고 고주파수로 갈수록 점점 그 값이 감소함을 알 수 있다. 이론적으로 단자유도계로 간략화된 구조물에 대한 면진장치를 포함하는 전체 시스템의 고유진동수(면진장치 고유진동수)는 0%, 50%, 75% 의 유체수심에 대하여 각각 0.197Hz, 0.115Hz, 0.100Hz 이다. 이는 유체의 수심이 증가할수록 전체 시스템의 질량이 증가하여 면진장치의 고유주기가 증가하기 때문이다. 면진장치의 거동특성을 조사하기 위해 그림 2 를 1.0Hz 까지만 확대시켜 도시한 것이 그림 3 에 표현되었고, 각각의 탁월 주파수에서의 구조물의 거동이 그림 4 에 나타나 있다. 그림 3 에

나타난 바와 같이 유체의 수심증가에 따라서 고유주파수가 감소하는 경향을 볼 수 있으며, 그 값은 0.200, 0.130, 그리고 0.110 으로 단자유도계의 해석값과 큰 차이를 보이지 않는다. 이는 면진장치의 강성이 매우 적어서 전체 시스템의 거동이 주로 면진장치에 의해 지배되기 때문에 발생하는 현상이다.

수심에 따른 구조물의 거동을 분석하기 위해 벽체 중간-바닥면의 상대변위를 그림 5에 나타내었다. 그림에서 구조물이 유체의 수심과 관계없이 2Hz와 5Hz 부근에서 1차와 2차 Peak를 가짐을 알 수 있다. 또한 수심이 50%와 75%인 저장탱크에서는 3번째 Peak가 각각 9.30Hz와 8.25Hz에서 발생함을 알 수 있다. 이러한 현상은 유체에 의한 부가질량의 영향으로서 수위가 증가할수록 구조물의 응답이 저주파수로 진행됨을 알 수 있다. 그림 6(a), (b)는 수심 50%와 수심 75%일 때 각각 3번째 peak에서의 구조물의 거동으로서, 유체의 자유수면이 위치한 곳에서 구조물의 변위 곡률이 변함을 알 수 있었다.

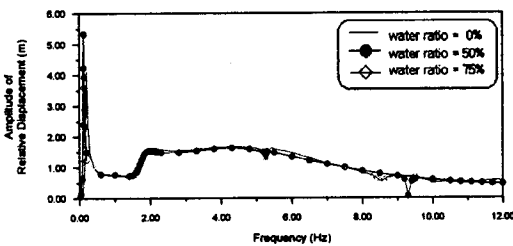


그림 2 탱크바닥면과 기초판의 상대변위

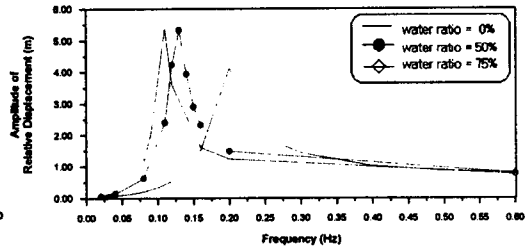


그림 3 면진장치의 고유진동수

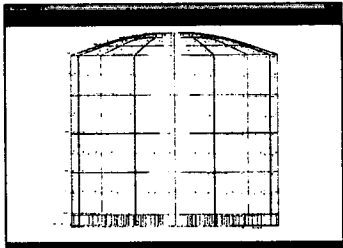


그림 4 면진장치의 거동

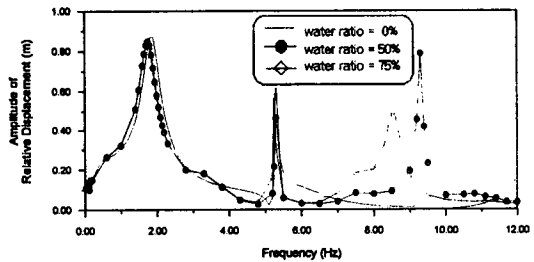
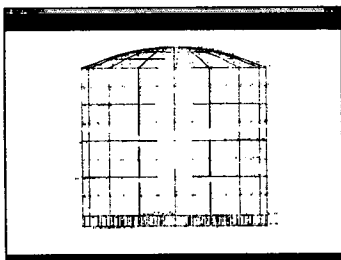
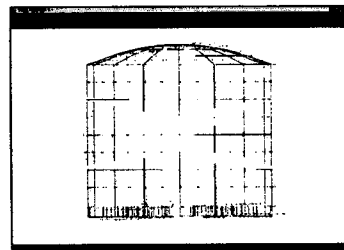


그림 5 벽체중상부와 탱크바닥면의 상대변위



(a) 수위 50%, 주파수 9.30Hz



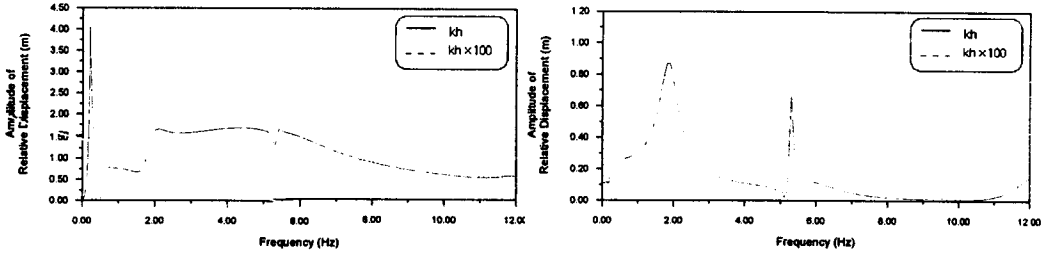
(b) 수위 75%, 주파수 8.25Hz

그림 6 구조물의 거동양상

4.2 면진장치 변화에 따른 LNG 저장탱크의 동적거동분석

면진장치는 크게 두가지 기능에 의하여 상부구조물의 동적인 응답을 변화시킬 수 있다. 즉, 면진장치의 유연성으로 상부구조물의 응답특성을 변화시킬 수 있고, 면진장치의 강성에 의하여 지진 에너지를 감소시킬 수 있다. 면진장치의 강성이 구조물에 미치는 영향을 알아보기 위하여 그림 1

의 해석대상에 대하여 면진장치의 수평강성을 100배 증가시켜서 해석을 수행하였다. 그림 7(a),(b)는 각각 면진장치의 변화에 따른 탱크바닥면과 기초판 및 벽체 중앙부와 탱크바닥면의 상대변위를 나타낸 것이다. 면진장치의 강성이 적은 경우 단자유도계 해석값과 본 해석의 차이가 적는데 반해, 그림 7(a)에서 보듯이 면진장치의 강성이 커질 경우 전체시스템이 상호작용하여 단자유도계 해석값인 1.97Hz보다 응답특성이 저주파수인 1.43Hz에서 발생함을 알 수 있다. 또한 기초판과 탱크바닥면의 상대변위는 면진장치의 강성이 커질수록 그 거동특성이 고주파로 이동하고 상대변위는 감소함을 알 수 있다. 그러나 그림(b)에서 보듯이 벽체중앙부와 탱크바닥면의 상대변위는 면진장치의 강성이 커질수록 그 거동특성이 고주파로 이동하고 그 값은 증가하였다.



(a) 탱크바닥면과 기초판의 상대변위

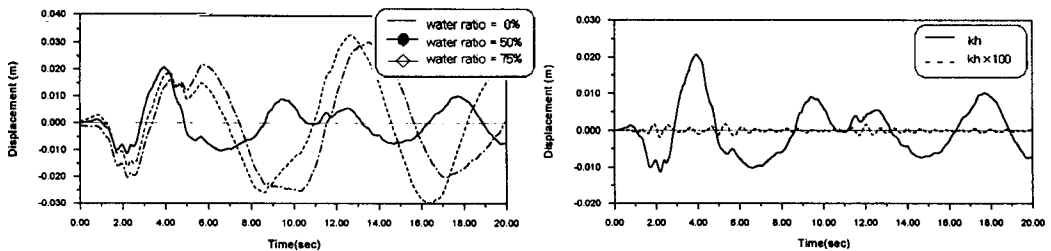
(b) 벽체중앙부와 탱크바닥면의 상대변위

그림 7 면진장치 강성에 따른 구조물의 상대변위

4.3 FFT를 이용한 시간영역으로의 변환

본 절에서는 개발된 수치해석 방법을 이용하여 그림 1의 LNG 저장탱크에 대하여 지진해석을 실시하였다. 해석에 사용된 지진은 El-Centro 지진의 N-S 성분이며 최대 지반가속도는 0.319g를 갖는다. 시간영역에 대한 기록이므로 FFT(Fast Fourier Transform)를 사용하여 변위를 주파수영역의 형태로 변환시켰다. FFT에 사용한 지진기록의 총시간은 20.46초이고 주파수 대역은 0~25Hz를 취하였다. 그림 8(a),(b)는 각각 유체량의 변화와 면진장치 강성에 따른 대상구조물의 주파수영역 응답을 FFT를 이용하여 시간영역으로 변환하여 계산한 기초판과 탱크바닥면의 상대변위이다. 그림 8(a)에서 거동초기에는 수위변화에 따라서 그 응답이 일정하지만 시간이 경과에 따라 유체의 영향을 받아 그 거동이 크게 변함을 알 수 있다. 즉, 유체의 양이 증가할수록 그 진동주기가 커지며, 절대 변위가 변화함을 알 수 있다. 이 결과에 의하면 빈 탱크구조물에 비하여 유체가 들어 있는 탱크구조물의 상대 변위가 더욱 커짐을 알 수 있다.

그림 8(b)는 면진장치의 수평강성을 그림 1의 해석대상보다 100배씩 증가시켜 해석을 수행한 결과로 유효진동수가 낮은 면진장치가 설치된 LNG 저장탱크는 높은 유효진동수가 설치된 LNG 저장탱크에 비하여 지반과의 상대변위가 증가함을 알 수 있다. 이는 지반으로부터의 하중을 상부로 더 많이 전달하여 구조물에 더 많은 응력을 부과함을 의미한다.



(a) 유체량에 따른

(b) 면진장치의 강성에 따른

그림 8 탱크바닥면과 기초판의 상대변위

5. 결론

본 연구에서는 경계요소-유한요소-경계요소 조합에 의해 다층지반위에 놓여 있는 유체저장탱크의 3차원 수치해석모형을 개발하였다. 이를 실제 LNG 저장탱크에 적용하여 주파수 영역해석 및 시간영역 해석을 수행하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

- 1) 경계요소-유한요소-경계요소 조합을 통해 개발된 본 해석기법을 이용하여 지반, 면진장치 그리고 유체의 영향을 직접적으로 고려하여 구조물의 거동을 파악할 수 있었다.
- 2) 면진장치를 포함하는 시스템의 고유진동수는 유체의 수심증가에 따라서 감소하는 것을 알 수 있었고, 그 값은 0.200, 0.130, 그리고 0.110 로 단자유도계의 해석값과 큰 차이를 보이지 않았다. 그러나 면진장치의 강성이 커지면 전체시스템이 상호작용하여 단자유도계로 해석한 값과 다소 차이를 보이고, 그 값은 약간 저주파수쪽으로 가는 경향이 있었다.
- 3) 수심 50%와 75%의 유체를 저장하고 있는 저장탱크에서는 빈탱크에서 발생하지 않았던 탁월주파수 9.30Hz 와 8.25Hz 가 각각 발생되었다. 이는 유체에 의한 부가질량의 영향으로 수위가 증가할수록 그 고유주기가 저주파수로 진행됨을 알 수 있었고, 이 때의 구조물의 거동양상을 볼 수 있었다.
- 4) FFT를 이용한 시간영역해석을 통해 수위변화에 따라서 거동초기에는 그 응답이 일정하지만 시간이 경과함에 따라 그 거동양상이 현저히 변함을 알 수 있었다. 이 때 유체의 양이 증가할수록 진동주기는 증가하였으나, 변위는 일정하게 증가하지 않았다.

감사의 글

본 연구는 한국가스공사 연구개발원의 연구비 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

- 1) Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., and Wrobel, L.C., *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, 1984
- 2) Haroun, M.A. and Housner, G.W., "Dynamic Characteristics of Liquid Storage Tanks", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 108, 1982, pp. 783-799.
- 3) Kim, M.K., Lim, Y.M. and Rhee, J.W., "Dynamic Response of Multi-Layered Half Planes by Coupling Finite and Boundary Elements", *Engineering Structures*, (1999, in printing)
- 4) Lim, Y.M., Kim, M.K., Cho, S.Y. and Cho, K.W., "Three-Dimensional Analysis for Liquid Storage Tanks Using Coupled Fe-Be Method," *The Seventh East Asia Conference on Structural engineering & Construction*, Kochi, Japan, 1999, pp.339-344
- 5) Maheri, M.R. and Severn, R.T., "Hydrodynamic Consideration for Seismic Design of Cylindrical Structures," *Civil Engineering Dynamics*, 1991, pp. 297-313.
- 6) Lay, K.S., "Seismic Coupled Modeling of Axisymmetric Tanks Containing Liquid", *Journal of Engineering Mechanics*, 119, 1993, pp. 1747-1761.
- 7) Luco, J.E., "Impedance Functions for a Rigid Foundation on a Layered Medium," *Nucl. Engrg. Des.*, 31, 1974, pp. 204-217.,