

맥동관 냉동기에서 관성관의 모델링에 관한 연구

남관우, 정상권
한국과학기술원 대학원, 한국과학기술원

A study on the modeling of the inertance tube in the pulse tube refrigerator

K. Nam, S Jeong
KAIST graduate school, KAIST

cryos@cais.kaist.ac.kr, skjeong@sorak.kaist.ac.kr

Abstract - In this paper, the inertance tube is modeled by the distributed impedance model. This model is verified by the analytical solutions for the long tube without the reservoir. In this model the distributed impedance effect of the inertance tube is included and mass flow rate and pressure distributions are calculated along the inertance tube for various inertance tube lengths. Mass flow rate at the inlet of the inertance tube is also calculated by this model and compared to the lumped impedance method. Mass flow rate by the distributed model shows quite different behaviors from the lumped model when the operating frequency is high and the length of the tube becomes large.

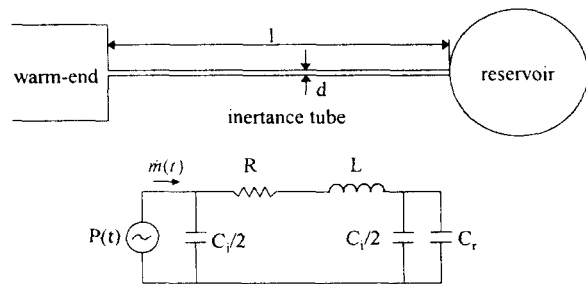


Fig. 1 Lumped impedance model of the inertance tube

였다.[2] 이 집중 임피던스 모델(lumped impedance model)로는 관성관 내부에서 일어나는 물리적 현상을 예측하는 것이 불가능하기 때문에 좀더 실제적인 모델링을 하는 것이 필요하다. 본 논문에서는 집중 임피던스 모델을 확장하여 실제적인 모델을 제시하고 관성관 내부에서 일어나는 현상을 분석하고자 한다.

1. 서론

맥동관 냉동기는 소형 극저온 냉동기의 일종으로서 Gifford와 Longsworth에 의하여 개발된 이후로 지금까지 비약적인 발전을 거듭하여 왔다. 맥동관 냉동기의 성능을 향상시키기 위한 방법으로 오리피스 맥동관 냉동기와 쌍입구 맥동관 냉동기등이 개발되었으나, 이 위상 제어 기구들은 최적의 성능을 발휘하지 못하였다. 오리피스를 대신하여 관성관(inertance tube)를 부착하면 고온부 열교환기에서 질량 유량과 압력사이에 위상차가 작아져서 성능이 최적화됨을 발견한 것은 최근의 일이다.[1],[2] 관성(inertance)은 본래 음향학(acoustics)에서 다루는 용어로서 전기 회로의 인덕턴스(inductance)와 같은 개념이다. 관성은 유체의 흐름을 계속 유지시켜주는 역할을 하는데, 이성질을 맥동관 냉동기의 위상 제어에 적용하는 것이다. 관성관에 의한 위상의 변화를 예측하기 위하여 관성관과 저장소(reservoir)로 이루어진 시스템을 RLC 전기회로에 대응시켜 해석하기도 하

2. 본론

2.1 기존의 모델

Fig. 1은 관성관을 이용한 맥동관 냉동기의 일 부분과 관성관의 집중 임피던스 모델(Lumped impedance model)이다. 여기서 관성관은 단열(adiabatic)이고 내부의 유동은 1차원으로 가정할 때 관성관의 저항(resistance), 인덕턴스(inductance), 커패시턴스(capacitance)는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$R = \frac{128\mu l}{\pi \rho d^4}, L = \frac{4l}{\pi d^2}, C_r = \frac{V_r}{kRT_h}, C_i = \frac{\pi \rho d^2}{4kRT_h} \quad (1)$$

여기서, μ, ρ 는 유체의 점성계수와 밀도, C_r 은 저장소(reservoir)의 커패시턴스 그리고 k, R 은 유체의 비열비와 기체 상수(gas constant)이다. C_i 는 관성관의 저항과 인덕턴스의 양 끝단에 1/2씩 분배되어 있다고 가정하였다.[3] 맥동 압력이 가해질 때 압력과 질량 유량사이의 관계식은 교류

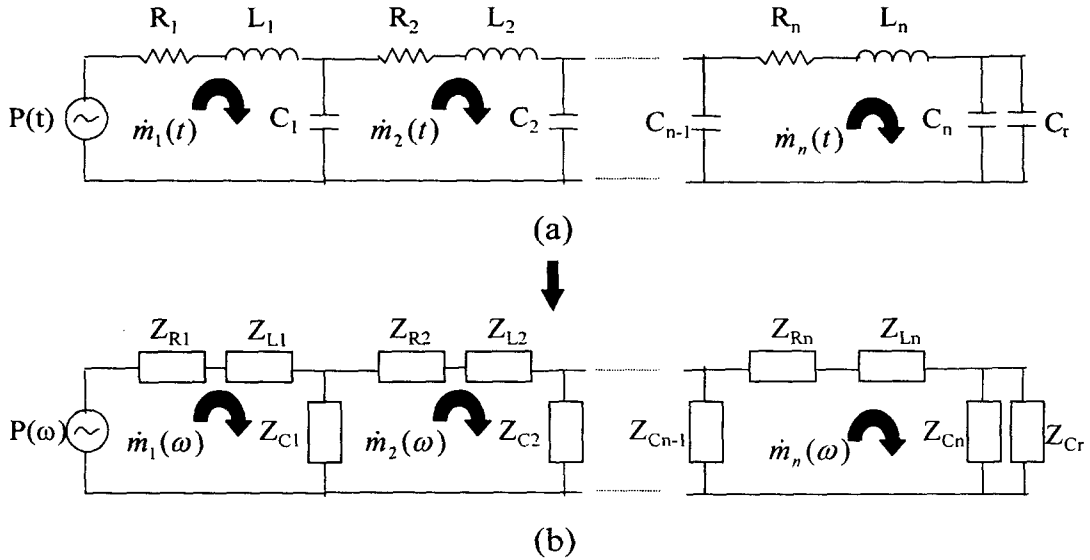


Fig. 2 Distributed impedance model

(a) Time-domain form (b) Frequency-domain form

전압이 가해질 때의 전기 회로와 유사하므로 위상 (Phasor) 해석을 통하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\dot{m}(t) = \frac{C_i}{2} \frac{dP(t)}{dt} + \frac{[P(t - \phi/\omega) - P_m]}{A} \quad (2)$$

$$\text{여기서, } A = \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/[\omega(C_r + C_i/2)]]^2},$$

$$\phi = \tan^{-1}[\omega L - 1/[\omega(C_r + C_i/2)]]/R$$

2.2 분배 모델

Fig.2는 관성관의 분배 임피던스 모델 (Distributed impedance model)로서 관성관을 n 개의 임피던스로 나누어 등가적 전기 회로 (Equivalent circuit)를 구성하였다. 이 모델은 n 개로 나눈 각각의 체적에 집중 임피던스 모델을 적용하여 관성관 내부에서의 질량 유량 과 압력 분포를 구할 수 있도록 한것이다.

2.3 계산 방법

Fig. 2에서 나타낸 시간 범위 형태(time domain form)를 주파수 범위 형태(frequency domain form)로 바꾸어 주면 저항, 인덕턴스 그리고 커패시턴스는 저항과 동일하게 취급할 수 있는 임피던스(impedance)로 표현된다. 맥동관 내부의 압력(P)이 정현파(sinusoidal wave)로 주어질 때 Fig. 2(b)와 같은 회로에 키르히호프 법

$$\begin{aligned} (Z_{R1} + Z_{C1} + Z_{L1})\dot{m}_1 - Z_{C1}\dot{m}_2 &= P_a/2e^{j\phi}, \\ Z_{C_{i-1}}\dot{m}_{i-1} - (Z_{R_i} + Z_{C_i} + Z_{L_i} + \\ &Z_{L_i})\dot{m}_i + Z_{C_i}\dot{m}_{i+1} = 0, \\ Z_{C_{n-1}}\dot{m}_{n-1} - [Z_{R_n} + Z_{C_{n-1}} + Z_{C_n}Z_{C_r}/ \\ &(Z_{C_n} + Z_{C_r}) + Z_{L_n}]\dot{m}_n = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$i = 2, n-1$

칙(Kirchhoff's law)을 적용하여 풀면 다음과 같은 n차 연립 방정식이 얻어진다.

여기서, P_a 는 입구 압력의 진폭이고 ϕ 는 입구 압력의 위상이다. 관성관에 분배된 임피던스의 값은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Z_{R1} = Z_{R2} = \dots = Z_{Rn} &= R/n \\ Z_{C1} = Z_{C2} = \dots = Z_{Cn} &= 1/[j\omega(C/n)] \\ Z_{L1} = Z_{L2} = \dots = Z_{Ln} &= j\omega L/n \end{aligned} \quad (5)$$

위의 연립 방정식의 계수 부분은 삼중 대각 행렬 (tridiagonal matrix)로 표현할 수 있으므로 관성관 내부에서 질량 유량 분포를 복소수 (Complex number) 형태로 구할 수 있다. 구해진 질량 유량으로부터 관성관의 각 부분에서의 압력 분포는 다음과 같이 구하였다.

$$\begin{aligned} P_i &= Z_{C_i}(\dot{m}_i - \dot{m}_{i+1}) \\ P_n &= (Z_{C_n}Z_{C_r})\dot{m}_n / (Z_{C_n} + Z_{C_r}) \end{aligned} \quad (6)$$

for $i = 1, n-1$

2.4 모델의 검증

분배 모델의 수치적 타당성을 검증하기 위하여 한쪽 부분이 닫힌 긴 관(long tube)에서 1차원 압력 전파에 관한 해석해를 고려하여 분배 모델에서 저장소가 없을때의 수치해와 비교하였다. 정현 파(sinusoidal wave)의 압력이 입구에서 가해질 때 내부 압력 분포는 다음과 같다.[4]

$$\hat{P}(x, t) = P_a/2e^{[j(\omega t - \phi)]} \cos[\hat{k}(l-x)] / \cos(\hat{k}l) \quad (7)$$

여기서, $\hat{k} = k - ja$, $j = \sqrt{-1}$, k 는 파동수(wave number) 그리고 a 는 가스의 흡수 계수(absorption coefficient)이다.

입구의 압력이 진폭이 2 기압이고 주파수가 100 Hz 일 때 길이가 10m이고 직경이 2mm인 관내부의 압력진폭의 분포를 식(7)과 분배 모델에 의하여 각각 계산하여 나타내면 Fig. 3과 같다.

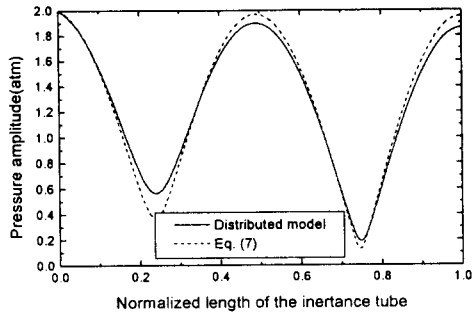
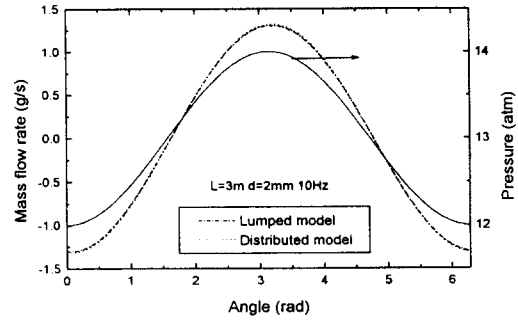


Fig. 3 Pressure amplitude along the tube
($a/k=0.04$)

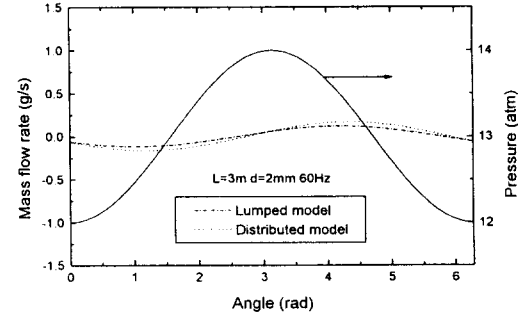
Fig. 3과 같이 특정한 흡수 계수에 대하여 계산한 해석해와 수치해가 같은 경향을 보이고 있다. 흡수 계수는 가스의 종류와 실험 조건에 따라 다른 값이므로 Fig. 3에서 절대값은 약간의 차이를 보이고 있다.

2.5 결과 및 고찰

관성관의 입구측의 압력은 진폭이 2 기압이고 평균 13기압인 정현파가 주어진다 가정하였다. 저장소의 체적은 300 ml 로 고정 시켰다. Fig. 4 는 두가지의 다른 작동 주파수에 대하여 관성관 입구에서 질량 유량을 나타낸 것이다. 작동 주파수가 60 Hz일 때 질량 유량의 진폭에 비하여 두 모델의 차이가 분명하다. Fig. 5는 관성관의 지름을 2 mm로 고정하고 길이를 변화 시킬때 질량 유량을 나타낸 것이다. 길이가 증가함에 따라 분



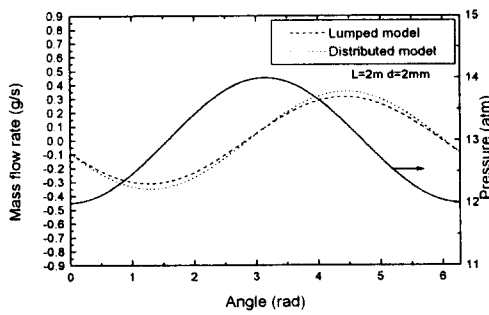
(a)



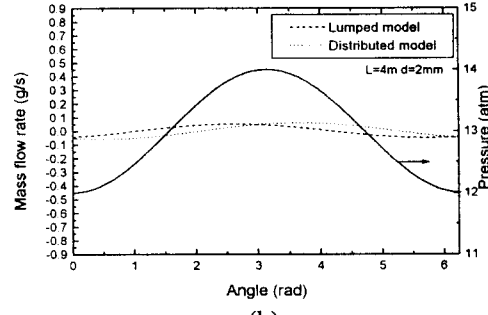
(b)

Fig. 4 Mass flow rate at the inlet of the inertance tube (a) 10 Hz (b) 60 Hz

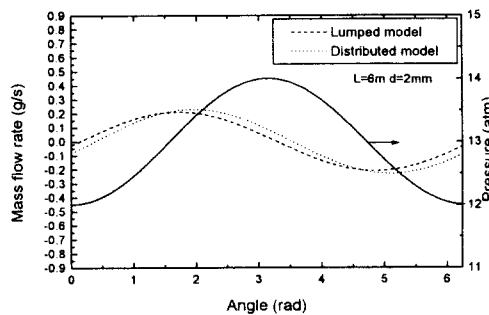
배 모델이 집중 모델과 많이 달라짐을 알 수 있다. 일반적으로 관 내부에서 압력 평면파(plane wave)의 파장이 λ 이고 관성관의 길이가 L 일 때 $\lambda/L \gg 1$ 가 아니면 관 내부에서의 압력은 길이 방향에 따라 다르다.[4] 작동 주파수가 커지고 관



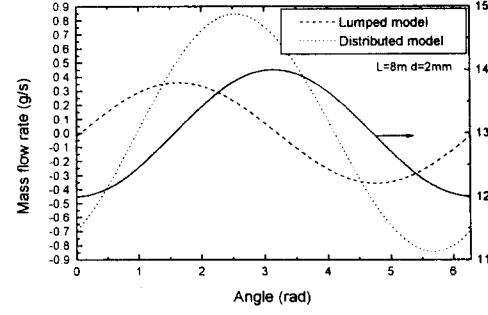
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 5 Mass flow rate at the warm end for various tube length (60 Hz)
(a) 2 m (b) 4 m (c) 6 m (d) 8 m

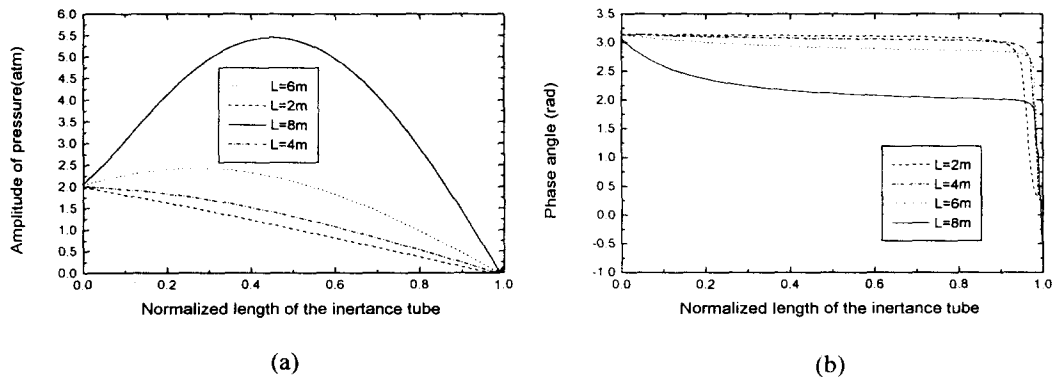


Fig. 6 Pressure distribution along the inertance tube
(a) Amplitude (b) Phase angle

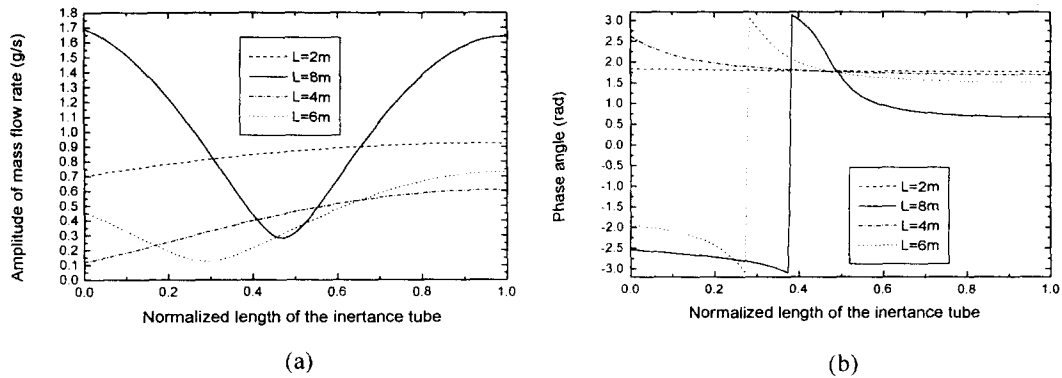


Fig. 7 Mass flow rate distribution along the inertance tube
(a) Amplitude (b) Phase angle

관의 길이가 길어지면 위의 조건을 만족하므로 분배 모델을 적용하는 것이 입구에서의 질량 유량을 좀 더 정확하게 예측할 수 있을 것이다. Fig. 6과 Fig. 7은 압력과 질량 유량을 진폭과 위상각으로 나타내어 관성관 내부에서의 분포를 나타낸 것이다. 여기서 위상각은 $\pm 2\pi$ 이내의 값을 취하였다. 관성관의 길이가 짧으면 질량 유량은 길이 방향으로 거의 일정하고 압력도 일정한 기울기로 감소한다. 관성관의 길이가 길어지면 Fig. 6(a)와 같이 관성관의 길이가 8 m일 때 관성관 내부에서 압력이 최대가 되는 지점이 존재하고 질량 유량은 최소가 된다. 따라서 Fig. 5(d)와 같이 관성관 입구에서 질량 유량이 집중 모델로 계산한 것 보다 현저하게 달라짐을 알 수 있다.

3. 결론

- (1) 관성관을 유한한 체적으로 나누어 각 체적에 집중 모델을 적용하여 관성관의 분배된 임피던스를 고려하였다.
- (2) 관성관 입구에서의 질량 유량은 작동 주파수와 관성관의 길이가 커지면 기존의 집중 모델로 예측한 결과와 다르게 나타났다.
- (3) 관성관 내부에서의 질량 유량과 압력 분포를

계산하였고, 관성관의 길이 변화에 따라 다양한 분포가 나타나므로 고주파수에서 작동하는 맥동관 냉동기에서 관성관의 길이가 길어지면 설계시 주의할 필요가 있다.

[참고 문헌]

- [1] S. W. Zhu, S. L. Zhou, N. Yoshimura and Y. Matsubara, "Phase shift effect of the long neck tube for the pulse tube refrigerator", *Cryocoolers* 9, pp. 269-278, 1997
- [2] D. L. Gardner and G. W. Swift, "Use of inertance in orifice pulse tube refrigerators", *Cryogenics*, Vol. 37, No. 2, pp. 117-121, 1997
- [3] P. R. Roach and A. Kashani, "Pulse tube coolers with an inertance tube: theory, modeling and practice", *Advances in Cryogenic Engineering*, Vol. 43B, pp.1895-1902, 1998
- [4] L. E. Kinsler, A. R. Frey, "Fundamentals of acoustics", John Wiley & Sons, pp. 206-233, 1982