

# 다양한 조인트들에 대한 충돌 반응 모델

정대현<sup>1</sup>, 이동춘<sup>2</sup>, 백낙훈<sup>3</sup>, 이종원<sup>4</sup>, 유관우<sup>5</sup>

<sup>1</sup>경북대학교 컴퓨터공학과

<sup>2</sup>경북대학교 정보통신학과

<sup>3</sup>조지워싱턴대학교 전산학과

## A Collision Response Model for Various Joints

"Dae Hyun Jung", Dong Chun Lee, Nakhoon Baek, J. Won Lee, Kwan Woo Ryu

Dept. of Computer Engineering, Kyungpook National University

<sup>2</sup>Dept. of Information & Communication, Kyungpook National University

<sup>3</sup>Dept. of Computer Science, The George Washington University

### 요 약

현실감이 있는 다관절체 물체의 동작을 만들기 위해 물리기반 모델링이 점차 많이 쓰여지고 있다. 이 방법에서는 충돌을 처리해 주어야 하는데, impulse를 이용하는 방법은 힘을 이용하는 방법보다 빠르기 때문에, 충돌반응에 많이 쓰여진다. 다관절체에 대한 impulse는 각각의 조인트들의 성질에 따라서 다르게 처리되어야 한다. 본 논문에서는 충돌반응을 위한 다양한 조인트들의 처리방법을 제시하고, 신속하게 처리할 수 있는 방법을 제시한다. 이를 이용하면, 복잡하게 연결된 물체들이라도 조인트들 서로 조합하여 충돌반응이 가능하다.

### 1. 서론

컴퓨터 그래픽스에서 사용되는 동작 제어 기술들 중의 하나인 물리 기반 모델링 및 시뮬레이션 기법은 자연 현상을 지배하는 일련의 물리 법칙으로 물체들의 움직임을 나타내는 방법이다. 이 방법에서는, 적절한 조건을 부여함으로써 자연스러운 움직임을 구현할 수 있고, 입력 조건의 변화에 따라 다양한 동작을 생성할 수 있다[1].

물리 기반 모델링 방법에서는 움직이는 물체들 간의 충돌을 처리하여야 한다. 충돌 순간, 해당 물체들에 순간적으로 아주 강한 힘을 가하여 이를 처리해 주는 방법이 있지만, 시간을 매우 잘게 나누어야 하기 때문에 충돌반응(collision response)이 느려진다. 그렇지만 충돌시 물체들에 가해지는 힘(impulse)의 총량에 대한 운동량 보존 법칙을 이용하면, 충돌반응을 빠르게 처리할 수 있다[2].

각 물체(rigid body)가 서로 독립적으로 움직이는 경우에 대해서는 효과적인 충돌 반응 방법들이 제시되어 있다[2,3,4]. 실제 세계에 있어서는 여러 개의 물체들이 조인트(joint)로 연결된 형태인 다관절체(articulated body)들이 상당수 존재한다. 이러한 다관절체들끼리의 충돌 시에는 서로 직접적으로 충돌하지 않은 물체들에 대해서도 제어가 필요하다.

Moore는 다관절체들 간의 충돌을 다루기 위한 방법[4]을 제시하였는데, 이 방법에서는 주어진 모든 물체들에 대한 물리 조건들, impulse, 조인트에 대한 조건들을 하나의 선형 방정식(linear equation)으로 표현한다. 충돌이 일어난 후의 각 물체들의 움직임은 이 선형 방정식의 해를 이용하여 제어된다. 이 방법에서는 조인트의 특성에 따라 서로 다른 조건식을 사용하여야 한다. 실제 세계에서 사

용 가능한 조인트들은 매우 다양한 데에 반하여, Moore는 제한된 경우들만을 다루었다.

본 논문에서는 실제 세계에서 사용 가능한 다양한 조인트들을 분석하고, 이들 조인트들에 대한 조건식을 제안한다. 또, 이러한 조건식들을 하나의 선형방정식으로 통합시키는 방법을 제시하고, 통합된 선형 방정식의 특성을 분석하여 효과적으로 해를 구하는 수치 해석 방법을 보인다. 이러한 결과들은 다양한 조인트들로 연결된 다관절체들의 충돌을 효과적으로 처리할 수 있게 한다.

### 2. 충돌 모델

주어진 환경에서의 충돌하는 다관절체가 총  $n$ 개의 물체로 이루어져 있고, 각 물체는 강체라고 가정한다. 각 물체  $i$ 의 무게(mass), inertia tensor는 각각  $m_i$ ,  $I_i$ 로 표시한다. 충돌이 일어나기 전의 물체  $i$ 가 가지고 있는 선속도(linear velocity)와 각속도(angular velocity)는 각 물체의 무게 중심(center of mass)  $O_i$ 를 기준으로 각각  $v_i$ ,  $\omega_i$ 라고 한다. 충돌이 일어난 후의 각 물체는 새로운 선속도  $\bar{v}_i$ 와  $\bar{\omega}_i$ 를 가지게 된다. 충돌 반응의 처리에서는 주어진  $v_i$ ,  $\omega_i$ 들과 실제 충돌하는 물체에 대한 정보로부터  $\bar{v}_i$ ,  $\bar{\omega}_i$ 의 값을 구하게 된다.

실제 충돌이 일어나는 두 물체를 각각  $a$ ,  $b$ 라고 표시하고, 각각의 무게 중심에서 충돌 지점까지의 거리 벡터를 각각  $l_a$ ,  $l_b$ 로 표시한다(그림 1). 이 때, impulse에 의한 처리에서는 충돌 지점에서 물체  $a$ 와  $b$ 에 가해지는 impulse는 각각  $P$ ,  $-P$ 가 된다. 충돌에 직접 참여하지 않은 물체일지라도 조인트로 연결된 경우에는 각 조인트를 유지하기 위한 joint impulse의 영향을 받는다. 두 물체  $i$ ,  $j$ 가 조인트

1) 본 논문의 3번째 저자의 결과는 부분적으로 정보통신부의 정보통신 연구전담교수 채용기금 조성사업에 의하여 수행된 것임이다.

$c_{ij}$ 에 의해 연결되었다면, 충돌시 조인트에서 물체들의 선형운동을 제어하는 joint impulse force를  $P_{ij}$ , 조인트에서 물체들의 회전운동을 제어하는 joint impulse torque를  $T_{ij}$ 라고 정의한다. 또, 물체  $i, j$ 의 무게 중심에서 조인트  $c_{ij}$ 까지의 거리 벡터는 각각  $l_{ij}, l_{ji}$ 라고 표시

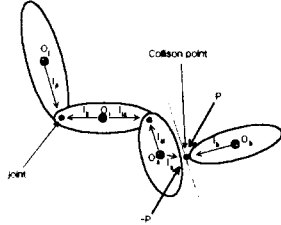


그림 1. 다관절체들의 충돌 모델

한다.

충돌을 처리하기 위해서는 우선 각 물체에 대한 운동량 보존 법칙을 적용하여야 한다. 즉, 충돌 전후의 각 물체의 운동량 변화는 충돌시 가해지는 impulse들의 합과 같다. 직접 충돌에 참여하는 두 물체 a, b에 대해서는 아래와 같은 식이 구해진다[4]. 여기서  $\hat{l}_{ij}$ 는 3x3 행렬로서,  $l_{ij}$ 와 임의의 벡터가 외적한 결과는  $\hat{l}_{ij}$ 를 곱한 것과 같다[6].

$$m_a(\bar{v}_a - v_a) = P + \sum_{i=1}^n P_{ai} + \sum_{i=1}^n \hat{l}_{ai}^{-1} T_{ai} \quad (1)$$

$$m_b(\bar{v}_b - v_b) = -P + \sum_{i=1}^n P_{bi} + \sum_{i=1}^n \hat{l}_{bi}^{-1} T_{bi} \quad (2)$$

$$I_a(\bar{\omega}_a - \omega_a) = I_a \times P + \sum_{i=1}^n l_{ai} \times P_{ai} + \sum_{i=1}^n T_{ai} \quad (3)$$

$$I_b(\bar{\omega}_b - \omega_b) = I_b \times -P + \sum_{i=1}^n l_{bi} \times P_{bi} + \sum_{i=1}^n T_{bi} \quad (4)$$

물체 a, b를 제외한 나머지 물체들은 충돌에 의한 impulse P의 영향을 직접 받지 않으므로, 그 운동량의 변화량을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$m_j(\bar{v}_j - v_j) = \sum_{i=1}^n P_{ji} + \sum_{i=1}^n \hat{l}_{ji}^{-1} T_{ji} \quad (5)$$

$$I_j(\bar{\omega}_j - \omega_j) = \sum_{i=1}^n l_{ji} \times P_{ji} + \sum_{i=1}^n T_{ji} \quad (6)$$

다음으로는 물체 a가 물체 b의 표면에 충돌하는 순간의 탄성을 고려하여야 한다. 충돌 평면에 수직인 단위 벡터를 N, 충돌 평면에 접하면서 서로 수직인 단위 벡터를 각각 T, R이라 하면, N, T, R은 충돌 표면 상에서 좌표계를 형성한다. 물체 a와 b 사이의 탄성 계수를  $\epsilon$ 이라고 하면, 일반화된 Newton 법칙에 의해 충돌 후 상대 속도의 수직 성분의 양은 충돌 전 상대 속도의 수직 성분의  $-\epsilon$ 배이다 [2]. 즉, 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} & [(\bar{v}_a + \bar{\omega}_a \times l_a) - (\bar{v}_b + \bar{\omega}_b \times l_b)] \cdot N \\ &= -\epsilon [(\bar{v}_a + \bar{\omega}_a \times l_a) - (\bar{v}_b + \bar{\omega}_b \times l_b)] \cdot N \quad (7) \end{aligned}$$

마지막으로 충돌 시의 마찰을 고려하여야 한다. 충돌 시의 impulse P는 충돌 평면을 기준으로, 수직 성분인  $P_N$ 과 충돌 평면 상의 성분  $P_{TR}$ 의 합으로 표현된다. 충돌 평면에서의 마찰 계수를  $\mu$ 라고 하면,  $|P_{TR}| \leq \mu |P_N|$ 인 경우에는 쿨롱의 법칙(Coulomb's law)[7]에 의하여 미끄러짐이 없다. 반면에,  $|P_{TR}| > \mu |P_N|$ 인 경우는 충돌 표면에서의 미끄러짐이 발생한다. 이들 경우들을 각각 sticking case, sliding case라고 표현하겠다.

위의 2가지 case중 충돌의 마찰 상태가 어느 것인지 미리 알수는 없다. 따라서 먼저 sliding이라고 가정하고 선형방정식을 구성, impulse를 구한다. sticking이라고 가정하면 상대속도의 충돌표면에 대한 성분은 0이다[4].

$$[(\bar{v}_a + \bar{\omega}_a \times l_a) - (\bar{v}_b + \bar{\omega}_b \times l_b)] \cdot T = 0 \quad (8)$$

$$[(\bar{v}_a + \bar{\omega}_a \times l_a) - (\bar{v}_b + \bar{\omega}_b \times l_b)] \cdot R = 0 \quad (9)$$

구한 impulse가 쿨롱의 법칙에서 sticking case를 만족하면 옳은 impulse이다. 만약 만족를 하지 않는다면 충돌의 마찰 상태의 가정이 잘못되었으므로, 이번에는 sliding이라고 가정하고 선형방정식을 다시 구성해서 impulse를 구한다. sliding이라고 가정하면 부딪히는 물체는 상대속도의 충돌평면 성분의 반대방향으로 운동마찰력을 받는다[4]. U를 물체 b의 충돌지점에 대한 a의 충돌지점의 상대속도로, U의 T와 R방향에 관한 성분을 각각  $U_T, U_R$ 로 정의한다.

$$P \cdot T = \alpha P \cdot N \quad (10)$$

$$P \cdot R = \beta P \cdot N \quad (11)$$

여기서  $\alpha, \beta$ 는 다음과 같이 계산할 수 있다[3].

$$\alpha = -\mu \frac{U_T}{\sqrt{U_T^2 + U_R^2}}$$

$$\beta = -\mu \frac{U_R}{\sqrt{U_T^2 + U_R^2}}$$

### 3. 조인트에 의한 조건들

다관절체의 충돌 처리에 있어서는 충돌 후에도 각 조인트에서의 특성이 유지되어야 하는 제약이 따른다. 본 논문에서는 각 조인트의 특성을 조건식으로 표현하여, 충돌 후에도 이 조건을 만족시키도록 선형 방정식의 해를 구하고자 한다. 실제계에서 사용할 수 있는 조인트들은 그림 2에서와 같은 것들이 있다[5]. 그리고, 조인트들을 설명하기 위해서는 회전의 중심축을 기준으로 직교 좌표계를 설정하는 것이 편리하다. 조인트의 중심축 방향 벡터를  $d_k$ 라 하고, 이에 직교하는 두 방향 벡터를  $d_u, d_v$ 라 표시하겠다. 이제부터는 각 조인트 별로 조건식을 제시한다. 조건식에서 벡터를 나타내는 식에서는 x,y,z에 대한 식이 3개가 나오고, 스칼라를 나타내는 식에서는 식이 1개가 나온다.

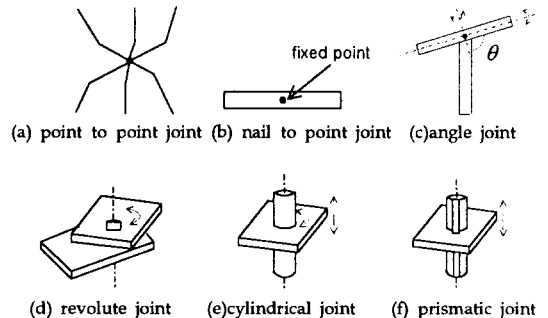


그림 2. joint의 종류

point to point joint는 두 물체가 한 점에서 연결되고, point joint를 기준으로 각 물체는 자유롭게 회전할 수 있다. 따라서, point joint는 회전에 대해서 자유도 3을 가지고, 이때의 조건식은 다음과 같다[4]. 이 때, 아래의 식은 3차원 벡터식이므로 조건식이 3개가 나온다.

$$\vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \mathbf{l}_{ij} = \vec{v}_j + \vec{\omega}_j \times \mathbf{l}_{ji}$$

nail to point joint는 물체의 특정한 점을 고정시킬 때 사용되며, 그 위치가 고정된다. 따라서, nail point에서의 선속도는 0다. 반면, 회전에 대해서는 자유로운 회전을 허용하기 때문에, nail joint는 회전에 대한 자유도 3을 가진다. 이를 조건식으로 표현하면 다음과 같다. 마찬가지로 3차원 벡터에 관한 식이므로 식이 3개가 나온다.

$$\vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \mathbf{l}_{ij} = 0$$

여기서,  $\mathbf{l}_{ij}$ 는 물체 i의 중심에서 nail joint까지의 거리 벡터이다. 다른 joint들이 두 물체를 연결하는 데에 반하여, nail joint는 하나의 물체에만 적용되기 때문에, 거리 벡터를 다른 방식으로 표현한다.

앞으로 살펴볼 joint들은 선형 움직임을 제어하는 joint와 회전 움직임을 제어하는 joint, 즉 2개의 joint로 이루어진다. 그리고 이 두 개의 joint를 제어하는 impulse는 각각  $P_{ij}$ 와  $T_{ij}$ 이다.

revolute joint는 연결된 두 물체는 joint의 중심축 방향에 대한 회전운동만 허용되므로, 다음과 같은 조건식을 가진다.

$$\vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \mathbf{l}_{ij} = \vec{v}_j + \vec{\omega}_j \times \mathbf{l}_{ji}$$

$$(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_i) \cdot \mathbf{d}_i = 0$$

$$(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_i) \cdot \mathbf{d}_j = 0$$

$$T_{ij} \cdot \mathbf{d}_k = 0$$

angle joint는 연결된 두 물체들이 joint의 축방향으로 항상 일정한 각도를 유지하면서 회전운동을 한다. 즉, joint에서 두 물체의  $\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j$  방향의 회전운동은 자유롭다.

$$\vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \mathbf{l}_{ij} = \vec{v}_j + \vec{\omega}_j \times \mathbf{l}_{ji}$$

$$T_{ij} \cdot \mathbf{d}_i = 0$$

$$T_{ij} \cdot \mathbf{d}_j = 0$$

$$(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_i) \cdot \mathbf{d}_k = 0$$

cylindrical joint에서 두 물체는 joint에서 joint의 축방향의 선형 운동과 joint의 축을 중심으로 하는 회전운동이 자유롭다.

$$[(\vec{v}_a + \vec{\omega}_a \times \mathbf{l}_a) - (\vec{v}_b + \vec{\omega}_b \times \mathbf{l}_b)] \cdot \mathbf{d}_i = 0$$

$$[(\vec{v}_a + \vec{\omega}_a \times \mathbf{l}_a) - (\vec{v}_b + \vec{\omega}_b \times \mathbf{l}_b)] \cdot \mathbf{d}_j = 0$$

$$P_{ij} \cdot \mathbf{d}_k = 0$$

$$(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_i) \cdot \mathbf{d}_i = 0$$

$$(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_i) \cdot \mathbf{d}_j = 0$$

$$T_{ij} \cdot \mathbf{d}_k = 0$$

prismatic joint에서는 두 물체는 joint에서 joint의 축방향의 선형 운동만 자유롭다.

$$[(\vec{v}_a + \vec{\omega}_a \times \mathbf{l}_a) - (\vec{v}_b + \vec{\omega}_b \times \mathbf{l}_b)] \cdot \mathbf{d}_i = 0$$

$$[(\vec{v}_a + \vec{\omega}_a \times \mathbf{l}_a) - (\vec{v}_b + \vec{\omega}_b \times \mathbf{l}_b)] \cdot \mathbf{d}_j = 0$$

$$P_{ij} \cdot \mathbf{d}_k = 0$$

$$(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_i) = 0$$

#### 4. 선형방정식의 구성

충돌하는 다관절체들이 모두 m개의 joint, n개의 물체로 구성 된다고 가정한다. 그러면 우리가 구해야 하는 모든 미지수는 impulse 성분인 P, m개의 joint  $c_{ij}$  에서의  $P_{ij}$  혹은  $T_{ij}$ , n개의 물체 각각에 대한 속도성분인  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  과 각속도 성분인  $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$  이다. 또한 P, v,  $\omega, P_{ij}, T_{ij}$ 는 (x,y,z) 3개의 미지수를 가지므로 총 미지수의 갯수는  $3*(2n + m+1)$  이다. 따라서  $3*(2n + m+1)$  만큼의 수식이 필요하다. 수식 (1)에서 (6)까지는 각 rigid body 들에 대한 운동량 보존의 법칙을 나타내는 수식으로, 여기서 우리는  $3*2n$  개의 수식을 얻을 수 있다. 또한 다관절체가 모두 m개의 joint 로 연결되어 있기 때문에  $3*m$ 개의 수식이 나온다. 마지막으로 탄성에 관한 식 (7)과 마찰에 관한 식 (8), (9) 혹은 (10), (11)로 수식이 3 개가 나온다. 따라서 모두  $3*(2n + m+1)$ 개의 수식으로 선형방정식을 구성하여 해를 구할 수 있다.

선형방정식을 구성할 때, 먼저 joint impulse를 생각하지 않고 (1) -(11)까지의 수식으로 구성한다. 그리고 각 joint에 대해서 조건식을 구성하고 (1) -(6)에 joint impulse성분을 추가시킨다면, 자동적으로 선형방정식을 구성할 수 있다.

구해진 선형방정식  $Ax=b$ 에서, A는  $3(2n+m+1) \times 3(2n+m+1)$ 의 크기를 가지는 정방행렬이다. 원래의 가우스 소거법에서는 이 정방 행렬을 직접 upper triangular 형태로 바꾼 후, 해를 구한다. 반면에, 본 논문에서 제시한 joint에서의 조건식들은 최종적인 A 행렬을 sparse 한 형태로 만들어내기 때문에 각 element들을  $3 \times 3$  크기로 묶어서 처리할 수 있다. 이러한  $3 \times 3$  크기의 matrix cluster들에 대하여 가우스 소거법을 적용시킨 후, 각각의  $3 \times 3$  행렬 방정식의 해를 구함으로써 최종 해를 구할 수 있다. 이러한 block matrix 방법은 원래의 가우스 소거법에 비해, 불필요한 연산을 최소화할 수 있고, 각 element를 linked list로 구성할 때 memory의 크기 또한 줄일 수 있다.

#### 5. 결론

본 논문에서는 다관절체에 대한 충돌을 제어함에 있어 다양한 joint에 대한 조건식을 제시하였다. 그리고 주어진 조건식을 하나의 선형방정식으로 통합하고, 효과적으로 해를 구하는 방법을 제시하였다. 무척 복잡하게 연결된 물체라도 joint를 서로 조합하면 표현이 가능하다. 따라서 본 논문에서 제시한 joint에 대한 조건을 이용하면, 대부분의 실제의 물체들에 대한 충돌반응을 기존의 dynamics system에서 사용할 수 있다.

향후에는 선형방정식들을 좀더 효과적으로 구성하여, 충돌 처리를 더 효율적으로 처리할 수 있을 것이다. 또, 더 다양한 joint들에 대한 조건식들을 구할 필요가 있다.

#### [참고문헌]

- [1] D. Hearn and M. P. Baker, "Computer Graphics", Prentice-Hall, pp 393-395, 1997.
- [2] J. Hahn, "Realistic Animation of Rigid Bodies", SIGGRAPH '88, pp.1-5, 1988.
- [3] B. Mirtich, "Impulse-based Dynamic Simulations of Rigid Body Systems", Ph.D thesis, university of California, Berkeley, 1996.
- [4] M. Moore and J. Wilhelms, "Collision Detection and Response for Computer Animation", Computer Graphics, vol.22, pp.289-298,1988.
- [5] J. Crag, "Introduction to Robotics", Addison-Wesley, 1989.
- [6] D. Baraff and A. Witkin, "Physically Based Modeling", SIGGRAPH Course Notes, pp D32-D34, 1997.
- [7] D. Hallyday, "Fundamentals of Physics", Wiley, 1997.