

단조 다각형 분할을 이용한 다각형의 형태 변환 알고리즘

°이주희 이상호

이화여자대학교 컴퓨터학과

A Morphing Algorithm of Simple Polygons using Decomposition into Monotone Pieces

Joohee Lee Sang-Ho Lee

Dept. of Computer Science and Engineering, Ewha Womans University

요 약

형태 변환이란 컴퓨터 그래픽스의 중요한 기본 연산중의 하나로, 하나의 그림이나 물체로부터 또 다른 그림이나 물체로 그 모양이 변화하는 과정을 연속적으로 보여주는 연산이다. 일반적으로 이 연산은 두 그림 사이의 대응이 되는 점들을 지정하고 각 점들이 변화하는 과정을 표현하기 위해 필요한 중간 단계를 생성하기 위해서 복잡한 함수를 계산하는 방법을 사용하여왔다. 이러한 방법은 많은 양의 계산이 요구된다. 본 논문에서는 수학적인 계산이 아니라 자료구조를 사용한 연산(operation)을 이용하는 새로운 형태 변환 알고리즘을 제안한다. 여기서 제안하는 알고리즘은 2차원 단순 다각형을 그보다 단순한 위상을 갖는 단조 다각형으로 분할하고, 각 단조 다각형을 삼각 분할하여 얻어진 듀얼 트리를 이용하여 형태를 변환하는 알고리즘이다. 사실적인 효과를 극대화하기 위해서는 될 수 있는 한 많은 중간 단계를 생성해야 하는데, 기존의 함수 계산이 아닌 트리를 이용한 연산을 함으로써 그 과정을 단순화할 수 있다는 것이 본 알고리즘의 가장 큰 특징이다.

1. 서론

컴퓨터 그래픽스의 중요한 기본 연산중의 하나로 잘 알려진 형태 변환은 하나의 그림이나 물체로부터 또 다른 그림이나 물체로 그 모양이 변화하는 과정을 연속적으로 보여주는 연산이다. 그 대상 물체가 2차원 그림인 경우에는 일반적으로 와핑과 블렌딩 기법을 사용하게 되며 대응이 되는 각 포인트별로 중간 단계의 그림을 생성해나가는 방법을 사용하게 된다[4][5].

우리가 살아가는 실세계는 아날로그이나 컴퓨터가 이해할 수 있는 형태는 디지털이다. 따라서 컴퓨터를 사용하여 실세계의 물체를 다루는 작업을 하기 위해서는 아날로그 형태의 자료를 디지털 형태로 변환해야 한다. 가장 일반적이고 대표적인 방법이 원래의 물체에 최대한 근사한 형태를 갖는 다각형 또는 다면체의 형태로 표현하는 것이다. 만일 다각형 혹은 다면체를 대상으로 하는 효과적인 형태 변환 방법을 모색한다면 그 방법을 실세계의 많은 물체에 대한 형태 변환으로 쉽게 적용할 수 있다는 가능성을 찾아낼 수 있다[1][2][3].

이러한 접근 방법은 기존의 형태 변환 알고리즘이 가지고 있는 많은 양의 수학 계산을 피해 갈 수 있는 새로운 방법이 될 것으로 기대된다. 따라서 본 연구에서는 2차원 물체를 표현할 수 있는 일반적인 단순 다각형에 대한 형태 변환 알고리즘을 제안한다. 이 알고리즘은 다각형의 모양을 결정하는데 중요한 역할을 하는 볼록각(reflex angle)들을 기준으로 하여 보다 단순한 위상을 갖는 단조 다각형(monotone polygon)으로 분할 한 후 분할 된 각각의 다각형을 이용해 형태를 변환하는 방법을 사용한다.

다각형을 효율적으로 처리하기 위해서 삼각 분할과 삼각 분할로 얻어지는 듀얼 트리를 이용하며[6] 형태 변환 과정에서 얻어지는 각 단계는 이러한 듀얼 트리의 삽입 또는 삭

제와 같은 트리의 연산으로 생성한다. 기존의 방법은 이러한 중간 단계의 그림을 위해 복잡한 함수를 이용한 많은 양의 계산을 해야 했지만 본 알고리즘에서는 듀얼 트리의 연산을 적용하기 때문에 중간 단계를 얻어내는 과정을 훨씬 단순화하고 이해하기 쉽게 만드는 장점을 갖는다.

2. 용어 설명

본 논문에서 제시하는 형태 변환 알고리즘을 설명하기 전에 여기서 사용되는 용어를 먼저 정의한다.

다각형 P 를 다각형 Q 로 변환한다고 할 때, 다각형 P 는 원시 다각형, 다각형 Q 는 목적 다각형이라 한다. y 축을 기준으로 하는 단조 다각형이란 그 다각형이 y 축에 단조 감소하는 두 개의 체인으로 구성된 경우를 말한다. 이후부터는 " y 축을 기준으로 하는 단조 다각형"을 "단조 다각형"으로 부르기로 한다.

삼각 분할된 다각형의 각 삼각형을 정점으로 하고 두 삼각형이 인접해 있는 경우에 에지를 연결하여 만든 그래프를 듀얼 그래프라고 한다[6]. 본 논문의 대상이 되는 단순 다각형인 경우 이 그래프는 언제나 사이클이 없는 트리가 되므로 이후로는 이를 듀얼 트리라 한다. 이러한 듀얼 트리의 임의의 노드는 그 차수는 그 노드에 표현되는 삼각형에 인접한 삼각형의 개수가 되므로 최대 3이 된다. 그런데, 듀얼 트리의 모든 노드의 차수가 2보다 작거나 같은 경우, 우리는 그 듀얼 트리를 선형 듀얼 트리(linear dual tree)라고 한다. 그리고 듀얼 트리가 선형인 단조 다각형을 선형 단조 다각형이라고 한다.

정의 1. 선형 듀얼 트리

각 노드의 최대 차수가 2인 듀얼 트리를 선형 듀얼 트리라 한다.

정의 2. 선형 단조 다각형

임의의 단조 다각형 M 를 삼각 분할하여 얻은 듀얼 트리가 선형 듀얼 트리인 경우, 그 다각형을 선형 단조 다각형이라 한다.

선형 듀얼 트리를 생성함으로써 얻어지는 단조 다각형을 선형 단조 다각형이라 부르는 것은 앞 단계에서 사용한 일반적인 단조 다각형과 구별하기 위함이다 이러한 선형 단조 다각형은 앞에서 분할된 단조 다각형들과 관련이 없으며 때로는 몇 개의 단조 다각형을 포함하는 단조 다각형이 된다.

3. 알고리즘 Mono-morphing

원시 다각형 P 에서 목적 다각형 Q 로 형태 변환을 하기 위해서는 제일 먼저 각 다각형을 단조 다각형으로 분할하고, 각각을 삼각 분할한 후 거기서 얻어진 듀얼 트리를 선형 듀얼 트리로 바꾸는 방법을 이용하여 주어진 다각형을 선형 단조 다각형들의 집합으로 재구성한다 마지막으로 이렇게 얻어진 두 개의 선형 듀얼 트리의 삽입과 삭제, 그리고 대각선 변경 연산 등을 사용하여 두 다각형간의 형태 변환을 유도한다

이 알고리즘의 특징은 단순 다각형을 선형 단조 다각형들의 집합으로 나눈 후 이러한 선형 단조 다각형 중심으로 형태 변환을 유도하는 것이라 할 수 있다. 따라서 단조성을 강조하여 본 알고리즘의 이름을 Mono-morphing 이라 한다. 다음에 기술된 알고리즘 Mono-Morphing은 이러한 일련의 과정을 단계별로 기술한 것이다.

알고리즘 Mono-morphing

- 1 원시 다각형 P 와 목적 다각형 Q 를 각각 y 축을 기준으로 하는 단조 다각형으로 분할한다.
2. 분할된 단조 다각형을 각각 삼각 분할하고 그 듀얼 트리를 구한다.
3. 단계 2에서 얻어진 듀얼 트리로부터 선형 듀얼 트리(linear dual tree)를 재 구성한다.
4. 두 개의 선형 듀얼 트리 간의 형태변환을 시도한다.

다음절부터 알고리즘 Mono-Morphing의 각 단계에 대해 자세히 설명한다

3. 단조 다각형으로 분할

단순 다각형은 그 위상이 매우 간단하지만 다양한 형태의 모양을 갖게 된다 만일 다각형의 모든 내각이 예각이나 둔각으로 이루어져 있다면 그 단순 다각형의 모양은 볼록 다각형이 될 것이고, 이러한 경우 다각형의 정점의 개수에 따라 거의 일정한 형태의 다각형 모양을 보여주게 된다 그러나 다각형의 내부에 볼록각(reflex angle)이 존재하는 경우에는 다양한 모양을 보이게 된다

일반적인 단순 다각형의 자인스러운 형태 변환을 위해서는 우선 다각형의 모양을 이해하는 것이 중요하다 이런 관점에서 볼 때 볼록각은 다각형의 모양을 결정하는 중요한 요소가 되는 만큼 볼록각을 잘 처리할 수 있는 방법이 요구 된다.

볼록각은 다시 두 가지로 나뉘어질 수 있다. 그 볼록각

으로 인해 y 축 혹은 x 축을 기준으로 하는 단조(monotone) 성질이 위배되는 경우가 있고, 비록 작은 볼록각이라 하더라도 단조성을 그대로 유지하는 볼록각이 있다. 그림 1에서 점선으로 표시되어있는 볼록각들은 y 축에 대한 단조성을 위배하지 않는 볼록각이지만 실선으로 표시된 각들은 단조성에 위배된다 따라서 우리는 이러한 볼록각을 처리하기 위해 주어진 일반 다각형을 y 축을 기준으로 하는 단조 다각형의 집합으로 분할하는 방법을 사용한다[6].



그림 1 단조성을 위배하는 볼록각과 분할된 다각형

그림 1은 문제가 되는 볼록각을 기준으로 주어진 다각형을 세 개의 단조 다각형으로 분할 한 경우를 보여주고 있다. 문제가 되는 볼록각을 만나면 다각형 그 볼록각으로부터 다각형 내부를 지나는 대각선을 삽입하는 방법을 사용하는데 y 값에 의해 정렬된 정점들에 의한 선 일소(line sweep) 방법을 사용하므로 $O(n \log n)$ 시간에 해결할 수 있다[6]

4. 삼각 분할과 선형 듀얼 트리

분할된 각 단조 다각형별로 삼각 분할을 실시한다. 단조 다각형은 선형 시간에 삼각 분할이 가능하다[6]. 이렇게 분할된 다각형에 대해 듀얼 트리를 구한다. 듀얼 트리란 일종의 그래프로 삼각형은 정점으로 하고 삼각형의 어느 한 변을 공유하고 있는 경우, 즉 인접한 삼각형들을 에지로 연결하는 그래프를 말한다. 여기서 대상으로 하는 다각형은 일반적인 단순 다각형이므로 우리가 구한 듀얼 그래프는 항상 듀얼 트리가 된다

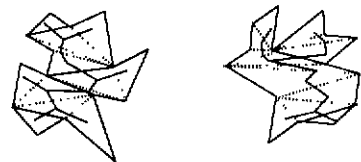


그림 2. 분할된 단조 다각형에 대한 삼각 분할과 그 듀얼 트리

그림 2는 두 다각형 P 와 Q 를 단조 다각형으로 분할하고 각 단조 다각형을 삼각 분할한 후 듀얼 트리를 구한 상태이다. 이렇게 구해진 듀얼 트리를 이용하여 주어진 다각형을 다시 관찰한다. 즉, 일정한 성질(선형 성질)을 만족하는 삼각형들을 그룹으로 묶어 y 축에 대한 단조 다각형의 집합으로 재구성하는 것이다

여기서 말하는 앞서 정의한 선형 단조 다각형을 구성하기 위한 성질이다. 선형과 단조 두 가지 조건을 모두 만족할 수 있는 성질이다 선형 성질이란 두 개의 삼각형 내부가 서로 보이는(visible) 관계이면서 y 값에 의한 단조성을 유지하고 있는 경우이거나, 서로 보이지는 않는다 하더라도 단조성을 위배하지 않는 관계인 경우를 말한다 이러한 선형 성질을 만족하는 삼각형들을 하나의 다각형으로 재구성하면

그 다각형은 단조 다각형이고, 그 듀얼 트리가 선형 듀얼 트리가 되는 선형 단조 다각형이 된다(그림 3).

일반적인 듀얼 트리로부터 선형 듀얼 트리로 변환하는 과정에서 우리는 선형 단조를 표현하는 방법으로 직선 에지로 연결하는 방법을 사용한다. 물론 성질을 표현하기 위해 직선 에지를 사용하지만, 선형 듀얼 트리의 각 노드는 기존의 듀얼 트리가 가지고 있는 정보를 잃어버리지 않도록 삼각형이 연결된 상태를 기억하고 있어야 한다. 이러한 정보는 알고리즘의 마지막 단계에서 삼각형을 삽입하거나 삭제하는 경우에 필요하게 된다.

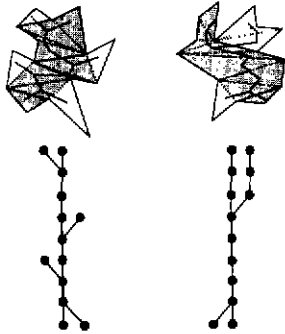


그림 3. 삼각 분할로부터 얻은 듀얼 트리와 재구성된 선형 듀얼 트리

다각형 P 와 Q 각각에 대한 선형 듀얼 트리는 그림 3과 같다. P 와 Q 중 회색으로 색이 칠해진 부분이 선형 듀얼 트리 상에서 가장 긴 선형 에지로 표현된 부분이다. 이것은 알고리즘의 앞 단계에서 분할된 여러 개의 단조 다각형의 부분을 포함하는 하나의 선형 단조 다각형이다.

그림에서 보는 것처럼 원시 다각형 P 는 5개의 부분 단조 다각형으로 되어있다. 가운데 긴 단조 다각형을 중심으로 나머지 단조 다각형들은 시선으로 연결이 되어있는데, 공유하는 에지를 중심으로 두 삼각형의 위치 관계를 고려하여 위, 아래를 결정한다. 물론 이러한 경우, 에지를 공유하는 두 개의 삼각형만을 고려한다면 그 역시 단조성을 유지하므로 직선으로 볼 수 있는 경우도 있다. 그러나 이미 직선으로 연결된 에지가 있는 경우에는 다음에 연결되는 에지는 사선으로 연결되어야 한다.

선형 듀얼 트리를 구성하는 순서는 가장 큰 y 값을 갖는 정점을 포함하는 삼각형으로부터 시작하여 앞에서 언급한 조건을 만족하는 다음 삼각형으로 계속된다. 따라서 이러한 과정을 따라가면 단계 2에서 구한 삼각 분할로부터 선형 시간 내에 언제나 유일한 선형 듀얼 트리를 얻을 수 있다.

5. 형태 변환의 예

이제 이 두 개의 선형 듀얼 트리를 이용하여 형태 변환을 유도한다. 원시 다각형의 선형 듀얼 트리를 목적 다각형의 선형 듀얼 트리로 변환하는 것이다.

처음 단계는 원시 다각형에만 존재하는 부분을 없애는 과정이다. 일단 필요 없는 부분을 삭제한 후에 주어진 다각형의 각 정점을 목적 다각형의 정점의 좌표와 맞도록 조절한다. 이제 남은 일은 목적 다각형에만 존재하는 부분을 알맞게 삽입하는 일이다.

그림 4에서 보는 것처럼 어떤 부분은 바로 삽입할 수 없는 경우가 생긴다. 삽입하고자 하는 부분에 삽입할 수 있는 에지가 존재하지 않는 경우이다. 이 상황은 삼각 분할을 위한 대각선 에지간의 문제이다. 따라서 문제가 생긴 삼각형이 그 하위 삼각형과 연결된 공유 에지, 즉 삼각형 두 개로 이루어진 사변형의 대각선을 변경함으로써 쉽게 해결될 수 있다.

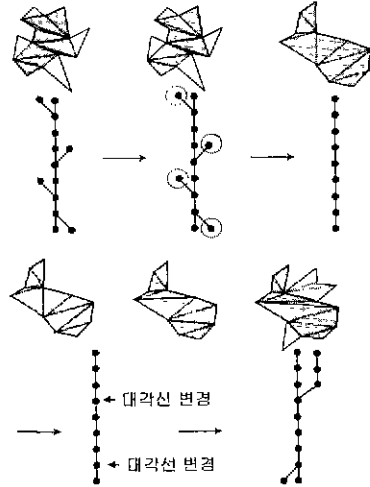


그림 4. 형태 변환 과정

6. 결론 및 향후 연구과제

본 논문에서는 일반적인 단조 다각형에 대하여 단조 다각형으로 분할한 후 각각을 삼각 분할하고 그 결과로 얻어진 선형 듀얼 트리를 이용하여 형태를 변환하는 알고리즘을 제안하였다. 실제계의 물체를 모델링하는 가장 일반적인 방법이 다각형을 이용한 근사법이므로 다각형을 이용한 형태 변환은 실제계의 모든 물체의 형태 변환으로 적용할 수 있다는 특징을 갖는다.

참고문헌

1. 송은하 "삼각 분할을 이용한 기하학적인 물체의 형태 변환 알고리즘" 이화여자대학교 컴퓨터학과 석사학위논문, 1999
2. Joohee Lee, Eunha Song, Sang-Ho Lee, Morphing Algorithms of Geometric Objects, In *Proceedings of The International Conference on Imaging Sciences, Systems and Technology*, pages 576-581, 1999
3. L. Guibas and J. Hershberger, Morphing Simple Polygons, In *Proceedings of 1994 Computational Geometry Symposium*, pages 267-276, 1994
4. T. Beier and S. Neely, Feature-Based Image Metamorphosis, In *Proceedings of SIGGRAPH*, pages 35-42, 1992
5. T. W. Sederberg and E. Greenwood, A Physically Based Approach to 2-D Shape Blending, In *Proceedings of SIGGRAPH*, pages 25-34, 1992
6. M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars and O. Schwarzkopf, *Computational Geometry Algorithms and applications*, Springer, 1997